

高三教学质量检测

数学(理)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 共 150 分. 考试时间 120 分钟.

第 I 卷(选择题, 共 60 分)

参考公式:

如果事件 A、B 互斥, 那么 $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

如果事件 A、B 相互独立, 那么 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P, 那么 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率 $P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$.

球的体积公式 $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, 其中 R 表示球的半径.

标准正态分布参考数据: $\Phi(0.05)=0.52$, $\Phi(0.9)=0.82$, $\Phi(1)=0.84$, $\Phi(1.1)=0.86$,
 $\Phi(1.2)=0.88$

一、选择题: 本大题共 12 小题; 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 若条件 $p: |x+1| \leq 4$, 条件 $q: x^2 < 5x-6$, 则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

2. 直线 l 的方向向量为 $(-1, 2)$, 直线 l 的倾斜角为 α , 则 $\tan 2\alpha =$ ()

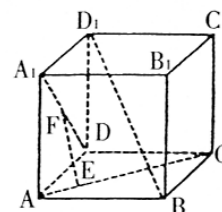
- A. $\frac{4}{3}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $-\frac{3}{4}$

3. 若 $z \in \mathbb{C}$, 且满足 $\bar{z} \cdot (1+i) = -2+3i$, 则 $z =$ ()

- A. $\frac{1}{2}(-5+5i)$ B. $\frac{1}{2}(-5-5i)$ C. $\frac{1}{2}(1+5i)$ D. $\frac{1}{2}(1-5i)$

4. 如图所示, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, EF 是异面直线 AC 和 A_1D 的公垂线, 则 EF 和 BD_1 的关系是 ()

- A. 相交但不垂直 B. 垂直相交
 C. 异面 D. 平行



5. 函数 $f(x) = \log_a x (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$, 若 $f(x_1 x_2 \cdots x_{2004}) = 16$,

则 $f(x_1^2) + f(x_2^2) + \cdots + f(x_{2004}^2)$ 的值等于 ()

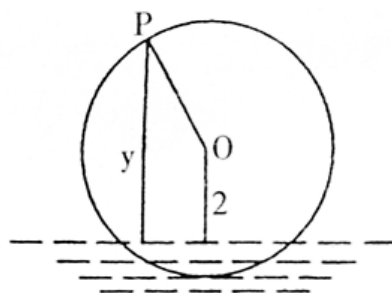
- A. $2 \log_a 16$ B. 32 C. 16 D. 8

6. 在某市 2003 年 12 月份的高三期末考试中, 理科学生的数学成绩服从正态分布 $N(88, 400)$. 已知参加本次考试的全市理科学生约 9500 人, 某学生在这次考试中的数学成绩

- 是 108 分，那么他的数学成绩大约排在全市前多少名左右？ ()
- A. 1500 B. 1700 C. 4500 D. 8000
7. 正四面体的四个顶点都在一个球面上，且正四面体的高为 4，则球的表面积为 ()
- A. $16(12-6\sqrt{3})\pi$ B. 18π C. 36π D. $64(6-4\sqrt{2})\pi$

8. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + a^2 & (x \leq 1) \\ \frac{15a}{3x+1} & (x > 1) \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续，则实数 $a=$ ()
- A. 4 B. $-\frac{1}{4}$ C. 4 或 $-\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{4}$ 或 -4

9. 如图为一半径为 3 米的水轮，水轮圆心 O 距离水面 2 米，已知水轮每分钟旋转 4 圈，水轮上的点 P 到水面的距离 y (米) 与时间 x (秒)，满足函数关系



$y = A \sin(\omega x + \varphi) + 2$ ，则有 ()

- A. $\omega = \frac{15}{2\pi}, A = 3$ B. $\omega = \frac{2\pi}{15}, A = 3$
- C. $\omega = \frac{2\pi}{15}, A = 5$ D. $\omega = \frac{15}{2\pi}, A = 5$
10. 过圆 $x^2 + y^2 - 10x = 0$ 内一点 $P(5, 3)$ 的 k 条弦的长度组成等差数列，且最小弦长为
- 数列的首项 a_1 ，最大弦长为数列的末项 a_k ，若公差 $d \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$ ，则 k 的取值不可能是 ()

- A. 5 B. 9 C. 13 D. 17
11. 由等式

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = (x+1)^4 + b_1(x+1)^3 + b_2(x+1)^2 + b_3(x+1) + b_4,$$

定义映射 $f: (a_1, a_2, a_3, a_4) \rightarrow (b_1, b_2, b_3, b_4)$ ，则 $f(4, 3, 2, 1)$ 等于 ()

- A. (1, 2, 3, 4) B. (0, 3, 4, 0)
- C. (0, -3, 4, -1) D. (-1, 0, 2, -2)
12. 在 \mathbb{R} 上可导的函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + 2bx + c$ ，当 $x \in (0, 1)$ 时，取得极大值，当 $x \in (1, 2)$ 时，取极小值，则 $\frac{b-2}{a-1}$ 的取值范围是 ()
- A. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ B. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ C. $(\frac{1}{4}, 1)$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$

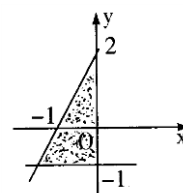
第 II 卷（非选择题 共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分。把答案填写在题中横线上。

13. 表示右图中阴影部分的二元一次不等式组为_____.

14. 已知 $(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3+\cdots+(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$, 则

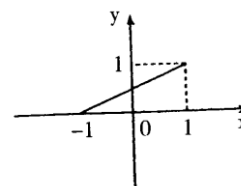
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n}{2a_2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$



15. 函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $x \in [-1, 1]$, 图象如图所示,

其反函数为 $y = f^{-1}(x)$. 则不等式 $[f(x) - \frac{1}{2}][f^{-1}(x) - \frac{1}{2}] > 0$

的解集为_____.



16. 一同学在电脑中打出如下若干个圆（图中●表示实圆，○表示空心圆）：●○●●○●●●○●●●●○●●●●○●●●●○●●●●○●●●●○●●●●○●●●●○……若将此若干个圆依次

次规律继续下去得到一系列圆，那么在前 2004 个圆中有_____个空心圆.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程及演算步骤。

17. （本小题满分 12 分）

设向量 $\vec{a} = (\cos \alpha, \cos \beta)$, $\vec{b} = (\cos \theta, \cos \varphi)$, $\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b} (t \in \mathbb{R})$. 其中 α 、 β 、 θ 、 φ 为

锐角，且 $\alpha + \beta = \theta + \varphi = 2(\alpha + \varphi) = \frac{\pi}{2}$.

（I）求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$;

（II）当 t 为何值时， \vec{c} 的模最小？最小值是多少？

18. (本小题满分 12 分)

某车间在三天内, 每天生产 10 件某产品, 其中第一天, 第二天分别生产出了 1 件、2 件次品, 而质检部每天要从生产的 10 件产品中随意抽取 4 件进行检查, 若发现有次品, 则当天的产品不能通过.

(I) 求第一天通过检查的概率;

(II) 求前两天全部通过检查的概率;

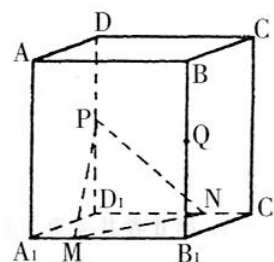
(III) 若厂内对车间生产的产品采用记分制: 两天全不通过检查得 0 分, 通过 1 天、2 天分别得 1 分、2 分. 求该车间在这两天内得分的数学期望.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 4, $AA_1=6$, Q 为 BB_1 的中点,

$P \in DD_1, M \in A_1B_1, N \in C_1D_1, A_1M=1, D_1N=3$.

- (1) 当 P 为 DD_1 的中点时, 求二面角 $M-PN-D_1$ 大小;
- (2) 在 DD_1 上是否存在点 P , 使 $QD_1 \perp$ 面 PMN ? 若存在, 求出点 P 的位置; 若不存在, 请说明理由;
- (3) 若 P 为 DD_1 中点, 求三棱锥 $Q-PMN$ 的体积.



20. (本小题满分 12 分)

64 个正数排成 8 行 8 列, 如下所示

$$\begin{array}{cccc}
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{18} \\
 a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{28} \\
 & \cdots & & \cdots \\
 a_{81} & a_{82} & \cdots & a_{88}
 \end{array}$$

在符号 a_{ij} ($1 \leq i \leq 8, 1 \leq j \leq 8$) 中, i 表示该数所在的行数, j 表示该数所在的列数. 已知每一行中的数依次都成等差数列, 而每一列中的数依次都成等比数列 (每列公比 q 都相等), 且 $a_{11} = \frac{1}{2}, a_{24} = 1, a_{32} = \frac{1}{4}$.

(I) 若 $a_{21} = \frac{1}{4}$, 求 a_{12} 和 a_{13} 的值;

(II) 求 a_{ij} 的通项公式 (注: 用 i, j 表示);

(III) 记第 n 行各项之和为 A_n ($1 \leq n \leq 8$). 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足

$$a_n = \frac{36}{A_n}, mb_{n+1} = 2(a_n + mb_n) \text{ (m 为非零常数)}, c_n = \frac{b_n}{a_n}, \text{ 且 } c_1^2 + c_7^2 \leq 100,$$

求 $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_7$ 的最大值与最小值.

21. (本小题满分 12 分)

已知在平面直角坐标系 xoy 中, 向量 $\vec{j} = (0, 1)$, $\triangle OFP$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 且 $\vec{OF} \cdot \vec{FP} = t$,

$$\vec{OM} = \frac{\sqrt{3}}{3} \vec{OP} + \vec{j}.$$

(I) 设 $4 < t < 4\sqrt{3}$, 求向量 \vec{OF} 与 \vec{FP} 的夹角 θ 的取值范围;

(II) 设以原点 O 为中心, 对称轴在坐标轴上, 以 F 为右焦点的椭圆经过点 M , 且 $|\vec{OF}| = c, t = (\sqrt{3} - 1)c^2$, 当 $|\vec{OP}|$ 取最小值时, 求椭圆的方程.

22. (本小题满分 14 分)

设 $f(x)=e^{1+x}$, $e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底.

(I) 证明: 当 $0 < k \leq e$ 时, $f(x) > kx - 1$ 总成立;

(II) 若 $f(x) > kx$ 总成立, 求 k 的取值范围.

高三教学质量检测

数学试题（理）参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

AADDB ACCBD CC

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

$$13. \begin{cases} y \geq -1 \\ x \leq 0 \\ 2x - y + 2 \geq 0 \end{cases} \quad 14. 3 \quad 15. \left(-\frac{3}{4}, 1\right] \quad 16. 61$$

三、解答题（本大题共 6 小题，满分 74 分）

17. 解：（I） $\because \alpha + \beta = \theta + \varphi = 2(\alpha + \varphi) = \frac{\pi}{2}, \therefore \cos \theta = \sin \varphi, \cos \beta = \sin \alpha. \dots\dots 2$ 分

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \alpha \cos \theta + \cos \beta \cos \varphi = \cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi = \sin(\alpha + \varphi) \dots\dots 5$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \dots\dots 6$$

（II） $\because \vec{a}^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \text{同理 } \vec{b}^2 = 1. \dots\dots 7$ 分

$$\therefore |\vec{c}|^2 = (\vec{a} + t\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + t^2 \vec{b}^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} \dots\dots 9$$

$$= t^2 + \sqrt{2}t + 1 = \left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}. \dots\dots 10$$

$$\therefore \text{当 } t = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } |\vec{c}| \text{ 的最小值为 } \frac{\sqrt{2}}{2}. \dots\dots 12$$

18. 解：（I） \because 随意抽取 4 件产品检查是随机事件，而第一天有 9 件正品， \therefore 第一天通过检查的概率为

$$P_1 = \frac{C_9^4}{C_{10}^4} = \frac{3}{5} \dots\dots 3$$

（II）同（I），第二天通过检查的概率为 $P_2 = \frac{C_8^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{3}. \dots\dots 6$ 分

因第一天，第二天是否通过检查相互独立。

所以，两天全部通过检查的概率为： $P = P_1 P_2 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}. \dots\dots 8$ 分

（II）记得分为 ξ ，则 ξ 的值分别为 0, 1, 2,

$$\therefore P(\xi = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}. \dots\dots 9$$

$$P(\xi = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{15}. \dots\dots 10$$

$$P(\xi = 2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{因此, } E\xi = 0 \times \frac{4}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{1}{5} = \frac{14}{15}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解: (1) 建立空间直角坐标系 (图略).

则 $A_1(4, 0, 0)$ $P(0, 0, 3)$, $M(4, 1, 0)$ $N(0, 3, 0)$

$$\therefore \overrightarrow{D_1A_1} = (4, 0, 0), \overrightarrow{PN} = (0, 3, -3), \overrightarrow{PM} = (4, 1, -3)$$

显然 $\overrightarrow{D_1A_1}$ 是面 PD_1N 的法向量. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

设面 PMN 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\text{则由 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PM} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} 4x + y - 3z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \end{cases} \therefore y = z = 2x. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

不妨取 $\vec{n} = (1, 2, 2)$, 设 $\overrightarrow{D_1A_1}$ 与 \vec{n} 成角 θ .

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{D_1A_1} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{D_1A_1}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(4, 0, 0) \cdot (1, 2, 2)}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \theta = \arccos \frac{1}{3} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

由题知二面角 $M-PN-D_1$ 大小为 $\arccos \frac{1}{3}$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(2) \overrightarrow{MN} = (-4, 2, 0) \quad \overrightarrow{QD_1} = (4, 4, 3)$$

$$\therefore \overrightarrow{QD_1} \cdot \overrightarrow{MN} = (4, 4, 3) \cdot (-4, 2, 0) = -8 \neq 0$$

$\therefore \overrightarrow{QD_1}$ 与 \overrightarrow{MN} 不垂直. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

\therefore 不存在点 P 使 $QD_1 \perp$ 面 PMN . $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$(3) P(0, 0, 3), M(4, 1, 0), N(0, 3, 0) \quad \overrightarrow{PM} = (4, 1, -3), \overrightarrow{PN} = (0, 3, -3) \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{26}, |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$|\overrightarrow{PN}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$$

$$\cos \langle \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN} \rangle = \frac{\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}}{|\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{PN}|} = \frac{3+9}{\sqrt{26} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

$$\sin \angle MPN = \sqrt{1 - \frac{4}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

$$S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PM}| \cdot |\overrightarrow{PN}| \cdot \sin \angle MPN = \frac{1}{2} \times \sqrt{26} \times \sqrt{18} \times \frac{3}{\sqrt{13}} = 9.$$

$$\overrightarrow{PQ} = (4, 4, 0) \quad \text{由(1)知平面的法向量} \vec{n} = (1, 2, 2)$$

$$\text{则 } Q \text{ 到平面 } PNM \text{ 距离 } h = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ}|}{|\vec{n}|} = \frac{|4+8|}{\sqrt{1+2^2+2^2}} = 4.$$

$$\therefore V_{Q-PMN} = \frac{1}{2} \times S_{\triangle PMN} \cdot h = \frac{1}{3} \times 9 \times 4 = 12 \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (I) $\because a_{11} = \frac{1}{2}, a_{21} = \frac{1}{4}$, 每一列成公比相等的等比数列,

$$\therefore \text{其公比 } q = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{2}. \quad \text{又 } \because a_{32} = a_{12}q^2 = \frac{1}{4}, \therefore a_{12} = 1. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{又每一行成等差数列, } \therefore \text{在第一行中有 } \frac{a_{13} + a_{11}}{2} = a_{12}, \therefore a_{13} = \frac{3}{2}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(II) 设第一行的公差为 d ,

$$a_{24} = a_{14}q = (a_{11} + 3d)q = 1, a_{32} = a_{12}q^2 = (a_{11} + d)q^2 = \frac{1}{4}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{两式联立解得 } d = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{从而 } a_{ij} = a_{1j} \cdot q^{i-1} = [a_{11} + (j-1)d]q^{i-1} = j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i \therefore a_{ij} = j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(注: 若按第 (I) 中的条件求出 a_{ij} , 只给结果分, 1 分)

$$(III) A_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{18}$$

$$= 8a_{11} + \frac{8 \times 7}{2} \times d = 8 \times \frac{1}{2} + \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{1}{2} = 18.$$

$$\therefore A_n = a_{n1} + a_{n2} + \dots + a_{n8} = a_{11}q^{n-1} + a_{12}q^{n-1} + \dots + a_{18}q^{n-1}$$

$$= q^{n-1}(a_{11} + a_{12} + \dots + a_{18}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times 18 = \frac{36}{2^n} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore a_n = \frac{36}{A_n} = 2^n.$$

$$\text{由 } mb_{n+1} = 2(a_n + mb_n) \text{ 得, } mb_{n+1} - 2mb_n = 2a_n = 2^{n+1}.$$

$$\text{两边同除以 } 2^{n+1} \text{ 得, } m\left(\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{b_n}{2^n}\right) = 1. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

即为 $m(\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{b_n}{2^n}) = 1. \therefore c_{n+1} - c_n = \frac{1}{m}$ (常数)

\therefore 数列 $\{c_n\}$ 成等差数列.9 分

$$\therefore c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_7 = \frac{(c_1 + c_7) \times 7}{2}.$$

又 $\because 2c_1c_7 \leq c_1^2 + c_7^2 \leq 100$,10分

$$\therefore (c_1 + c_7)^2 = c_1^2 + c_7^2 + 2c_1c_7 \leq 200.$$

$$\therefore -10\sqrt{2} \leq c_1 + c_7 \leq 10\sqrt{2}.$$

$$\text{即 } -35\sqrt{2} \leq \frac{(c_1 + c_2)}{2} \leq 35\sqrt{2}.$$

因此, $c_1 + c_2 + \dots + c_7$ 的最大值为 $35\sqrt{2}$, 最小值为 $-35\sqrt{2}$ 12 分

21. (I) 由 $2\sqrt{3} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OF}| \cdot |\overrightarrow{FP}| \cdot \sin \theta$ 得 $|\overrightarrow{OF}| \cdot |\overrightarrow{FP}| = \frac{4\sqrt{3}}{\sin \theta}$2 分

$$\text{由 } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{FP}}{|\overrightarrow{OF}| \cdot |\overrightarrow{FP}|} = \frac{t \sin \theta}{4\sqrt{3}}, \text{ 得 } \tan \theta = \frac{4\sqrt{3}}{t}. \dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\because 4 < t < 4\sqrt{3} \quad \therefore 1 < \tan \theta < \sqrt{3}. \therefore \theta \in [0, \pi]$$

$$\therefore \text{ 夹角 } \theta \text{ 的取值范围是 } (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}). \dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) (解法一) 设 $P(x_0, y_0)$, 不妨令 $x_0 > 0, y_0 > 0$

$$\text{由 (I) 知, PF 所在直线的倾斜角为 } \theta, \text{ 则 } \tan \theta = \frac{4\sqrt{3}}{t} = \frac{4\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)c^2}.$$

$$\text{又 } S_{\triangle OPF} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot y_0 = 2\sqrt{3}, \therefore y_0 = \frac{4\sqrt{3}}{c}.$$

$$\text{又由 } \frac{\frac{4\sqrt{3}}{c} - 0}{x_0 - c} = \frac{4\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)c^2}, \text{ 得 } x_0 = \sqrt{3}c. \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{(\sqrt{3}c)^2 + (\frac{4\sqrt{3}}{c})^2} \geq \sqrt{2 \cdot \sqrt{3}c \cdot \frac{4\sqrt{3}}{c}} = 2\sqrt{6}.$$

$$\therefore \text{ 当且仅当 } \sqrt{3}c = \frac{4\sqrt{3}}{c}, \text{ 即 } c = 2 \text{ 时, } |\overrightarrow{OP}| \text{ 取最小值 } 2\sqrt{6}, \text{ 此时, } \overrightarrow{OP} = (2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}).$$

$$\therefore \overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{3}}{3} (2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) + (0, 1) = (2, 3), \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{椭圆长轴 } 2a = \sqrt{(2-2)^2 + (3-0)^2} + \sqrt{(2+2)^2 + (3-0)^2} = 8.$$

$$\therefore a = 4, b^2 = 12.$$

$$\text{故所求椭圆方程为 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

(解法二) 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\overrightarrow{FP} = (x_0 - c, y_0)$, $\overrightarrow{OF} = (c, 0)$.

$$\therefore \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{FP} = (x_0 - c, y_0) \cdot (c, 0) = (x_0 - c)c = t = (\sqrt{3} - 1)c^2.$$

$$\therefore x_0 = \sqrt{3}c. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad 8 \text{ 分} \quad \text{又}$$

$$S_{\Delta OFP} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OF}| \cdot |y_0| = 2\sqrt{3} \quad \therefore y_0 = \pm \frac{4\sqrt{3}}{c}.$$

以下同解法一

22. 解: (I) 令 $g(x) = f(x) - (kx - 1)$, 即 $g(x) = e^{1+x} - kx + 1$. 则 $g'(x) = e^{1+x} - k$; $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

由于 $0 < k \leq e$

\therefore 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $e^{1+x} > e$, 从而 $e^{1+x} - k > 0$, 即 $x \in (0, +\infty)$ 时 $g'(x) > 0$;

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数; $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$\therefore g(0) = e + 1 > 0$, $\therefore x > 0$ 时, $g(x) > 0$; $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

又显然 $x \leq 0$ 时, $g(x) > 0$; $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

\therefore 对任意的实数 x , $f(x) > kx - 1$ 总成立. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

(II) 若 $k < 0$, 则 $f\left(\frac{3}{k}\right) = e^{1+\frac{3}{k}} < e < 3 = k \times \frac{3}{k}$, 即 $f(x) > kx$ 不可能总成立, $\therefore k \geq 0$. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

(i) $\because f(x) = e^{1+x} > 0, k \geq 0, \therefore x \in (-\infty, 0]$ 时, $f(x) > kx$ 总成立; $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

(ii) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > kx$ 总成立, 等价于 $k < \frac{f(x)}{x}$ 总成立, 等价于 k 小于 $\frac{f(x)}{x}$ 的最小值. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$$\text{记 } F(x) = \frac{f(x)}{x}, \text{ 则 } F'(x) = \frac{f'(x) \times x - f(x)}{x^2} = \frac{xe^{1+x} - e^{1+x}}{x^2} = \frac{(x-1)e^{1+x}}{x^2} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

\therefore 由 $F'(x) = 0$, 得 $x = 1$.

又显然 $x \in (0, 1)$ 时, $F'(x) < 0$; $x \in (1, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$.

$\therefore x = 1$ 使得 $F(x)$ 取得最小值 $F(1) = e^2, k < e^2 \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$ 综上所述: k 的取值范围是 $[0, e^2)$ $\dots\dots\dots 14 \text{ 分}$

高考数学五一短期冲刺课程预告

【课程目标】

高考考生考前最后一课，从高考考题、调研模拟试题本身把脉高考难点，寻求突破。

①拉分题到底拉在哪里？考前不得不知的技法以及一些杀手锏你都系统地掌握了吗？带你飞

②除了硬实力，面对选填及解答，如何提高单位时间得分率？给你想要！

【适用学员】

①高三学员（在校平均成绩 100+）②优秀的高二学员（在校平均成绩 120+）文理均可

【上课时间及内容】

04 月 29 日（周六）08:30-11:30 选填压轴攻克

04 月 30 日（周日）08:30-11:30 玩转圆锥曲线

05 月 01 日（周一）08:30-11:30 导数为你癫狂

课程开始后，随课附赠精心准备的高考押题卷 2 份

【班级类型】

5-15 人小班

【上课方式】

讲练结合，教师引导学生先做，然后教师讲解并凝练总结补充拓展

【费用】

1440 元/人 含三次课

【开课校区及师资】

福田百花校区：尹会梨老师（特点：深谙考点 逻辑清晰 一题多解）

福田园岭校区：常奕露老师（特点：授课通俗易懂 善于引导）

福田景田校区：龚凯老师（特点：气场强大，对考点把握极其精准）

南山海月校区：李磊老师（特点：娓娓道来，以小见大，高度总结）

更多试题资料请加入微信群：2017 高考数学学员交流群

