2017 年高考仿真冲刺卷(三)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共 150 分，考试时间 120 分钟.

第Ⅰ卷

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 设全集 $U=\mathrm{R}$，集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{y|1\leqslant y\leqslant 3\}$，则$(\complement_U A)\cup B=$(　　)

A．$(2, 3]$　　B．$(-\infty，1]\cup(2，+\infty)$

C．$[1,2)$　　D．$(-\infty，0)\cup[1，+\infty)$

2. 已知 i 是虚数单位，若 $a+b\mathrm{i}=\dfrac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}-\dfrac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}(a，b\in\mathrm{R})$，则 $a+b$ 的值是(　　)

A．0　　B．$-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$

C．$-\dfrac{2}{5}$　　D．$\dfrac{2}{5}$

3．已知条件 p：$a<0$，条件 q：$a^2>a$，则$\neg p$ 是$\neg q$ 的(　　)

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．如图 1，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 BD_1 的中点，则△PAC 在该正方体各个面上的射影可能是(　　)

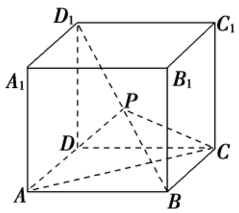
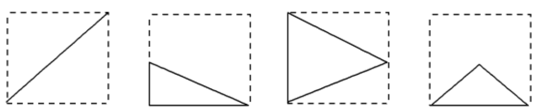


图 1



①　　②　　③　　④

A．①④　　B．②③

C．②④　　D．①②

5．双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$与椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的焦点相同，若过右焦点$F$且倾斜角为60°的直线与双曲线的右支有两个不同交点，则此双曲线实半轴长的取值范围是(　　)

A．(2,4)　　　　B．(2,4]

C．[2,4)　　　　D．(2，+∞)

6．已知实数x，y满足约束条件$\begin{cases}x\geqslant 0,\\3x+4y\geqslant 4,\\y\geqslant 0,\end{cases}$则$x^2+y^2+2x$的最小值是

(　　)

A.$\frac{2}{5}$　　　　B.$\sqrt{2}-1$

C.$\frac{24}{25}$　　　　D．1

7．已知函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，其中$0<\varphi<2\pi$，若$f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$对$x\in\mathrm{R}$恒成立，且$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(\pi)$，则$\varphi$等于(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　　　B.$\frac{5\pi}{6}$

C.$\frac{7\pi}{6}$　　　　D.$\frac{11\pi}{6}$

8．程序框图如图2所示，该程序运行后输出的S的值是（　　）

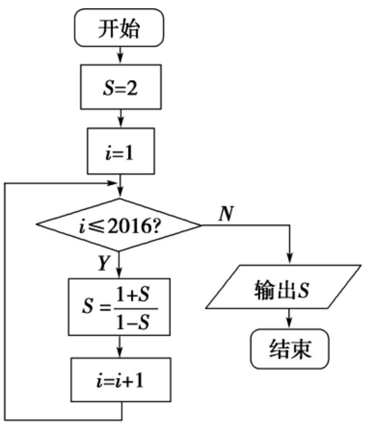


图2

A．2　　　　B．$-\frac{1}{2}$

C．-3　　D.$\frac{1}{3}$

9．一袋中有红、黄、蓝三种颜色的小球各一个，每次从中取出一个，记下颜色后放回，当球的三种颜色全部取出时停止取球，则恰好取5次球时停止取球的概率为(　　)

A.$\frac{5}{85}$　　B.$\frac{14}{81}$

C.$\frac{22}{81}$　　D.$\frac{25}{81}$

10．如图3，在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中，PA，PB，PC 两两互相垂直，且 $PA=3$，$PB=2$，$PC=2$，设 M 是底面三角形 ABC 内一动点，定义：$f(M)=(m,n,p)$，其中 m，n，p 分别表示三棱锥 $M\text{-}PAB$，$M\text{-}PBC$，$M\text{-}PAC$ 的体积，若 $f(M)=(1,x,4y)$，且 $\frac{1}{x}+\frac{a}{y}\geq 8$ 恒成立，则正实数 a 的最小值是(　　)

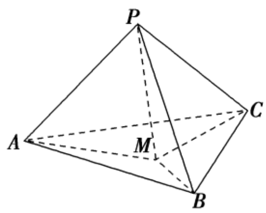


图3

A．$2-\sqrt{2}$　　B.$\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$

C.$\frac{9-4\sqrt{2}}{4}$　　D．$6-4\sqrt{2}$

第Ⅱ卷

二、填空题(本大题共5小题，每小题5分，共25分．将答案填在题中横线上)

11．函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\ln(1-\ln x)}$的定义域为________．

12.$\left(\frac{2}{x}+x\right)(1-\sqrt{x})^6$ 的展开式中 x 的系数是________．

13．已知等比数列$\{a_n\}$为递增数列，$a_1=-2$，且 $3(a_n+a_{n+2})=10a_{n+1}$，则公比 $q=$________．

14．如图 4，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 AB 的中点，P 为以 A 为圆心，AB 为半径的圆弧上的任意一点，设向量$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{DE}+\mu\overrightarrow{AP}$，则 $\lambda+\mu$ 的最小值为________.

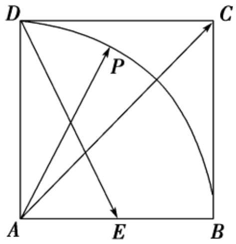


图 4

15．(2016 **衡阳二模**)已知$\left(x^2-\dfrac{1}{\sqrt{5x^3}}\right)^5$ 的展开式中的常数项为 T，$f(x)$是以 T 为周期的偶函数，且当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=x$，若在区间$[-1,3]$内，函数 $g(x)=f(x)-kx-2k$ 有 4 个零点，则实数 k 的取值范围是________.

三、解答题(本大题共 6 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

16．(本小题满分 12 分)在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边为 a，b，c，已知 $\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

(1)求 $\cos C$ 的值；

(2)若△ABC 的面积为$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$，且 $\sin^2A+\sin^2B=\dfrac{13}{16}\sin^2C$，求 a，b 及 c 的值.

17.(本小题满分 12 分)某媒体对“男女延迟退休”这一公众关注的问题进行了民意调查，下表是在某单位得到的数据(人数)：

(1)能否有 90%以上的把握认为对这一问题的看法与性别有关？

	赞同	反对	总计
男	5	6	11
女	11	3	14
总计	16	9	25

(2)进一步调查：

①从赞同“男女延迟退休”的 16 人中选出 3 人进行陈述发言，求事件“男士和女士各至少有 1 人发言”的概率；

②从反对“男女延迟退休”的 9 人中选出 3 人进行座谈，设参加调查的女士人数为 X，求 X 的分布列和数学期望.

附：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

18．(本小题满分 12 分)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足：$2S_n+a_n=1$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=\dfrac{2a_{n+1}}{(1+a_n)(1+a_{n+1})}$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n<\dfrac{1}{4}$.

19．(本小题满分 12 分)在如图 5 所示的多面体中，$EF\perp$平面 AEB，$AE\perp EB$，$AD/\!/EF$，$EF/\!/BC$，$BC=2AD=4$，$EF=3$，$AE=BE=2$，G 是 BC 的中点.

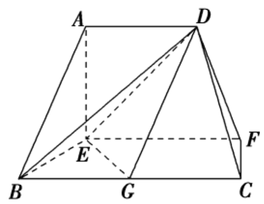


图 5

(1)求证：$BD\perp EG$；

(2)求平面 DEG 与平面 DEF 所成锐二面角的余弦值.

20．(本小题满分 13 分) (2016 **河南八校联考**)已知椭圆 C 的中心在原点，焦点在 x 轴上，离心率等于$\frac{1}{2}$，它的一个顶点恰好是抛物线 $x^2=8\sqrt{3}y$ 的焦点．

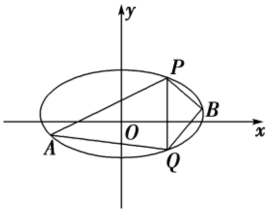


图 6

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)点 $P(2,3)$，$Q(2，-3)$在椭圆上，A，B 是椭圆上位于直线 PQ 两侧的动点，

①若直线 AB 的斜率为$\frac{1}{2}$，求四边形 $APBQ$ 面积的最大值；

②当 A，B 运动时，满足$\angle APQ=\angle BPQ$，试问直线 AB 的斜率是否为定值，请说明理由．

21．(本小题满分 14 分)已知函数 $f(x)=\ln ax-\frac{x-a}{x}(a\neq 0)$．

(1)求此函数的单调区间及最值；

(2)求证：对于任意正整数 n，均有 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geq\ln\frac{e^n}{n!}$(e 为自然对数的底数)．

2017年高考仿真冲刺卷(三)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共150分，考试时间120分钟．

第Ⅰ卷

一、选择题(本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1．设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{y|1\leqslant y\leqslant 3\}$，则 $(\complement_U A)\cup B=($　　$)$

A．$(2,3]$　　　　B．$(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$

C．$[1,2)$　　　　D．$(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

D　[因为 $\complement_U A=\{x|x>2$ 或 $x<0\}$，$B=\{y|1\leqslant y\leqslant 3\}$，所以 $(\complement_U A)\cup B=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$．]

2．已知 i 是虚数单位，若 $a+b\mathrm{i}=\dfrac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}-\dfrac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $a+b$ 的值是(　　)

A．0　　　　B．$-\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$

C．$-\dfrac{2}{5}$　　　　D．$\dfrac{2}{5}$

D　[因为 $a+b\mathrm{i}=\dfrac{\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}-\dfrac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}+1-2\mathrm{i}+1}{4+1}=\dfrac{2}{5}$，所以 $a=\dfrac{2}{5}$，$b=0$，$a+b=\dfrac{2}{5}$.]

3．已知条件 p：$a<0$，条件 q：$a^2>a$，则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的(　　)

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

B　[因为綈 p：$a\geqslant 0$，綈 q：$0\leqslant a\leqslant 1$，所以綈 p 是綈 q 的必要不充分条件．]

4．如图1，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为 BD_1 的中点，则△PAC 在该正方体各个面上的射影可能是(　　)

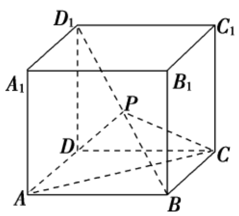
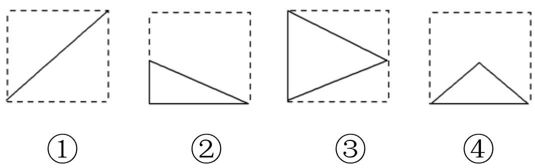


图 1



A．①④　　B．②③

C．②④　　D．①②

A　[由所给的正方体知，

△PAC 在该正方体上下面上的射影是①，△PAC 在该正方体左右面上的射影是④，

△PAC 在该正方体前后面上的射影是④，故①④符合题意．]

5．双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$与椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的焦点相同，若过右焦点$F$且倾斜角为60°的直线与双曲线的右支有两个不同交点，则此双曲线实半轴长的取值范围是(　　)

A．(2,4)　　B．(2,4]

C．[2,4)　　D．(2，+∞)

A　[椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的半焦距$c=4$.

要使直线与双曲线有两个交点，需使双曲线的其中一渐近线方程的斜率小于直线的斜率，即$\frac{b}{a}<\tan 60°=\sqrt{3}$，即$b<\sqrt{3}a$，$\therefore c^2-a^2<3a^2$，整理得$c<2a$，$\therefore a>2$.

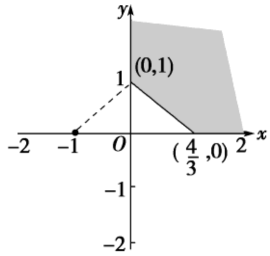
又$a<c=4$，则此双曲线实半轴长的取值范围是(2,4)．]

6．已知实数x，y满足约束条件$\begin{cases}x\geqslant 0,\\3x+4y\geqslant 4,\\y\geqslant 0,\end{cases}$则$x^2+y^2+2x$的最小值是(　　)

A.$\frac{2}{5}$　　B.$\sqrt{2}-1$

C.$\frac{24}{25}$　　D．1

D [满足约束条件$\begin{cases}x\geqslant 0,\\3x+4y\geqslant 4,\\y\geqslant 0\end{cases}$的平面区域如图中阴影部分所示．∵$x^2+y^2+2x=(x+1)^2+y^2-1$表示$(-1,0)$点到可行域内任一点距离的平方再减1，



由图可知当$x=0$，$y=1$时，x^2+y^2+2x取最小值1.]

7．已知函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，其中$0<\varphi<2\pi$，若$f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$对$x\in\mathbf{R}$恒成立，且$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(\pi)$，则$\varphi$等于(　　)

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{5\pi}{6}$

C.$\frac{7\pi}{6}$　　D.$\frac{11\pi}{6}$

C [若$f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$对$x\in\mathbf{R}$恒成立，则$f\left(\frac{\pi}{6}\right)$等于函数的最大值或最小值，

即$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

则$\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.又$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(\pi)$，即$\sin\varphi<0,0<\varphi<2\pi$，

当$k=1$时，此时$\varphi=\frac{7\pi}{6}$，满足条件．]

8．程序框图如图2所示，该程序运行后输出的S的值是(　　)

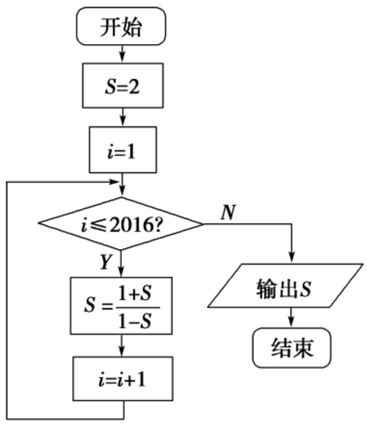


图 2

A．2　　　　B．$-\frac{1}{2}$

C．-3　　　　D.$\frac{1}{3}$

A　[由程序框图知：$S=2$，$i=1$；$S=\frac{1+2}{1-2}=-3$，$i=2$；$S=\frac{1-3}{1+3}=-\frac{1}{2}$，$i=3$；$S=\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}$，$i=4$；$S=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$，$i=5$；……，可知 S 值周期性出现，周期为 4，

当 $i=2\,017=4\times504+1$ 时，结束循环输出 S，即输出的 $S=2$.]

9．一袋中有红、黄、蓝三种颜色的小球各一个，每次从中取出一个，记下颜色后放回，当球的三种颜色全部取出时停止取球，则恰好取 5 次球时停止取球的概率为(　　)

A.$\frac{5}{85}$　　　　B.$\frac{14}{81}$

C.$\frac{22}{81}$　　　　D.$\frac{25}{81}$

B　[分两种情况 3,1,1 及 2,2,1，这两种情况是互斥的，下面计算每一种情况的概率，当取球的个数是 3,1,1 时，试验发生包含的事件是 3^5，满足条件的事件数是 $C_3^1C_4^3C_2^1$，所以这种结果发生的概率是$\frac{C_3^1C_4^3C_2^1}{3^5}=\frac{8}{81}$，同理求得第二种结果的概率是$\frac{6}{81}$，根据互斥事件的概率公式得到 $P=\frac{8}{81}+\frac{6}{81}=\frac{14}{81}$.]

10．如图 3，在三棱锥 P-ABC 中，PA，PB，PC 两两互相垂直，且 $PA=3$，$PB=2$，$PC=2$，设 M 是底面三角形 ABC 内一动点，定义：$f(M)=(m，n，p)$，其中 m，n，p 分别表示三棱锥 M-PAB，M-PBC，M-PAC 的体积，若 $f(M)=(1，x,4y)$，且$\frac{1}{x}+\frac{a}{y}\geqslant8$ 恒成立，则正实数 a 的最小值是(　　)

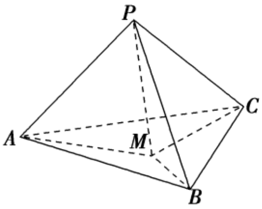


图 3

A．$2-\sqrt{2}$　　　　B.$\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}$

C.$\dfrac{9-4\sqrt{2}}{4}$　　　　D．$6-4\sqrt{2}$

C　[∵PA，PB，PC 两两垂直，且 $PA=3$，$PB=2$，$PC=2$，

∴$V_{P-ABC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3\times2\times2=2=1+x+4y$，即 $x+4y=1$.

∵$\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{y}\geqslant8$ 恒成立，∴$\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{y}=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{a}{y}\right)(x+4y)=1+\dfrac{ax}{y}+\dfrac{4y}{x}+4a\geqslant1+4a+4\sqrt{a}$ $\geqslant8$，

解得 $a\geqslant\dfrac{9-4\sqrt{2}}{4}$，∴正实数 a 的最小值为$\dfrac{9-4\sqrt{2}}{4}$.]

第 II 卷

二、填空题(本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．将答案填在题中横线上)

11．函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln(1-\ln x)}$的定义域为________.

$(1，e)$　[由题意知$\begin{cases}x-1\geqslant0,\\1-\ln x>0,\\x>0,\\1-\ln x\neq1,\end{cases}$　解得 $1<x<e$.]

12.$\left(\dfrac{2}{x}+x\right)(1-\sqrt{x})^6$ 的展开式中 x 的系数是________.

31　[$(1-\sqrt{x})^6$ 的展开式中的第 r 项 $T_{r+1}=C_6^r\,1^{6-r}(-\sqrt{x})^r=(-1)^r C_6^r\,x^{\frac{r}{2}}$，若求 x 的系数，只需要找到$(1-\sqrt{x})^6$ 展开式中的 x^2 的系数和常数项分别去乘$\dfrac{2}{x}+x$中$\dfrac{2}{x}$的系数和 x 的系数即可．令 $r=4$ 得 x^2 的系数是 15，令 $r=0$ 得常数项为 1，

所以 x 的系数为 $2\times15+1=31$.]

13．已知等比数列$\{a_n\}$为递增数列，$a_1=-2$，且 $3(a_n+a_{n+2})=10a_{n+1}$，则公比 $q=$________.

$\frac{1}{3}$ [因为等比数列$\{a_n\}$为递增数列且 $a_1=-2<0$，所以公比 $0<q<1$.又因为 $3(a_n+a_{n+2})=10a_{n+1}$，两边同除以 a_n 可得 $3(1+q^2)=10q$，即 $3q^2-10q+3=0$，解得 $q=3$ 或 $q=\frac{1}{3}$，而 $0<q<1$，所以 $q=\frac{1}{3}$.]

14．如图 4，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 AB 的中点，P 为以 A 为圆心，AB 为半径的圆弧上的任意一点，设向量$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{DE}+\mu\overrightarrow{AP}$，则 $\lambda+\mu$ 的最小值为________.

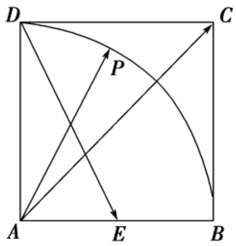


图 4

$\frac{1}{2}$ [以 A 为原点，以 AB 所在直线为 x 轴，建立平面直角坐标系.

设正方形 $ABCD$ 的边长为 1，

则 $E\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，$C(1,1)$，$D(0,1)$，$A(0,0)$，

$\therefore\overrightarrow{AC}=(1,1)$，$\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.

设 $P(\cos\theta, \sin\theta)$，由向量 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{DE}+\mu\overrightarrow{AP}$，

得$(1,1)=\lambda\left(\frac{1}{2}, -1\right)+\mu(\cos\theta, \sin\theta)=\left(\frac{1}{2}\lambda+\mu\cos\theta, -\lambda+\mu\sin\theta\right)$，

$$\therefore\begin{cases}\frac{1}{2}\lambda+\mu\cos\theta=1,\\-\lambda+\mu\sin\theta=1,\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}\lambda=\dfrac{2\sin\theta-2\cos\theta}{2\cos\theta+\sin\theta},\\\mu=\dfrac{3}{2\cos\theta+\sin\theta},\end{cases}$$

$$\therefore\lambda+\mu=\frac{3+2\sin\theta-2\cos\theta}{2\cos\theta+\sin\theta}=-1+\frac{3\sin\theta+3}{2\cos\theta+\sin\theta}.$$

令 $f(\theta)=-1+\dfrac{3\sin\theta+3}{2\cos\theta+\sin\theta}$，则 $f'(\theta)=\dfrac{6+6\sin\theta-3\cos\theta}{(2\cos\theta+\sin\theta)^2}>0$，

$\therefore y=f(\theta)$为增函数，由 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，得当 $\theta=0$ 时，$\lambda+\mu$ 取最小值为$\dfrac{1}{2}$.]

15．(2016 **衡阳二模**)已知$\left(x^2-\dfrac{1}{\sqrt{5x^3}}\right)^5$的展开式中的常数项为 T，$f(x)$是以 T 为周期的偶函数，且当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=x$，若在区间$[-1,3]$内，函数 $g(x)=f(x)-kx-2k$ 有 4 个零点，则实数 k 的取值范围是________.

$\left(0,\dfrac{1}{5}\right]$ [$\left(x^2-\dfrac{1}{\sqrt{5x^3}}\right)^5$的通项 $T_{r+1}=C_5^r(x^2)^{5-r}$

$(-5^{-\frac{1}{2}}x^{-3})^r=(-1)^r5^{-\frac{r}{2}}C_5^rx^{10-5r}$.

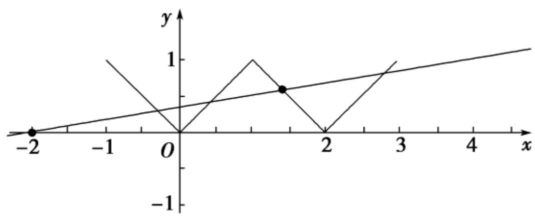
令 $10-5r=0$，得 $r=2$，则常数项为 $C_5^2\times\dfrac{1}{5}=2$，

$f(x)$是以 2 为周期的偶函数.

因为区间$[-1,3]$是两个周期，

所以在区间$[-1,3]$内函数 $g(x)=f(x)-kx-2k$ 有 4 个零点，

可转化为 $f(x)$与 $r(x)=kx+2k$ 有四个交点，



当 $k=0$ 时，两函数图象只有两个交点，不合题意；

当 $k\neq0$ 时，因为函数 $r(x)$的图象恒过点$(-2,0)$，

则若使两函数图象有四个交点，

必有 $0<r(3)\leqslant1$，解得 $0<k\leqslant\dfrac{1}{5}$.]

三、解答题(本大题共 6 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤)

16．(本小题满分 12 分)在$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边为 a，b，c，已知 $\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

(1)求 $\cos C$ 的值；

(2)若$\triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{15}}{4}$，且$\sin^2A+\sin^2B=\frac{13}{16}\sin^2C$，求$a$，$b$及$c$的值.

[解]　(1) 因为$\sin\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，所以$\cos C=1-2\sin^2\frac{C}{2}=-\frac{1}{4}$.4 分

(2) 因为$\sin^2A+\sin^2B=\frac{13}{16}\sin^2C$，由正弦定理得

$a^2+b^2=\frac{13}{16}c^2$.①6 分

由余弦定理得$a^2+b^2=c^2+2ab\cos C$，将$\cos C=-\frac{1}{4}$代入，得$ab=\frac{3}{8}c^2$，②8 分

由$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$及$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，得$ab=6$.　　③10 分

由①②③得$\begin{cases}a=2,\\b=3,\\c=4\end{cases}$　或$\begin{cases}a=3,\\b=2,\\c=4.\end{cases}$

经检验，满足题意.

所以$\begin{cases}a=2,\\b=3,\\c=4\end{cases}$　或$\begin{cases}a=3,\\b=2,\\c=4.\end{cases}$　12 分

17.(本小题满分 12 分)某媒体对“男女延迟退休”这一公众关注的问题进行了民意调查，下表是在某单位得到的数据(人数)：

(1)能否有 90%以上的把握认为对这一问题的看法与性别有关？

	赞同	反对	总计
男	5	6	11
女	11	3	14
总计	16	9	25

(2)进一步调查：

①从赞同“男女延迟退休”的 16 人中选出 3 人进行陈述发言，求事件“男士和女士各至少有 1 人发言”的概率；

②从反对“男女延迟退休”的 9 人中选出 3 人进行座谈，设参加调查的女士人数为X，求X的分布列和数学期望.

附：

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

[解]　(1)$K^2=\dfrac{25\times(5\times3-6\times11)^2}{16\times9\times11\times14}\approx2.932>2.706$.2 分

由此可知，有 90%以上的把握认为对这一问题的看法与性别有关.4 分

(2)①记题设事件为 A，则所求概率为 $P(A)=\dfrac{C_5^1C_{11}^2+C_5^2C_{11}^1}{C_{16}^3}=\dfrac{11}{16}$.6 分

②根据题意，X 服从超几何分布，$P(X=k)=\dfrac{C_3^kC_6^{3-k}}{C_9^3}$，$k=0,1,2,3$.8 分

X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{5}{21}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{3}{14}$	$\dfrac{1}{84}$

10 分

X 的数学期望为 $E(X)=0\times\dfrac{5}{21}+1\times\dfrac{15}{28}+2\times\dfrac{3}{14}+3\times\dfrac{1}{84}=1$.12 分

18．(本小题满分 12 分)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足：$2S_n+a_n=1$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=\dfrac{2a_{n+1}}{(1+a_n)(1+a_{n+1})}$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，求证：$T_n<\dfrac{1}{4}$.

[解]　(1)因为 $2S_n+a_n=1$，所以 $2S_{n+1}+a_{n+1}=1$，

两式相减可得 $2a_{n+1}+a_{n+1}-a_n=0$，即 $3a_{n+1}=a_n$，即$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{3}$.3 分

又 $2S_1+a_1=1$，所以 $a_1=\dfrac{1}{3}$，

所以数列$\{a_n\}$是首项为$\dfrac{1}{3}$，公比为$\dfrac{1}{3}$的等比数列.

故 $a_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$，数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.6 分

(2)证明：因为 $b_n=\dfrac{2a_{n+1}}{(1+a_n)(1+a_{n+1})}$，

所以 $b_n=\dfrac{2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}=\dfrac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{3^n+1}{3^n}\cdot\frac{3^{n+1}+1}{3^{n+1}}}=\dfrac{2\cdot 3^n}{(3^n+1)(3^{n+1}+1)}=\dfrac{1}{3^n+1}-\dfrac{1}{3^{n+1}+1}$.10 分

故 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\left(\frac{1}{3^1+1}-\frac{1}{3^2+1}\right)+\left(\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{3^3+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3^n+1}-\frac{1}{3^{n+1}+1}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3^{n+1}+1}<\frac{1}{4}$.

所以 $T_n<\frac{1}{4}$.12 分

19．(本小题满分 12 分)在如图 5 所示的多面体中，$EF\perp$平面 AEB，$AE\perp EB$，$AD/\!/EF$，$EF/\!/BC$，$BC=2AD=4$，$EF=3$，$AE=BE=2$，G 是 BC 的中点．

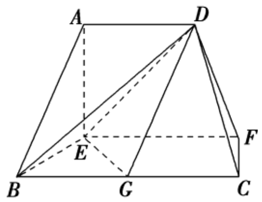


图 5

(1)求证：$BD\perp EG$；

(2)求平面 DEG 与平面 DEF 所成锐二面角的余弦值．

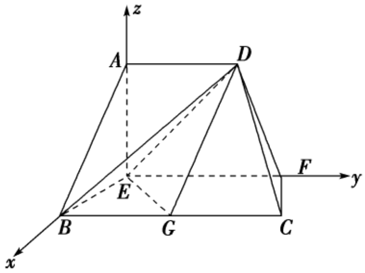
[解]　(1)证明：∵$EF\perp$平面 AEB，$AE\subset$平面 AEB，$BE\subset$平面 AEB，

∴$EF\perp AE$，$EF\perp BE$.又 $AE\perp BE$，

∴BE，EF，AE 两两垂直，2 分

以点 E 为坐标原点，EB，EF，EA 分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，由已知得

$A(0,0,2)$，$B(2,0,0)$，$C(2,4,0)$，$F(0,3,0)$，$D(0,2,2)$，$G(2,2,0)$.4 分



$\therefore \overrightarrow{EG}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,2,2)$，

$\therefore \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EG}=-2\times2+2\times2=0$，$\therefore BD\perp EG$.6 分

(2)由已知得$\overrightarrow{EB}=(2,0,0)$是平面 DEF 的法向量.

设平面 DEG 的法向量为 $n=(x，y，z)$.

$\because \overrightarrow{ED}=(0,2,2)$，$\overrightarrow{EG}=(2,2,0)$，

$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{EG}\cdot n=0,\\ \overrightarrow{ED}\cdot n=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}y+z=0,\\ x+y=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得 $n=(1，-1,1)$.8 分

设平面 DEG 与平面 DEF 所成锐二面角的大小为 θ，

则 $\cos\theta=\left|\cos\langle n，\overrightarrow{EB}\rangle\right|=\dfrac{|n\cdot\overrightarrow{EB}|}{|n|\,|\overrightarrow{EB}|}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，10 分

$\therefore$平面 DEG 与平面 DEF 所成锐二面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.12 分

20．(本小题满分 13 分) (2016 **河南八校联考**)已知椭圆 C 的中心在原点，焦点在 x 轴上，离心率等于$\dfrac{1}{2}$，它的一个顶点恰好是抛物线 $x^2=8\sqrt{3}y$ 的焦点.

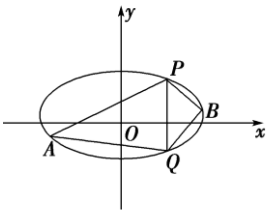


图 6

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)点 $P(2,3)$，$Q(2，-3)$在椭圆上，A，B 是椭圆上位于直线 PQ 两侧的动点，

①若直线 AB 的斜率为$\dfrac{1}{2}$，求四边形 $APBQ$ 面积的最大值；

②当 A，B 运动时，满足$\angle APQ=\angle BPQ$，试问直线 AB 的斜率是否为定值，请说明理由.

[解]　(1)设椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则由题意可知 $b=2\sqrt{3}$.2 分

由$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，$a^2=c^2+b^2$，得 $a=4$.

∴椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.4 分

(2)①设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，直线 AB 的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+t$，5 分

代入$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$，得 $x^2+tx+t^2-12=0$.6 分

由 $\varDelta>0$，解得$-4<t<4$.

由韦达定理得 $x_1+x_2=-t$，$x_1x_2=t^2-12$.

四边形 $APBQ$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times 6\times|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=3\sqrt{48-3t^2}$，

∴当 $t=0$，$S_{max}=12\sqrt{3}$.8 分

②由$\angle APQ=\angle BPQ$，可知 PA，PB 的斜率之和为 0，

设直线 PA 的斜率为 k，则 PB 的斜率为$-k$，PA 的直线方程为 $y-3=k(x-2)$.

由$\begin{cases} y-3=k(x-2), \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1, \end{cases}$ 整理得$(3+4k^2)x^2+8(3-2k)kx+4(3-2k)^2-48=0$.

∴$x_1+2=\dfrac{8(2k-3)k}{3+4k^2}$.9 分

同理，PB 的直线方程为 $y-3=-k(x-2)$，可得 $x_2+2=\dfrac{-8k(-2k-3)}{3+4k^2}=\dfrac{8k(2k+3)}{3+4k^2}$.

∴$x_1+x_2=\dfrac{16k^2-12}{3+4k^2}$，$x_1-x_2=\dfrac{-48k}{3+4k^2}$.10 分

$k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{k(x_1-2)+3+k(x_2-2)-3}{x_1-x_2}$

$=\dfrac{k(x_1+x_2)-4k}{x_1-x_2}=\dfrac{1}{2}$.

所以 AB 的斜率为定值$\dfrac{1}{2}$.13 分

21．(本小题满分 14 分)已知函数 $f(x)=\ln ax-\dfrac{x-a}{x}(a\neq 0)$.

(1)求此函数的单调区间及最值；

(2)求证：对于任意正整数 n，均有 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant\ln\frac{e^n}{n!}$(e 为自然对数的底数).

[解]　(1)由题意 $f'(x)=\frac{x-a}{x^2}$.2 分

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，

此时函数在$(0，a)$上是减函数，在$(a，+\infty)$上是增函数，

$f(x)_{\min}=f(a)=\ln a^2$，无最大值.4 分

当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$的定义域为$(-\infty，0)$，

此时函数在$(-\infty，a)$上是减函数，在$(a,0)$上是增函数，

$f(x)_{\min}=f(a)=\ln a^2$，无最大值. 6 分

(2)证明：取 $a=1$，由(1)知 $f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x}\geqslant f(1)=0$，

故$\frac{1}{x}\geqslant 1-\ln x=\ln\frac{e}{x}$，10 分

取 $x=1,2,3，\cdots，n$，则 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\geqslant\ln\frac{e^n}{n!}$.14 分

高考数学五一短期冲刺课程预告

【课程目标】

高考考生考前最后一课，从高考考题、调研模拟试题本身把脉高考难点，寻求突破。

①拉分题到底拉在哪里？考前不得不知的技法以及一些杀手锏你都系统地掌握了吗？带你飞

②除了硬实力，面对选填及解答，如何提高单位时间得分率？给你想要！

【适用学员】

①高三学员（在校平均成绩 100+）②优秀的高二学员（在校平均成绩 120+）　文理均可

【上课时间及内容】

04 月 29 日（周六）08:30-11:30 选填压轴攻克

04 月 30 日（周日）08:30-11:30 玩转圆锥曲线

05 月 01 日（周一）08:30-11:30 导数为你癫狂

课程开始后，随课附赠精心准备的高考押题卷 2 份

【班级类型】

5-15 人小班

【上课方式】

讲练结合，教师引导学生先做，然后教师讲解并凝练总结补充拓展

【费用】

1440 元/人 含三次课

【开课校区及师资】

福田百花校区：**尹会梨**老师 （特点：深谙考点 逻辑清晰 一题多解）

福田园岭校区：**常奕露**老师 （特点：授课通俗易懂 善于引导）

福田景田校区：**龚 凯**老师 （特点：气场强大，对考点把握极其精准）

南山海月校区：**李 磊**老师 （特点：娓娓道来，以小见大，高度总结）

更多试题资料请加入微信群：2017 高考数学学员交流群