2017 年高考仿真冲刺卷(一)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟.

第Ⅰ卷

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1．已知集合 $M=\{x|(x+2)(x-2)\leqslant 0\}$，$N=\{x|x-1<0\}$，则 $M\cap N=$(　　)

A．$\{x|-2\leqslant x<1\}$　　B．$\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$

C．$\{x|-2<x\leqslant 1\}$　　D．$\{x|x<-2\}$

2．设 i 是虚数单位，则复数$(1-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})=$(　　)

A．$3+3\mathrm{i}$　　B．$-1+3\mathrm{i}$

C．$3+\mathrm{i}$　　D．$-1+\mathrm{i}$

3．已知函数 $f(x)$为奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=2x^2-1$，则 $f(1)$的值为(　　)

A．1　　B．-1

C．2　　D．-2

4．已知 A，B 为双曲线 E 的左，右顶点，点 M 在 E 上，$\triangle ABM$ 为等腰三角形，顶角为 120°，则 E 的离心率为(　　)

A.$\sqrt{5}$　　B．2

C.$\sqrt{3}$　　D.$\sqrt{2}$

5．(2016 **黄冈模拟**)若 a，$b\in\{-1,0,1,2\}$，则函数 $f(x)=ax^2+2x+b$ 有零点的概率为(　　)

A.$\frac{13}{16}$　　B.$\frac{7}{8}$

C.$\frac{3}{4}$　　D.$\frac{5}{8}$

6．已知向量 $a=(\cos\alpha,-2)$，$b=(\sin\alpha,1)$，且 $a\parallel b$，则 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$等于(　　)

A．3　　B．-3

C.$\frac{1}{3}$　　D．$-\frac{1}{3}$

7．执行如图 1 所示的程序框图，则输出的 $S=$(　　)

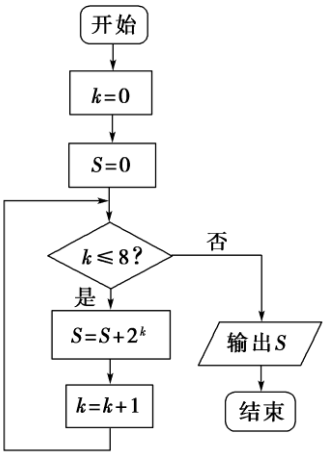


图 1

A．1 023　　B．512

C．511　　D．255

8.如图 2，过抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点 F 的直线交抛物线于点 A，B，交其准线 l 于点 C，若$|BC|=2|BF|$，且$|AF|=3$，则此抛物线的方程为(　　)

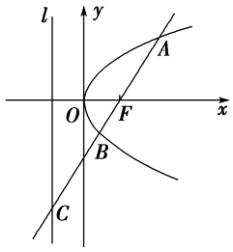


图 2

A．$y^2=9x$　　B．$y^2=6x$

C．$y^2=3x$　　D．$y^2=\sqrt{3}x$

9．一个三棱锥的三视图是三个直角三角形，如图 3 所示，则该三棱锥的外接球的表面积为(　　)

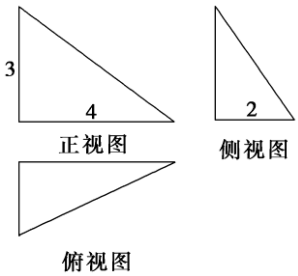


图 3

A．29π　　B．30π

C.$\frac{29\pi}{2}$　　D．216π

10．(2015 南昌二模)已知函数 $f(x)=\begin{cases}(-x)^{\frac{1}{2}}, & x\leqslant 0,\\ \log_5 x, & x>0,\end{cases}$ 函数 $g(x)$是周期为 2 的偶函数，且当 $x\in[0,1]$时，$g(x)=2^x-1$，则函数 $y=f(x)-g(x)$的零点个数是(　　)

A．5　　B．6

C．7　　D．8

第Ⅱ卷

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．把答案填在题中横线上)

11．(2016 唐山期末)若$(x^2+ax+1)^6(a>0)$的展开式中 x^2 的系数是 66，则 $\int_0^a \sin x\mathrm{d}x$ 的值为_____.

12．已知 p：$-2\leqslant x\leqslant 11$，$q$：$1-3m\leqslant x\leqslant 3+m(m>0)$，若$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要不充分条件，则实数 m 的取值范围为_____.

13．(2016 德州二模)已知变量 x，y 满足$\begin{cases}x-2y+4\geqslant 0,\\ x\leqslant 2,\\ x+y-2\geqslant 0,\end{cases}$ 则$\frac{y-2}{x+2}$的最大值为_____.

14．如图 4，菱形 $ABCD$ 的边长为 1，$\angle ABC=60°$，E，F 分别为 AD，CD 的中点，则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=$_____.

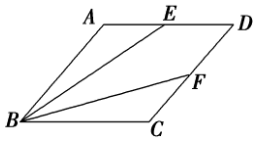


图 4

15．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $2c\cos B=2a+b$，△ABC 的面积为 $S=\frac{\sqrt{3}}{12}c$，则 ab 的最小值为_____.

三、解答题(本大题共 6 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

16．(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos^2x$.

(1)求 $f(x)$的最小正周期及 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\ \frac{2\pi}{3}\right]$时 $f(x)$的值域；

(2)在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边为 a，b，c，且角 C 为锐角，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，$c=2$，$f\left(C+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}$，求 a，b 的值.

17．(本小题满分 12 分)某批发市场对某种商品的日销售量(单位：吨)进行统计，最近 50 天的结果如下：

日销售量	1	1.5	2
频数	10	25	15
频率	0.2	a	b

(1)求表中 a，b 的值；

(2)若以上表频率作为概率，且每天的销售量相互独立，

①求 5 天中该种商品恰有 2 天销售量为 1.5 吨的概率；

②已知每吨该商品的销售利润为 2 千元，X 表示该种商品两天销售利润的和(单位：千元)，求 X 的分布列和期望.

18．(本小题满分 12 分)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n}a_n=a_{n+1}-1(n\in\mathrm{N}^*)$．数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=\frac{1}{S_n}$，T_n 是数列$\{b_n\}$的前 n 项和，求使得 $T_n<\frac{m}{10}$对所有 $n\in\mathrm{N}^*$都成立的最小正整数 m.

19．(本小题满分 12 分)如图 5，在三棱锥 $D\text{-}ABC$ 中，$DA=DB=DC$，D 在底面 ABC 上的射影为 E，$AB\perp BC$，$DF\perp AB$ 于 F.

(1)求证：平面 $ABD\perp$ 平面 DEF；

(2)若 $AD\perp DC$，$AC=4$，$\angle BAC=60°$，求直线 BE 与平面 DAB 所成的角的正弦值.

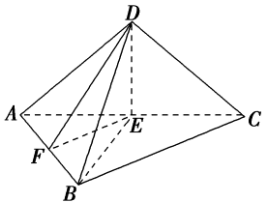


图 5

20.(本小题满分 13 分)已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，点 M 在椭圆上，且满足 $MF_2\perp x$ 轴，$|MF_1|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1)求椭圆的方程；

(2)若直线 $y=kx+2$ 交椭圆于 A，B 两点，求△ABO(O 为坐标原点)面积的最大值.

21．(本小题满分 14 分)已知 $a\in\mathrm{R}$，函数 $f(x)=x\ln(-x)+(a-1)x$.

(1)若 $f(x)$在 $x=-\mathrm{e}$ 处取得极值，求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)求函数 $f(x)$在区间$[-\mathrm{e}^2，-\mathrm{e}^{-1}]$上的最大值 $g(a)$.

2017 年高考仿真冲刺卷(一)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟.

第Ⅰ卷

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1．已知集合 $M=\{x|(x+2)(x-2)\leqslant 0\}$，$N=\{x|x-1<0\}$，则 $M\cap N=$(　　)

A．$\{x|-2\leqslant x<1\}$　　B．$\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$

C．$\{x|-2<x\leqslant 1\}$　　D．$\{x|x<-2\}$

A　[$M=\{x|(x+2)(x-2)\leqslant 0\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$N=\{x|x-1<0\}=\{x|x<1\}$，则 $M\cap N=\{x|-2\leqslant x<1\}$，故选 A.]

2．设 i 是虚数单位，则复数$(1-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})=$(　　)

A．$3+3\mathrm{i}$　　B．$-1+3\mathrm{i}$

C．$3+\mathrm{i}$　　D．$-1+\mathrm{i}$

C　[复数$(1-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})=1+2-\mathrm{i}+2\mathrm{i}=3+\mathrm{i}$.故选 C.]

3．已知函数 $f(x)$为奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=2x^2-1$，则 $f(1)$的值为(　　)

A．1　　B．-1

C．2　　D．-2

B　[函数 $f(x)$为奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=2x^2-1$，则 $f(1)=-f(-1)=-(2\times 1^2-1)=-1$.故选 B.]

4．已知 A，B 为双曲线 E 的左，右顶点，点 M 在 E 上，$\triangle ABM$ 为等腰三角形，顶角为 120°，则 E 的离心率为(　　)

A.$\sqrt{5}$　　B．2

C.$\sqrt{3}$　　D.$\sqrt{2}$

D　[设 M 在双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左支上，且 $MA=AB=2a$，$\angle MAB=120°$，

则 M 的坐标为$(-2a,\sqrt{3}a)$，代入双曲线方程可得，$\frac{4a^2}{a^2}-\frac{3a^2}{b^2}=1$，

可得 $a=b$，$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}a$，即有 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.故选 D.]

5．(2016 黄冈模拟)若 a，$b\in\{-1,0,1,2\}$，则函数 $f(x)=ax^2+2x+b$ 有零点的概率为(　　)

A.$\frac{13}{16}$　　B.$\frac{7}{8}$

C.$\frac{3}{4}$　　D.$\frac{5}{8}$

A　[法一　显然总的方法总数为 16 种.

当 $a=0$ 时，$f(x)=2x+b$，显然 $b\in\{-1,0,1,2\}$时，原函数必有零点，所以有 4 种取法；

当 $a\neq0$ 时，函数 $f(x)=ax^2+2x+b$ 为二次函数，若 $f(x)$有零点须 $\Delta\geqslant0$，即 $ab\leqslant1$，所以 a，b 取值组成的数对分别为$(-1,0)$，$(1,0)$，$(2,0)$，$(-1,1)$，$(-1,-1)$，$(1,1)$，$(1,-1)$，$(-1,2)$，$(2,-1)$共 9 种，综上符合条件的概率为$\frac{9+4}{16}=\frac{13}{16}$，故选 A.

法二　(排除法)总的方法种数为 16 种，其中原函数若无零点须有 $a\neq0$ 且 $\Delta<0$，即 $ab>1$，所以此时 a，b 取值组成的数对分别为：$(1,2)$，$(2,1)$，$(2,2)$共 3 种，所以所求有零点的概率为：$1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$，故选 A.]

6．已知向量 $a=(\cos\alpha,-2)$，$b=(\sin\alpha,1)$，且 $a\parallel b$，则 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$等于(　　)

A．3　　B．-3

C.$\frac{1}{3}$　　D．$-\frac{1}{3}$

B　[$\because a\parallel b$，$\therefore\cos\alpha+2\sin\alpha=0$，

$\therefore\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，

$\therefore\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=-3$，故选 B.]

7．执行如图 1 所示的程序框图，则输出的 $S=$(　　)

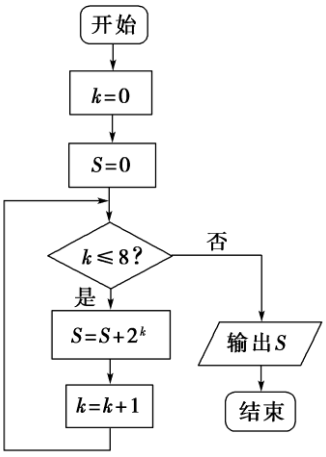


图 1

A．1 023　　B．512

C．511　　D．255

C　[模拟程序框图的运行过程，得出该程序运行后输出的是：

$S=2^0+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^8=\frac{1-2^9}{1-2}=2^9-1=511$.故选 C.]

8.如图 2，过抛物线 $y^2=2px(p>0)$的焦点 F 的直线交抛物线于点 A，B，交其准线 l 于点 C，若$|BC|=2|BF|$，且$|AF|=3$，则此抛物线的方程为(　　)

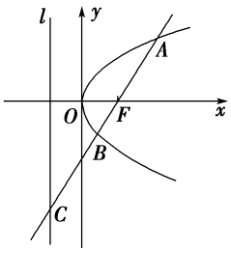
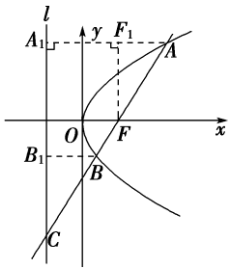


图 2

A．$y^2=9x$　　B．$y^2=6x$

C．$y^2=3x$　　D．$y^2=\sqrt{3}x$

C　[如图，分别过 A，B 作 $AA_1\perp l$ 于 A_1，$BB_1\perp l$ 于 B_1，由抛物线的定义知，$|AF|=|AA_1|$，$|BF|=|BB_1|$.∵$|BC|=2|BF|$，∴$|BC|=2|BB_1|$，



∴$\angle BCB_1=30°$，∴$\angle A_1AF=60°$.

连接 A_1F，则$\triangle A_1AF$ 为等边三角形，

过 F 作 $FF_1\perp AA_1$ 于 F_1，则 F_1 为 AA_1 的中点，

设 l 交 x 轴于 N，则$|NF|=|A_1F_1|=\frac{1}{2}|AA_1|=\frac{1}{2}|AF|$，即 $p=\frac{3}{2}$，

∴抛物线方程为 $y^2=3x$.故选 C.]

9．一个三棱锥的三视图是三个直角三角形，如图 3 所示，则该三棱锥的外接球的表面积为(　　)

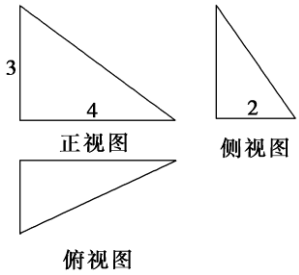


图 3

A．29π　　B．30π

C．$\frac{29\pi}{2}$　　D．216π

A　[由三视图复原几何体，几何体是底面为直角三角形，一条侧棱垂直底面直角顶点的三棱锥，把它扩展为长方体，两者有相同的外接球，它的对角线的长为球的直径 $d=\sqrt{4^2+2^2+3^2}=\sqrt{29}$，球的半径 $R=\frac{\sqrt{29}}{2}$.

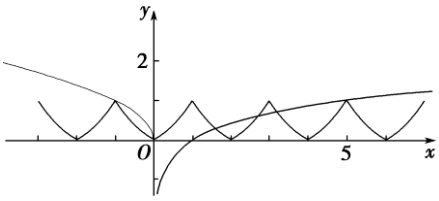
该三棱锥的外接球的表面积 $S=4\times\pi\times\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2=29\pi$，故选 A.]

10．(2015 南昌二模)已知函数 $f(x)=\begin{cases}(-x)^{\frac{1}{2}}, & x\leqslant 0,\\ \log_5 x, & x>0,\end{cases}$ 函数 $g(x)$是周期为 2 的偶函数，且当 $x\in[0,1]$时，$g(x)=2^x-1$，则函数 $y=f(x)-g(x)$的零点个数是(　　)

A．5　　B．6

C．7　　D．8

C　[由题意作函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x\leqslant 0,\\ \log_5 x, & x>0\end{cases}$ 及函数 $g(x)$的图象如下，



结合图象可知，

函数 $f(x)$与 $g(x)$的图象共有 6 个交点，

故函数 $F(x)=f(x)-g(x)$的零点个数为 6，

故选 C.]

第Ⅱ卷

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．把答案填在题中横线上)

11．(2016 **唐山期末**)若$(x^2+ax+1)^6(a>0)$的展开式中 x^2 的系数是 66，则$\int_0^a \sin x\mathrm{d}x$ 的值为_____．

$1-\cos 2$　[由题意可得$(x^2+ax+1)^6$ 的展开式中 x^2 的系数为 $C_6^1+C_6^2a^2$.

故 $C_6^1+C_6^2a^2=66$，

所以 $a=2$ 或 $a=-2$(舍去)．

故$\int_0^a \sin x\mathrm{d}x=\int_0^2 \sin x\mathrm{d}x=(-\cos x)|_0^2$

$=1-\cos 2$.]

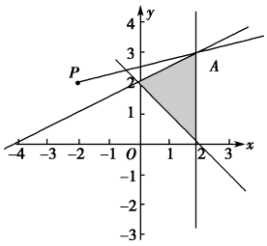
12．已知 p：$-2\leqslant x\leqslant 11$，$q$：$1-3m\leqslant x\leqslant 3+m(m>0)$，若$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要不充分条件，则实数 m 的取值范围为_____．

$[8，+\infty)$　[因为$\neg p$ 是$\neg q$ 的必要不充分条件，
所以 q 是 p 的必要不充分条件，即 $p\Rightarrow q$，但 $qD\Rightarrow/p$，

即$\begin{cases}1-3m\leqslant -2,\\3+m\geqslant 11,\end{cases}$　即$\begin{cases}m\geqslant 1,\\m\geqslant 8,\end{cases}$　所以 $m\geqslant 8$.]

13．(2016 **德州二模**)已知变量 x，y 满足$\begin{cases}x-2y+4\geqslant 0,\\x\leqslant 2,\\x+y-2\geqslant 0,\end{cases}$ 则$\frac{y-2}{x+2}$的最大值为_____．

$\frac{1}{4}$　[作出不等式组$\begin{cases}x-2y+4\geqslant 0,\\x\leqslant 2,\\x+y-2\geqslant 0\end{cases}$ 对应的平面区域，$\frac{y-2}{x+2}$的几何意义为区域内的点到 $P(-2,2)$的斜率，由图象知，PA 的斜率最大，



由$\begin{cases}x=2,\\x-2y+4=0,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$ 即 $A(2,3)$，

故 PA 的斜率 $k=\frac{3-2}{2+2}=\frac{1}{4}$.]

14．如图 4，菱形 $ABCD$ 的边长为 1，$\angle ABC=60°$，E，F 分别为 AD，CD 的中点，则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=$_____.

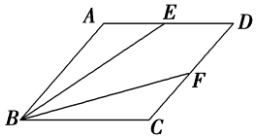


图 4

$\frac{13}{8}$ [$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=1\times1\times\cos 60°+\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{4}\times1\times1\times\cos 60°=\frac{3}{2}+\frac{1}{8}=\frac{13}{8}$.]

15．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $2c\cos B=2a+b$，△ABC 的面积为 $S=\frac{\sqrt{3}}{12}c$，则 ab 的最小值为_____.

$\frac{1}{3}$ [在△ABC 中，由条件及正弦定理可得 $2\sin C\cos B=2\sin A+\sin B=2\sin(B+C)+\sin B$，

即 $2\sin C\cos B=2\sin B\cos C+2\sin C\cos B+\sin B$，∴$2\sin B\cos C+\sin B=0$，∴$\cos C=-\frac{1}{2}$，$C=\frac{2\pi}{3}$.

由于△ABC 的面积为 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab=\frac{\sqrt{3}}{12}c$，∴$c=3ab$.

再由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，整理可得 $9a^2b^2=a^2+b^2+ab\geqslant3ab$，当且仅当 $a=b$ 时，取等号，∴$ab\geqslant\frac{1}{3}$.]

三、解答题(本大题共 6 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

16．(本小题满分 12 分)已知函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos^2x$.

(1)求 $f(x)$的最小正周期及 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\ \frac{2\pi}{3}\right]$时 $f(x)$的值域；

(2)在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边为 a，b，c，且角 C 为锐角，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，$c=2$，$f\left(C+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}$，求 a，b 的值．

[解]　(1)$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\cos^2x$

$=\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1+\cos 2x}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}$,

$\therefore T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.3 分

由$\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$，则$\frac{\pi}{6}\leqslant 2x\leqslant\frac{4\pi}{3}$,

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$时，$f(x)_{\max}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$,

$x=\frac{2\pi}{3}$时，$f(x)_{\min}=-\frac{5}{4}$.

故 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\ \frac{2\pi}{3}\right]$时，$f(x)$的值域为$\left[-\frac{5}{4},\ \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$.5 分

(2)由 $f\left(C+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}$，得$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2C+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

$\therefore\cos 2C=\frac{1}{2}>0$.8 分

又 $0<C<\frac{\pi}{2}$，$\therefore 0<2C<\pi$,

$2C=\frac{\pi}{3}$，即 $C=\frac{\pi}{6}$.

$S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，$\therefore\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$，10 分

$\therefore ab=4\sqrt{3}$.①

由余弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

$\because c=2$，$\therefore a^2+b^2=16$，②

由①②联立解得

$\begin{cases}a=2,\\b=2\sqrt{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=2\sqrt{3},\\b=2.\end{cases}$ 12 分

17．(本小题满分 12 分)某批发市场对某种商品的日销售量(单位：吨)进行统计，最近 50 天的结果如下：

日销售量	1	1.5	2
频数	10	25	15
频率	0.2	a	b

(1)求表中 a，b 的值；

(2)若以上表频率作为概率，且每天的销售量相互独立，

①求 5 天中该种商品恰有 2 天销售量为 1.5 吨的概率；

②已知每吨该商品的销售利润为 2 千元，X 表示该种商品两天销售利润的和(单位：千元)，求 X 的分布列和期望．

[解] (1)$\because \frac{10}{0.2}=50$，$\therefore a=\frac{25}{50}=0.5$，$b=\frac{15}{50}=0.3$.4 分

(2)①依题意，随机选取一天，销售量为 1.5 吨的概率 $p=0.5$.

设 5 天中该种商品有 X 天的销售量为 1.5 吨，则 $X\sim B(5,0.5)$.

$P(X=2)=C_5^2\times0.5^2\times(1-0.5)^3=0.312$ 5.6 分

②X 的可能取值为 4,5,6,7,8，则

$P(X=4)=0.2^2=0.04$，

$P(X=5)=2\times0.2\times0.5=0.2$，

$P(X=6)=0.5^2+2\times0.2\times0.3=0.37$，

$P(X=7)=2\times0.3\times0.5=0.3$，

$P(X=8)=0.3^2=0.09$.

所以 X 的分布列为：

X	4	5	6	7	8
P	0.04	0.2	0.37	0.3	0.09

10 分

$E(X)=4\times0.04+5\times0.2+6\times0.37+7\times0.3+8\times0.09=6.2$.12 分

18．(本小题满分 12 分)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n}a_n=a_{n+1}-1(n\in\mathrm{N}^*)$．数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=\frac{1}{S_n}$，T_n 是数列$\{b_n\}$的前 n 项和，求使得 $T_n<\frac{m}{10}$对所有 $n\in\mathrm{N}^*$都成立的最小正整数 m.

[解]　(1)当 $n=1$ 时，$a_1=a_2-1$，故 $a_2=2$.1 分

当 $n\geqslant2$ 时，$a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n}a_n=a_{n+1}-1(n\in\mathrm{N}^*)$．①

$a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n-1}a_{n-1}=a_n-1(n\in\mathrm{N}^*)$．　　②3 分

由①－②得$\frac{1}{n}a_n=a_{n+1}-a_n$，整理得$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$，5 分

所以 $a_n=n$.6 分

(2)$\because S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，7 分

$\therefore b_n=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，8 分

则 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$.10 分

要使 $T_n<\frac{m}{10}$对所有 $n\in\mathrm{N}^*$都成立，

则$\frac{m}{10}\geqslant2$，即 $m\geqslant20$，

即 m 的最小正整数为 20.12 分

19．(本小题满分 12 分)如图 5，在三棱锥 $D\text{-}ABC$ 中，$DA=DB=DC$，D 在底面 ABC 上的射影为 E，$AB\perp BC$，$DF\perp AB$ 于 F.

(1)求证：平面 $ABD\perp$平面 DEF；

(2)若 $AD\perp DC$，$AC=4$，$\angle BAC=60°$，求直线 BE 与平面 DAB 所成的角的正弦值.

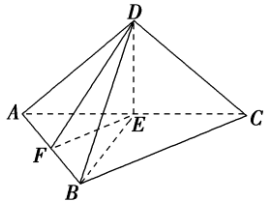


图 5

[解] (1)证明：∵$DE\perp$平面 ABC，$AB\subset$平面 ABC，

∴$AB\perp DE$，又 $AB\perp DF$，DE，$DF\subset$平面 DEF，$DE\cap DF=D$，

∴$AB\perp$平面 DEF.

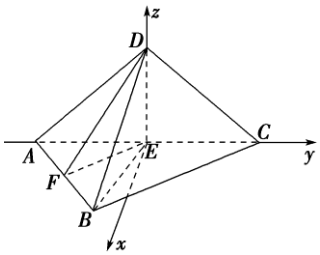
又∵$AB\subset$平面 ABD，

∴平面 $ABD\perp$平面 DEF.4 分

(2)∵$DA=DC$，$DE\perp AC$，$AC=4$，$AD\perp CD$，∴E 为 AC 的中点，$DE=\frac{1}{2}AC=2$.

∵$AB\perp BC$，$AC=4$，$\angle BAC=60°$，∴$AB=\frac{1}{2}AC=2$.

以 E 为原点建立如图所示的空间直角坐标系，



6 分

则 $E(0,0,0)$，$A(0,-2,0)$，$D(0,0,2)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$.

∴$\overrightarrow{DA}=(0,-2,-2)$，$\overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},-1,-2)$，$\overrightarrow{EB}=(\sqrt{3},-1,0)$.

设平面 DAB 的法向量为 $n=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{DB}=0,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}-2y-2z=0,\\ \sqrt{3}x-y-2z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，得 $n=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-1,1\right)$，10 分

∴$n\cdot\overrightarrow{EB}=2$，$|n|=\frac{\sqrt{21}}{3}$，$|\overrightarrow{EB}|=2$，

$\therefore \cos\langle n, \overrightarrow{EB}\rangle=\dfrac{n\cdot\overrightarrow{EB}}{|n||\overrightarrow{EB}|}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

$\therefore BE$ 与平面 DAB 所成的角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.12 分

20.(本小题满分 13 分)已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，点 M 在椭圆上，且满足 $MF_2\perp x$ 轴，$|MF_1|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1)求椭圆的方程；

(2)若直线 $y=kx+2$ 交椭圆于 A，B 两点，求△ABO(O 为坐标原点)面积的最大值.

[解] (1)由已知得$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{1}{3}$，又由 $a^2=b^2+c^2$，可得 $a^2=3c^2$，$b^2=2c^2$，

得椭圆方程为$\dfrac{x^2}{3c^2}+\dfrac{y^2}{2c^2}=1$，因为点 M 在第一象限且 $MF_2\perp x$ 轴，

可得 M 的坐标为$\left(c, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}c\right)$，由$|MF_1|=\sqrt{4c^2+\dfrac{4}{3}c^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，解得 $c=1$，

所以椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$.4 分

(2)设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

将 $y=kx+2$ 代入椭圆，可得$(3k^2+2)x^2+12kx+6=0$，

由 $\Delta>0$，即 $144k^2-24(3k^2+2)>0$，可得 $3k^2-2>0$，

则有 $x_1+x_2=-\dfrac{12k}{2+3k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{6}{2+3k^2}$，

所以$|x_1-x_2|=\dfrac{2\sqrt{18k^2-12}}{3k^2+2}$.8 分

因为直线 $y=kx+2$ 与 y 轴交点的坐标为$(0,2)$，

所以△OAB 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times2\times|x_1-x_2|=\dfrac{2\sqrt{18k^2-12}}{3k^2+2}=\dfrac{2\sqrt{6\times(3k^2-2)}}{3k^2+2}$.①

令 $3k^2-2=t$，由①知 $t\in(0, +\infty)$，

可得 $S=\dfrac{2\sqrt{6t}}{t+4}=2\sqrt{\dfrac{6t}{t^2+8t+16}}=2\sqrt{\dfrac{6}{t+\dfrac{16}{t}+8}}\leqslant\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，

所以 $t=4$ 时，面积最大为$\frac{\sqrt{6}}{2}$.13 分

21．(本小题满分 14 分)已知 $a\in R$，函数 $f(x)=x\ln(-x)+(a-1)x$.

(1)若 $f(x)$在 $x=-e$ 处取得极值，求函数 $f(x)$的单调区间；

(2)求函数 $f(x)$在区间$[-e^2，-e^{-1}]$上的最大值 $g(a)$.

[解] (1)$f'(x)=\ln(-x)+a$，

由题意知 $x=-e$ 时，$f'(x)=0$，即 $f'(-e)=1+a=0$，

$\therefore a=-1$.

$\therefore f(x)=x\ln(-x)-2x$，$f'(x)=\ln(-x)-1$.

令 $f'(x)=\ln(-x)-1=0$，可得 $x=-e$，

令 $f'(x)=\ln(-x)-1>0$，可得 $x<-e$，

令 $f'(x)=\ln(-x)-1<0$，可得$-e<x<0$，

$\therefore f(x)$在$(-\infty，-e)$上是增函数，在$(-e,0)$上是减函数.4 分

(2)$f'(x)=\ln(-x)+a$，

$\because x\in[-e^2，-e^{-1}]$，

$\therefore -x\in[e^{-1}，e^2]$，

$\therefore \ln(-x)\in[-1,2]$.

①若 $a\geqslant 1$，则 $f'(x)=\ln(-x)+a\geqslant 0$ 恒成立，此时 $f(x)$在$[-e^2，-e^{-1}]$上是增函数，$f(x)_{\max}=f(-e^{-1})=(2-a)e^{-1}$.6 分

②若 $a\leqslant -2$，则 $f'(x)=\ln(-x)+a\leqslant 0$ 恒成立，此时 $f(x)$在$[-e^2，-e^{-1}]$上是减函数，$f(x)_{\max}=f(-e^2)=-(a+1)e^2$.8 分

③若$-2<a<1$，则令 $f'(x)=\ln(-x)+a=0$，可得 $x=-e^{-a}$.

$\because f'(x)=\ln(-x)+a$ 是减函数，

$\therefore$当 $x<-e^{-a}$ 时 $f'(x)>0$，当 $x>-e^{-a}$ 时 $f'(x)<0$，

$\therefore f(x)$在$(-\infty，-e)$，$[-e^2，-e^{-1}]$上左增右减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(-e^{-a})=e^{-a}$，12 分

综上，$g(a)=\begin{cases}(2-a)e^{-1}，a\geqslant 1，\\ -(a+1)e^2，a\leqslant -2，\\ e^{-a}，-2<a<1.\end{cases}$ 14 分

高考数学五一短期冲刺课程预告

【课程目标】

高考考生考前最后一课，从高考考题、调研模拟试题本身把脉高考难点，寻求突破。

①拉分题到底拉在哪里？考前不得不知的技法以及一些杀手锏你都系统地掌握了吗？带你飞

②除了硬实力，面对选填及解答，如何提高单位时间得分率？给你想要！

【适用学员】

①高三学员（在校平均成绩 100+） ②优秀的高二学员（在校平均成绩 120+） 文理均可

【上课时间及内容】

04 月 29 日（周六）08:30-11:30 选填压轴攻克

04 月 30 日（周日）08:30-11:30 玩转圆锥曲线

05 月 01 日（周一）08:30-11:30 导数为你癫狂

课程开始后，随课附赠精心准备的高考押题卷 2 份

【班级类型】

5-15 人小班

【上课方式】

讲练结合，教师引导学生先做，然后教师讲解并凝练总结补充拓展

【费用】

1440 元/人 含三次课

【开课校区及师资】

福田百花校区：**尹会梨**老师 （特点：深谙考点 逻辑清晰 一题多解）

福田园岭校区：**常奕露**老师 （特点：授课通俗易懂 善于引导）

福田景田校区：**龚 凯**老师 （特点：气场强大，对考点把握极其精准）

南山海月校区：**李 磊**老师 （特点：娓娓道来，以小见大，高度总结）

更多试题资料请加入微信群：2017 高考数学学员交流群