2017年高考仿真冲刺卷(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共150分，考试时间120分钟.

第Ⅰ卷

一、选择题(本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1．已知R是实数集，$M=\left\{x\left|\frac{2}{x}<1\right.\right\}$，$N=\{y|y=\sqrt{x-1}\}$，则$N\cap \complement_{R}M=$(　　)

A．(1,2)　　B．[0,2]

C．$\varnothing$　　D．[1,2]

2．已知$\frac{a+2i}{i}=b-i(a，b\in R)$，其中i为虚数单位，则$a+b=$(　　)

A．-1　　B．1

C．2　　D．3

3．已知$a>1$，$f(x)=a^{x^2+2x}$，则$f(x)<1$成立的一个充分不必要条件是(　　)

A．$0<x<1$　　B．$-1<x<0$

C．$-2<x<0$　　D．$-2<x<1$

4．O为平面上的定点，A，B，C是平面上不共线的三点，若$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$，则△$ABC$是(　　)

A．以AB为底边的等腰三角形

B．以BC为底边的等腰三角形

C．以AB为斜边的直角三角形

D．以BC为斜边的直角三角形

5．一个四棱锥的三视图如图1所示，其中正视图是腰长为1的等腰直角三角形，则这个几何体的体积是(　　)

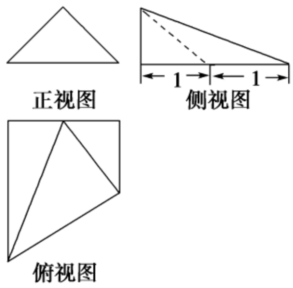
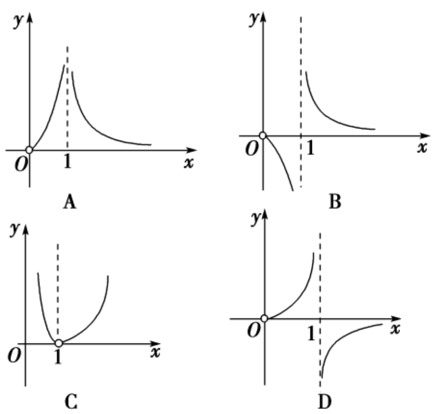


图 1

A. $\frac{1}{2}$　　　　B．1

C. $\frac{3}{2}$　　　　D．2

6．已知函数 $f(x)=\frac{1}{x-\ln x-1}$，则 $y=f(x)$的图象大致为(　　)



7．已知函数 $y=3\sin\ \omega x(\omega>0)$的周期是 π，将函数 $y=3\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)(\omega>0)$的图象沿 x 轴向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位，得到函数 $y=f(x)$的图象，则函数 $f(x)=$(　　)

A．$3\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)$　　　　B．$3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

C．$3\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)$　　　　D．$3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

8．正项等比数列$\{a_n\}$中，存在两项 a_m，a_n 使得$\sqrt{a_ma_n}=4a_1$，且 $a_6=a_5+2a_4$，则$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$的最小值是(　　)

A. $\frac{3}{2}$　　　　B．2

C. $\frac{7}{3}$　　　　D. $\frac{25}{6}$

9．函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1(x\geq 0),\\ f(x+1)(x<0),\end{cases}$ 若方程 $f(x)=-x+a$ 有且只有两个不等的实数根，则实数 a 的取值范围为(　　)

A．$(-\infty，0)$　　B．$[0,1)$

C．$(-\infty，1)$　　D．$[0，+\infty)$

10．设 $f(x)$的定义域为 D，若 $f(x)$满足下面两个条件，则称 $f(x)$为闭函数．①$f(x)$在 D 内是单调函数；②存在$[a，b]\subseteq D$，使 $f(x)$在$[a，b]$上的值域为$[a，b]$．如果 $f(x)=\sqrt{2x+1}+k$ 为闭函数，那么 k 的取值范围是(　　)

A．$-1<k\leq -\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{2}\leq k<1$

C．$k>-1$　　D．$k<1$

第 II 卷

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．把答案填在题中横线上)

11．某产品的广告费用 x(万元)与销售额 y(万元)的统计数据如下表：

广告费 x(万元)	3	4	5	6
销售额 y(万元)	25	30	40	45

根据上表可得回归直线方程$\hat{y}=7x+\hat{a}$，若广告费用为 10 万元，则预计销售额为________万元．

12．若数列 $x，a_1，a_2，y$ 成等差数列，$x，b_1，b_2，y$ 成等比数列，则$\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1b_2}$的取值范围是________．

13．观察下列等式：$2^3=3+5,3^3=7+9+11,4^3=13+15+17+19,5^3=21+23+25+27+29$，…，若类似上面各式方法将 m^3 分拆得到的等式右边最后一个数是 109，则正整数 m 等于________．

14．已知两条直线 l_1：$y=m$ 和 l_2：$y=\frac{8}{2m+1}(m>0)$，直线 l_1 与函数 $y=|\log_2x|$的图象从左至右相交于点 $A，B$，直线 l_2 与函数 $y=|\log_2x|$的图象从左至右相交于 $C，D$.记线段 AC 和 BD 在 x 轴上的投影长度分别为 a 和 b.当 m 变化时，$\frac{b}{a}$的最小值为________．

15. 如图 2 放置的边长为 1 的正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动，点 B 恰好经过原点. 设顶点 $P(x，y)$的轨迹方程是 $y=f(x)$，则对函数 $y=f(x)$有下列判断：

①函数 $y=f(x)$是偶函数；

②对任意的 $x\in \mathrm{R}$，都有 $f(x+2)=f(x-2)$；

③函数 $y=f(x)$在区间[2,3]上单调递减；

④ $\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi+1}{2}$.

其中判断正确的序号是________. (填序号)

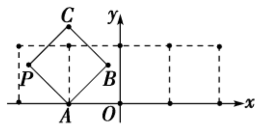


图 2

三、**解答题**(本大题共 6 小题，共 75 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

16. (本小题满分 12 分)如图 3，△ABC 中，已知点 D 在 BC 边上，满足$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.sin ∠$BAC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$AB=3\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{3}$.

(1)求 AD 的长；

(2)求 cos C.

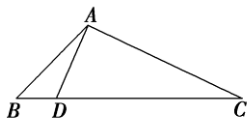


图 3

17. (本小题满分 12 分)为丰富中学生的课余生活，增进中学生之间的交往与学习，某市甲乙两所中学举办一次中学生围棋擂台赛. 比赛规则如下，双方各出 3 名队员并预先排定好出场顺序，双方的第一号选手首先对垒，双方的胜者留下进行下一局比赛，负者被淘汰出局，由第二号选手挑战上一局获胜的选手，依此类推，直到一方的队员全部被淘汰，另一方算获胜. 假若双方队员的实力旗鼓相当(即取胜对手的概率彼此相等).

(1)在已知乙队先胜一局的情况下，求甲队获胜的概率；

(2)记双方结束比赛的局数为 ξ，求 ξ 的分布列并求其数学期望 $E(\xi)$.

18．(本小题满分 12 分)已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}>a_n$对 $n\in N^*$恒成立，且 $a_1a_4=8$，$a_2+a_3=6$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$\frac{a_1}{b_1}+\frac{3a_2}{b_2}+\cdots+\frac{(2n-1)a_n}{b_n}=n$，$n\in N^*$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

19．(本小题满分 12 分)如图 4，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$B_1B=B_1A=AB=BC$，$\angle B_1BC=90°$，D 为 AC 的中点，$AB\perp B_1D$.

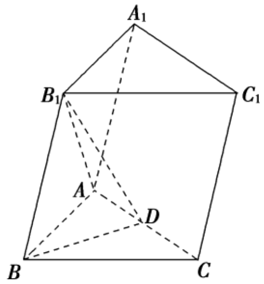


图 4

(1)求证：平面 $ABB_1A_1\perp$平面 ABC；

(2)求直线 B_1D 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值；

(3)求二面角 $B\text{-}B_1D\text{-}C$ 的余弦值.

20.(本小题满分 13 分)设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，上顶点为 A，过 A 与 AF_2 垂直的直线交 x 轴负半轴于 Q 点，且 $2\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_2Q}=0$.

(1)求椭圆 C 的离心率；

(2)若过 A，Q，F_2 三点的圆恰好与直线 $x-\sqrt{3}y-3=0$ 相切，求椭圆 C 的方程；

(3)在(2)的条件下，过右焦点 F_2 的直线交椭圆于 M，N 两点，点 $P(4,0)$，求$\triangle PMN$ 面积的最大值.

21．(本小题满分 14 分)已知函数 $f(x)=ax+\frac{a-1}{x}-2a+1(a>0)$.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $f(x)\geq\ln x$ 在$[1，+\infty)$上恒成立，求实数 a 的取值范围；

(3)证明：$\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\frac{k-1}{k+1}>\frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}}$.

2017 年高考仿真冲刺卷(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟.

第Ⅰ卷

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1．已知 R 是实数集，$M=\left\{x\left|\frac{2}{x}<1\right.\right\}$，$N=\{y|y=\sqrt{x-1}\}$，则 $N\cap\complement_{R}M=$(　　)

A．(1,2)　　　　B．[0,2]

C．∅　　　　D．[1,2]

B　[∵$M=\left\{x\left|\frac{2}{x}<1\right.\right\}=\{x|x<0$ 或 $x>2\}$，$N=\{y|y=\sqrt{x-1}\}=\{y|y\geqslant 0\}$，

故有 $N\cap\complement_{R}M=\{y|y\geqslant 0\}\cap\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}=[0,+\infty)\cap[0,2]=[0,2]$，故选 B．]

2．已知$\frac{a+2i}{i}=b-i(a,b\in R)$，其中 i 为虚数单位，则 $a+b=$(　　)

A．-1　　　　B．1

C．2　　　　D．3

D　[因为$\frac{a+2i}{i}=2-ai=b-i(a,b\in R)$，

所以 $a=1$，$b=2$，$a+b=3$，故选 D.]

3．已知 $a>1$，$f(x)=a^{x^2+2x}$，则 $f(x)<1$ 成立的一个充分不必要条件是(　　)

A．$0<x<1$　　　　B．$-1<x<0$

C．$-2<x<0$　　　　D．$-2<x<1$

B　[$f(x)<1$ 成立的充要条件是 $a^{x^2+2x}<1$.

∵$a>1$，∴$x^2+2x<0$，∴$-2<x<0$，

∴$f(x)<1$ 成立的一个充分不必要条件是 $-1<x<0$，故选 B.]

4．O 为平面上的定点，A，B，C 是平面上不共线的三点，若$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\ (\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$，则△$ABC$ 是(　　)

A．以 AB 为底边的等腰三角形

B．以 BC 为底边的等腰三角形

C．以 AB 为斜边的直角三角形

D．以 BC 为斜边的直角三角形

B　[设 BC 的中点为 D，$\because(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$，$\therefore\overrightarrow{CB}\cdot(2\overrightarrow{OD}-2\overrightarrow{OA})=0$，$\therefore\overrightarrow{CB}\cdot2\overrightarrow{AD}=0$，$\therefore\overrightarrow{CB}\perp\overrightarrow{AD}$，故△$ABC$ 的 BC 边上的中线也是高线.

故△ABC 是以 BC 为底边的等腰三角形，故选 B．]

5．一个四棱锥的三视图如图 1 所示，其中正视图是腰长为 1 的等腰直角三角形，则这个几何体的体积是(　　)

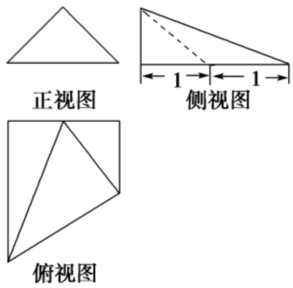


图 1

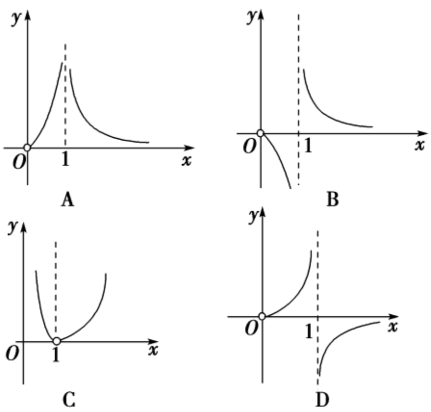
A.$\frac{1}{2}$　　　　B．1

C.$\frac{3}{2}$　　　　D．2

A　[由三视图知几何体是一个四棱锥，四棱锥的底面是一个直角梯形，上底是 1，下底是 2，梯形的高是$\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，　四棱锥的高是 $1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以四棱锥的体积是$\frac{1}{3}\times\frac{(1+2)\times\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$，故选 A.]

6．已知函数 $f(x)=\frac{1}{x-\ln x-1}$，则 $y=f(x)$的图象大致为(　　)



A　[令 $g(x)=x-\ln x-1$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

由 $g'(x)>0$，得 $x>1$，即函数 $g(x)$在$(1，+\infty)$上单调递增，

由 $g'(x)<0$ 得 $0<x<1$，即函数 $g(x)$在$(0,1)$上单调递减，

所以当 $x=1$ 时，函数 $g(x)$有最小值，$g(x)_{\min}=g(1)=0$.

于是对任意的 $x\in(0,1)\cup(1，+\infty)$，有 $g(x)\geqslant0$，故排除 B、D，

因函数 $g(x)$在$(0,1)$上单调递减，则函数 $f(x)$在$(0,1)$上递增，故排除 C，故选 A.]

7．已知函数 $y=3\sin\ \omega x(\omega>0)$的周期是 π，将函数 $y=3\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)(\omega>0)$的图象沿 x 轴向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位，得到函数 $y=f(x)$的图象，则函数 $f(x)=($　　$)$

A．$3\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)$　　　　B．$3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

C．$3\sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)$　　　　D．$3\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

B　[∵函数 $y=3\sin\omega x(\omega>0)$的周期是$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，∴$\omega=2$.

将函数 $y=3\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{2}\right)(\omega>0)$的图象沿 x 轴向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位，

得到函数 $y=f(x)=3\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{\pi}{2}\right]=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象，

故选 B.]

8．正项等比数列$\{a_n\}$中，存在两项 a_m，a_n 使得$\sqrt{a_ma_n}=4a_1$，且 $a_6=a_5+2a_4$，

则$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$的最小值是(　　)

A.$\frac{3}{2}$　　　　B．2

C.$\frac{7}{3}$　　　　D.$\frac{25}{6}$

A　[在等比数列中，∵$a_6=a_5+2a_4$，∴$a_4q^2=a_4q+2a_4$，

即$q^2-q-2=0$，解得$q=2$或$q=-1$(舍去).

∵$\sqrt{a_ma_n}=4a_1$，∴$\sqrt{a_1^2\,2^{m+n-2}}=4a_1$，

即$2^{m+n-2}=16=2^4$，

∴$m+n-2=4$，即$m+n=6$，∴$\frac{m}{6}+\frac{n}{6}=1$，

∴$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{4}{n}\right)\left(\frac{m}{6}+\frac{n}{6}\right)=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}+\frac{4m}{6n}+\frac{n}{6m}\geqslant\frac{5}{6}+2\sqrt{\frac{4m}{6n}\cdot\frac{n}{6m}}=\frac{5}{6}+2\times\frac{2}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$，

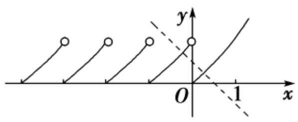
当且仅当$\frac{4m}{6n}=\frac{n}{6m}$，即$n=2m$时取等号，故选A.]

9．函数$f(x)=\begin{cases}2^x-1(x\geqslant0),\\f(x+1)(x<0),\end{cases}$若方程$f(x)=-x+a$有且只有两个不等的实数根，则实数$a$的取值范围为(　　)

A．$(-\infty，0)$　　　　B．$[0,1)$

C．$(-\infty，1)$　　　　D．$[0，+\infty)$

C　[函数$f(x)=\begin{cases}2^x-1(x\geqslant0),\\f(x+1)(x<0)\end{cases}$的图象如图所示，作出直线$l$：$y=a-x$，向左平移直线$l$观察可得函数$y=f(x)$的图象与函数$y=-x+a$的图象有两个交点，



即方程$f(x)=-x+a$有且只有两个不相等的实数根，即有$a<1$，故选C.]

10．设$f(x)$的定义域为D，若$f(x)$满足下面两个条件，则称$f(x)$为闭函数．①$f(x)$在D内是单调函数；②存在$[a，b]\subseteq D$，使$f(x)$在$[a，b]$上的值域为$[a，b]$．如

果 $f(x)=\sqrt{2x+1}+k$ 为闭函数，那么 k 的取值范围是(　　)

A．$-1<k\leqslant-\frac{1}{2}$　　　　B.$\frac{1}{2}\leqslant k<1$

C．$k>-1$　　　　D．$k<1$

A　[法一：∵$f(x)=\sqrt{2x+1}+k$ 为$\left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right)$上的增函数，又 $f(x)$在$[a,\ b]$上的值域为$[a,\ b]$，

∴$\begin{cases}f(a)=a,\\ f(b)=b,\end{cases}$ 即 $f(x)=x$ 在$\left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right)$上有两个不等实根，即$\sqrt{2x+1}=x-k$ 在$\left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right)$上有两个不等实根.

∴问题可化为 $y=\sqrt{2x+1}$和 $y=x-k$ 在$\left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right)$上有两个不同交点.

对于临界直线 m，应有$-k\geqslant\frac{1}{2}$，即 $k\leqslant-\frac{1}{2}$.

对于临界直线 n，$y'=(\sqrt{2x+1})'=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

令$\frac{1}{\sqrt{2x+1}}=1$，得切点 P 的横坐标为 0，

∴$P(0,\ -k)$.

∴n：$y=x+1$，令 $x=0$，得 $y=1$，∴$-k<1$，即 $k>-1$.

综上，$-1<k\leqslant-\frac{1}{2}$.

法二：∵$f(x)=\sqrt{2x+1}+k$ 为$\left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right)$上的增函数，又 $f(x)$在$[a,\ b]$上的值域为$[a,\ b]$，

∴$\begin{cases}f(a)=a,\\ f(b)=b,\end{cases}$ 即 $f(x)=x$ 在$\left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right)$上有两个不等实根，即$\sqrt{2x+1}=x-k$ 在$\left[-\frac{1}{2},\ +\infty\right)$上有两个不等实根.

化简方程$\sqrt{2x+1}=x-k$，得 $x^2-(2k+2)x+k^2-1=0$.

令 $g(x)=x^2-(2k+2)x+k^2-1$，则由根的分布可得$\begin{cases} g\left(-\frac{1}{2}\right)\geqslant 0, \\ k+1>-\frac{1}{2}, \\ \Delta>0, \end{cases}$ 即

$\begin{cases} \left(k+\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0, \\ k>-\frac{3}{2}, \\ k>-1, \end{cases}$

解得 $k>-1$.又$\sqrt{2x+1}=x-k$，$\therefore x\geqslant k$，

$\therefore k\leqslant -\frac{1}{2}$.

综上，$-1<k\leqslant -\frac{1}{2}$，故选 A.]

第Ⅱ卷

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．把答案填在题中横线上)

11．某产品的广告费用 x(万元)与销售额 y(万元)的统计数据如下表：

广告费 x(万元)	3	4	5	6
销售额 y(万元)	25	30	40	45

根据上表可得回归直线方程$\hat{y}=7x+\hat{a}$，若广告费用为 10 万元，则预计销售额为________万元．

73．5 [$\overline{x}=\frac{1}{4}(3+4+5+6)=4.5$，$\overline{y}=\frac{1}{4}(25+30+40+45)=35$.

由 $35=7\times 4.5+\hat{a}$，得$\hat{a}=3.5$.

所以$\hat{y}=7x+3.5$，当 $x=10$ 时，$\hat{y}=73.5$]

12．若数列 x，a_1，a_2，y 成等差数列，x，b_1，b_2，y 成等比数列，则$\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1b_2}$的取值范围是________.

$[4，+\infty)\cup(-\infty，0]$ [在等差数列中，$a_1+a_2=x+y$.在等比数列中，$xy=b_1b_2$.

$\therefore \frac{(a_1+a_2)^2}{b_1b_2}=\frac{(x+y)^2}{xy}=\frac{x^2+2xy+y^2}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2.$

当 $xy>0$ 时，$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$，故$\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1b_2}\geqslant 4$；

当 $xy<0$ 时，$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leqslant -2$，故$\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1b_2}\leqslant 0$.]

13．观察下列等式：$2^3=3+5,3^3=7+9+11,4^3=13+15+17+19,5^3=21+23+25+27+29$，…，若类似上面各式方法将 m^3 分拆得到的等式右边最后一个数是 109，则正整数 m 等于________.

10　[由题意可得第 n 行的左边是 m^3，右边是 m 个连续奇数的和.

设第 n 行的最后一个数为 a_n，

则有 $a_2-a_1=11-5=6=2\times(1+2)=1\times2+4$，

$a_3-a_2=19-11=8=2\times(2+2)=2\times2+4$，

$a_4-a_3=29-19=10=2\times(3+2)=3\times2+4$，

…

$a_n-a_{n-1}=2(n-1+2)=(n-1)\times2+4$，

以上$(n-1)$个式子相加可得 $a_n-a_1=n^2+3n-4$，

故 $a_n=n^2+3n+1$，

即 $n^2+3n+1=109$，

解得 $n=9$.

$\therefore m=n+1=9+1=10$.]

14．已知两条直线 l_1：$y=m$ 和 l_2：$y=\frac{8}{2m+1}(m>0)$，直线 l_1 与函数 $y=|\log_2x|$ 的图象从左至右相交于点 A，B，直线 l_2 与函数 $y=|\log_2x|$的图象从左至右相交于 C，D.记线段 AC 和 BD 在 x 轴上的投影长度分别为 a 和 b.当 m 变化时，$\frac{b}{a}$的最小值为________.

$8\sqrt{2}$　[设 A，B，C，D 各点的横坐标分别为 x_A，x_B，x_C，x_D，

则$-\log_2x_A=m$，$\log_2x_B=m$，$-\log_2x_C=\frac{8}{2m+1}$，$\log_2x_D=\frac{8}{2m+1}$，

$\therefore x_A=2^{-m}$，$x_B=2^m$，$x_C=2^{-\frac{8}{2m+1}}$，$x_D=2^{\frac{8}{2m+1}}$，

$\therefore a=|x_A-x_C|$，$b=|x_B-x_D|$，

$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{2^{m}-2^{\frac{8}{2m+1}}}{2^{-m}-2^{-\frac{8}{2m+1}}}=2^{m}\cdot 2^{\frac{8}{2m+1}}=2^{m+\frac{8}{2m+1}}$.

又 $m>0$，$\therefore m+\dfrac{8}{2m+1}=\dfrac{1}{2}(2m+1)+\dfrac{8}{2m+1}-\dfrac{1}{2}\geqslant 2\sqrt{\dfrac{1}{2}\times 8}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$，

当且仅当$\dfrac{1}{2}(2m+1)=\dfrac{8}{2m+1}$，即 $m=\dfrac{3}{2}$时取“＝”号，$\therefore \dfrac{b}{a}\geqslant 2^{\frac{7}{2}}=8\sqrt{2}$.]

15. 如图 2 放置的边长为 1 的正方形 $PABC$ 沿 x 轴滚动，点 B 恰好经过原点. 设顶点 $P(x，y)$的轨迹方程是 $y=f(x)$，则对函数 $y=f(x)$有下列判断：

①函数 $y=f(x)$是偶函数；

②对任意的 $x\in\mathrm{R}$，都有 $f(x+2)=f(x-2)$；

③函数 $y=f(x)$在区间[2,3]上单调递减；

④ $\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi+1}{2}$.

其中判断正确的序号是________. (填序号)

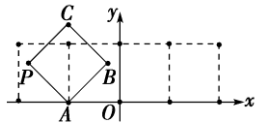


图 2

①②④ [当 $-2\leqslant x\leqslant -1$，$P$ 的轨迹是以 A 为圆心，半径为 1 的$\dfrac{1}{4}$圆，

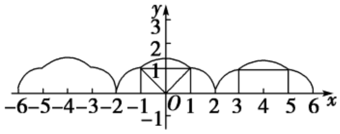
当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，P 的轨迹是以 B 为圆心，半径为$\sqrt{2}$的$\dfrac{1}{4}$圆，

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，P 的轨迹是以 C 为圆心，半径为 1 的$\dfrac{1}{4}$圆，

当 $3\leqslant x\leqslant 4$ 时，P 的轨迹是以 A 为圆心，半径为 1 的$\dfrac{1}{4}$圆，

∴函数的周期是 4.

因此最终构成图象如下：



①根据图象的对称性可知函数 $y=f(x)$是偶函数，∴①正确.

②由图象分析可知函数的周期是 4，∴②正确.

③函数 $y=f(x)$在区间[2,3]上单调递增，∴③错误.

④根据积分的几何意义可知$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\times\pi\times(\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{4}\pi\times1^2=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}$，∴④正确．]

三、**解答题**(本大题共 6 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

16. (本小题满分 12 分)如图 3，△ABC 中，已知点 D 在 BC 边上，满足$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.$\sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$AB=3\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{3}$.

(1)求 AD 的长；

(2)求 $\cos C$.

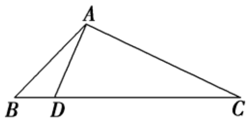


图 3

[解]　(1)∵$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，∴$AD\perp AC$，

∴$\sin\angle BAC=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\angle BAD\right)=\cos\angle BAD$.2 分

∵$\sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，∴$\cos\angle BAD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

在△ABD 中，由余弦定理可知 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\angle BAD$，4 分

即 $AD^2-8AD+15=0$，

解得 $AD=5$ 或 $AD=3$ .6 分

由于 $AB>AD$，∴$AD=3$.

(2)在△ABD 中，由正弦定理可知$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$.

又由 $\cos\angle BAD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，可知 $\sin\angle BAD=\frac{1}{3}$，8 分

∴$\sin\angle ADB=\frac{AB\sin\angle BAD}{BD}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.10 分

∵$\angle ADB=\angle DAC+\angle C$，$\angle DAC=\frac{\pi}{2}$，

∴$\cos C=\frac{\sqrt{6}}{3}$.12 分

17．(本小题满分 12 分)为丰富中学生的课余生活，增进中学生之间的交往与学习，某市甲乙两所中学举办一次中学生围棋擂台赛．比赛规则如下，双方各出 3 名队员并预先排定好出场顺序，双方的第一号选手首先对垒，双方的胜者留下进行下一局比赛，负者被淘汰出局，由第二号选手挑战上一局获胜的选手，依此类推，直到一方的队员全部被淘汰，另一方算获胜．假若双方队员的实力旗鼓相当(即取胜对手的概率彼此相等)．

(1)在已知乙队先胜一局的情况下，求甲队获胜的概率；

(2)记双方结束比赛的局数为 ξ，求 ξ 的分布列并求其数学期望 $E(\xi)$．

[解]　(1)在已知乙队先胜一局的情况下，相当于乙校还有 3 名选手，而甲校还剩 2 名选手，甲校要想取胜，需要连胜 3 场，或者比赛 4 场要胜 3 场，且最后一场获胜，所以甲校获胜的概率是$\left(\frac{1}{2}\right)^3+C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{16}$.4 分

(2)记双方结束比赛的局数为 ξ，则 $\xi=3,4,5$.

$P(\xi=3)=C_2^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$，

$P(\xi=4)=C_2^1C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$，

$P(\xi=5)=C_2^1C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{8}$.8 分

所以 ξ 的分布列为

ξ	3	4	5
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$

10 分

数学期望 $E(\xi)=3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}=\frac{33}{8}$.12 分

18．(本小题满分 12 分)已知在等比数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}>a_n$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$恒成立，且 $a_1a_4=8$，$a_2+a_3=6$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$\frac{a_1}{b_1}+\frac{3a_2}{b_2}+\cdots+\frac{(2n-1)a_n}{b_n}=n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项

和 S_n.

[解]　(1)由题意得

$$\begin{cases}a_3>a_2,\\a_1a_4=a_2a_3=8,\\a_2+a_3=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_2=2,\\a_3=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1q=2,\\a_1q^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=1,\\q=2,\end{cases}$$

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$.5 分

(2) $\because \dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{3a_2}{b_2}+\cdots+\dfrac{(2n-3)a_{n-1}}{b_{n-1}}+\dfrac{(2n-1)a_n}{b_n}=n$,

$\therefore \dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{3a_2}{b_2}+\cdots+\dfrac{(2n-3)a_{n-1}}{b_{n-1}}=n-1(n\geqslant 2)$,

$\therefore \dfrac{(2n-1)a_n}{b_n}=1$,

$b_n=(2n-1)a_n=(2n-1)2^{n-1}(n\geqslant 2)$.

又 $\because \dfrac{a_1}{b_1}=1$，$\therefore b_1=a_1=1=(2\times 1-1)2^{1-1}$,

$\therefore b_n=(2n-1)2^{n-1}$.8 分

又 $S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$,

$\therefore S_n=1+3\times 2+5\times 2^2+\cdots+(2n-1)2^{n-1}$，①

$2S_n=1\times 2+3\times 2^2+\cdots+(2n-3)2^{n-1}+(2n-1)2^n$,　　②10 分

由①－②得 $-S_n=1+2(2+2^2+\cdots+2^{n-1})-(2n-1)2^n$

$=1+2\times\dfrac{2(1-2^{n-1})}{1-2}-(2n-1)2^n$

$=1+2(2^n-2)-(2n-1)2^n$

$=1+[2-(2n-1)]2^n-4$

$=(3-2n)2^n-3$,

$\therefore S_n=(2n-3)2^n+3$.12 分

19．(本小题满分 12 分)如图 4，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$B_1B=B_1A=AB=BC$，$\angle B_1BC=90°$，D 为 AC 的中点，$AB\perp B_1D$.

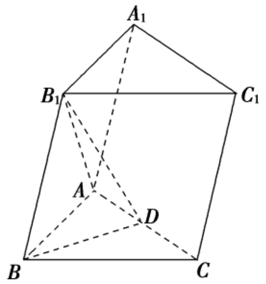


图 4

(1)求证：平面 ABB_1A_1⊥平面 ABC；

(2)求直线 B_1D 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值；

(3)求二面角 $B\text{-}B_1D\text{-}C$ 的余弦值．【导学号：67722095】

[解]　(1)证明：取 AB 中点为 O，连接 OD，OB_1.

因为 $B_1B=B_1A$，所以 $OB_1\perp AB$.

又 $AB\perp B_1D$，$OB_1\cap B_1D=B_1$，

所以 $AB\perp$平面 B_1OD，

因为 $OD\subset$平面 B_1OD，所以 $AB\perp OD$.

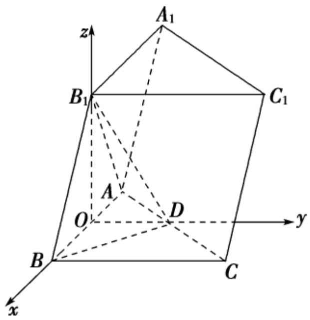
由已知，$BC\perp BB_1$，又 $OD/\!/BC$，

所以 $OD\perp BB_1$，因为 $AB\cap BB_1=B$，

所以 $OD\perp$平面 ABB_1A_1.

又 $OD\subset$平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$平面 ABB_1A_1.　　4 分

(2)由(1)知，OB，OD，OB_1 两两垂直．以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为 x 轴的方向，$|\overrightarrow{OB}|$为单位长度 1，建立如图所示的空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$.



由题设知 $B_1(0,0,\sqrt{3})$，$D(0,1,0)$，$A(-1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$C_1(0,2,\sqrt{3})$.6 分

则$\overrightarrow{B_1D}=(0,1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{CC_1}=(-1,0,\sqrt{3})$.

设平面 ACC_1A_1 的法向量为 $n=(x，y，z)$，则

$n\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$n\cdot\overrightarrow{CC_1}=0$，即 $x+y=0$，$-x+\sqrt{3}z=0$，

可取 $n=(\sqrt{3}，-\sqrt{3}，1)$，

设直线 B_1D 与平面 ACC_1A_1 所成角为 θ，

故 $\sin\theta=\frac{\sqrt{21}}{7}$.8 分

(3)由题设知 $B(1,0,0)$，

可取平面 BB_1D 的法向量 $n_1=(\sqrt{3}，\sqrt{3}，1)$，

平面 B_1DC 的法向量 $n_2=(-\sqrt{3}，\sqrt{3}，1)$，10 分

故 $\cos\langle n_1，n_2\rangle=\frac{1}{7}$，

所以二面角 $B\text{-}B_1D\text{-}C$ 的余弦值为$\frac{1}{7}$.12 分

20.(本小题满分 13 分)设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，上顶点为 A，过 A 与 AF_2 垂直的直线交 x 轴负半轴于 Q 点，且 $2\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_2Q}=0$.

(1)求椭圆 C 的离心率；

(2)若过 A，Q，F_2 三点的圆恰好与直线 $x-\sqrt{3}y-3=0$ 相切，求椭圆 C 的方程；

(3)在(2)的条件下，过右焦点 F_2 的直线交椭圆于 M，N 两点，点 $P(4,0)$，求 $\triangle PMN$ 面积的最大值.

[解]　(1)设 $Q(x_0,0)$．∵$F_2(c,0)$，$A(0，b)$，∴$\overrightarrow{F_2A}=(-c，b)$，$\overrightarrow{AQ}=(x_0，-b)$.

∵$\overrightarrow{F_2A}\perp\overrightarrow{AQ}$，∴$-cx_0-b^2=0$，故 $x_0=-\frac{b^2}{c}$.2 分

又∵$2\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_2Q}=0$，∴$F_1$ 为 F_2Q 的中点，故 $-2c=-\frac{b^2}{c}+c$，即 $b^2=3c^2=a^2-c^2$，∴$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.4 分

(2)∵$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，∴$a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，则 $F_2(c,0)$，$Q(-3c,0)$，$A(0,\sqrt{3}c)$，

∴$\triangle AQF_2$ 的外接圆圆心$(-c,0)$，半径 $r=\frac{1}{2}|F_2Q|=a=2c$，6 分

$\therefore \dfrac{|-c-3|}{2}=2c$，解得 $c=1$，$\therefore a=2$，$b=\sqrt{3}$，

椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.8 分

(3)设直线 MN：$x=my+1$，代入$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$.

设 $M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$，

$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{3m^2+3}}{3m^2+4}$，

$\therefore S_{\triangle PMN}=\dfrac{1}{2}|PF_2|\,|y_1-y_2|=\dfrac{6\sqrt{3}\sqrt{3m^2+3}}{3m^2+4}$，10 分

令$\sqrt{3m^2+3}=\lambda\geqslant\sqrt{3}$，$\therefore S_{\triangle PMN}=\dfrac{6\sqrt{3}\lambda}{\lambda^2+1}=\dfrac{6\sqrt{3}}{\lambda+\dfrac{1}{\lambda}}\leqslant\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{9}{2}$，

$\therefore$△PMN 面积的最大值为$\dfrac{9}{2}$，此时 $m=0$.13 分

21．(本小题满分 14 分)已知函数 $f(x)=ax+\dfrac{a-1}{x}-2a+1(a>0)$.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $f(x)\geqslant\ln x$ 在$[1，+\infty)$上恒成立，求实数 a 的取值范围；

(3)证明：$\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\dfrac{k-1}{k+1}>\dfrac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}}$.

[解]　(1)$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq0\}$，$f'(x)=a-\dfrac{a-1}{x^2}=\dfrac{ax^2+1-a}{x^2}(a>0)$，

当 $0<a\leqslant1$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，此时 $f(x)$在$(-\infty，0)$，$(0，+\infty)$上是增函数；

当 $a\geqslant1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}$，$x_2=\sqrt{\dfrac{a-1}{a}}$，2 分

列表如下：

x	$(-\infty，x_1)$	$(x_1,0)$	$(0，x_2)$	$(x_2，+\infty)$
$f'(x)$	+	−	−	+
$f(x)$	增	减	减	增

此时，$f(x)$的递增区间是$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{a-1}{a}}\right)$，$\left(\sqrt{\frac{a-1}{a}}, +\infty\right)$；递减区间是$\left(-\sqrt{\frac{a-1}{a}}, 0\right)$，$\left(0, \sqrt{\frac{a-1}{a}}\right)$.4 分

(2)$g(x)=ax+\frac{a-1}{x}-2a+1-\ln x$，$x\in[1, +\infty)$，

则 $g(1)=0$，$g'(x)=a-\frac{a-1}{x^2}-\frac{1}{x}=\frac{ax^2-x-(a-1)}{x^2}=\frac{a(x-1)\left(x-\frac{1-a}{a}\right)}{x^2}$，6 分

(i)当 $0<a<\frac{1}{2}$时，$\frac{1-a}{a}>1$，

若 $1<x<\frac{1-a}{a}$，则 $g'(x)<0$，$g(x)$是减函数，

$\therefore g(x)<g(1)=0$，即 $f(x)>\ln x$.

故 $f(x)\geqslant\ln x$ 在$[1, +\infty)$上不恒成立；

(ii)当 $a\geqslant\frac{1}{2}$时，$\frac{1-a}{a}\leqslant1$，

若 $x>1$，则 $g'(x)>0$，$g(x)$是增函数，

$\therefore g(x)>g(1)=0$，即 $f(x)>\ln x$.

故当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)\geqslant\ln x$.

综上所述，所求 a 的取值范围是$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.9 分

(3)证明：在(2)中，令 $a=\frac{1}{2}$，可得不等式：$\ln x\leqslant\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)(x\geqslant1)$(当且仅当 $x=1$ 时等号成立)，

进而可得当 $\ln x^2<x-\frac{1}{x}(x>1)(*)$，

$\sum\limits_{k=2}^{n}\ln\frac{k-1}{k+1}>\frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}}\Leftrightarrow\ln\frac{2}{n(n+1)}>\frac{2-n-n^2}{\sqrt{2n(n+1)}}$，12 分

令 $x=\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}>1(n>2)$，代入不等式(*)得：$\ln\frac{n(n+1)}{2}<\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{2}{n(n+1)}}=\frac{n(n+1)}{\sqrt{2n(n+1)}}-\frac{2}{\sqrt{2n(n+1)}}=\frac{n^2+n-2}{\sqrt{2n(n+1)}}$，

则所证不等式成立.14 分

高考数学五一短期冲刺课程预告

【课程目标】

高考考生考前最后一课，从高考考题、调研模拟试题本身把脉高考难点，寻求突破。

①拉分题到底拉在哪里？考前不得不知的技法以及一些杀手锏你都系统地掌握了吗？带你飞

②除了硬实力，面对选填及解答，如何提高单位时间得分率？给你想要！

【适用学员】

①高三学员（在校平均成绩 100+） ②优秀的高二学员（在校平均成绩 120+）　文理均可

【上课时间及内容】

04 月 29 日（周六）08:30-11:30 选填压轴攻克

04 月 30 日（周日）08:30-11:30 玩转圆锥曲线

05 月 01 日（周一）08:30-11:30 导数为你癫狂

课程开始后，随课附赠精心准备的高考押题卷 2 份

【班级类型】

5-15 人小班

【上课方式】

讲练结合，教师引导学生先做，然后教师讲解并凝练总结补充拓展

【费用】

1440 元/人 含三次课

【开课校区及师资】

福田百花校区：**尹会梨**老师 （特点：深谙考点 逻辑清晰 一题多解）

福田园岭校区：**常奕露**老师 （特点：授课通俗易懂 善于引导）

福田景田校区：**龚　凯**老师 （特点：气场强大，对考点把握极其精准）

南山海月校区：**李　磊**老师 （特点：娓娓道来，以小见大，高度总结）

更多试题资料请加入微信群：2017 高考数学学员交流群