

旋转模型 (二)

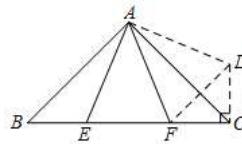
一、角含半角旋转模型

角含半角即大角中含有一个等于其一半的小角 .

1. 90° 中含有 45°

 等腰直角三角形 90° 中含有 45°

已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle EAF = 45^\circ$.



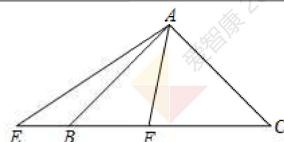
过点A作 $AD \perp AE$, 且 $AD = AE$, 连接CD、FD.

依题可知 $\triangle ABC$ 、 $\triangle AED$ 都是等腰直角三角形,

通过 "SAS" 可证 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$, $BE = CD$, $BE \perp CD$,

易证 $\triangle AEF \cong \triangle ADF$, $EF = DF$,

从而推出 $BE^2 + CF^2 = EF^2$.



证明方法同上, 结论依然成立, $BE^2 + CF^2 = EF^2$.

$\triangle ABE \cong \triangle ACD$, 是绕顶点A旋转 90° 的全等;

$\triangle AEF \cong \triangle ADF$, 是沿AF翻折的轴对称全等.

此外, $\angle AFE = \angle AFD$.

 正方形中 90° 中含有 45°

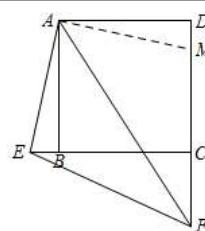
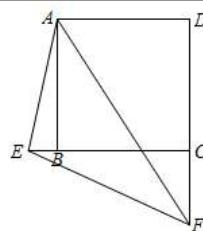
已知正方形ABCD, $\angle EAF = 45^\circ$.

延长CB至M, 使得 $BM = DF$, 连接AM.

易证 $\triangle ABM \cong \triangle ADF$, $AM = AF$, $AM \perp AF$,

再证 $\triangle AME \cong \triangle AFE$, $ME = EF$,

故 $EF = DF - BE$.



结论:

① $EF = DF - BE$;

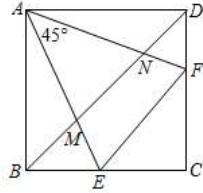
② AF 平分 $\angle EFD$;

③ 点 A 到 EF 的距离等于正方形边长 .

【注意】

将已知条件 $\angle EAF = 45^\circ$ 与结论互换，依然成立 .

已知正方形 $ABCD$ ， $\angle EAF = 45^\circ$.



【结论】

① $EF = BE + DF$;

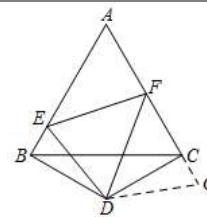
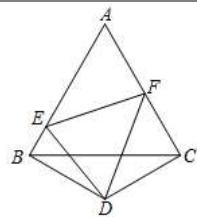
② $MN^2 = BM^2 + DN^2$;

③ AE 平分 $\angle BEF$ ， AF 平分 $\angle DFE$ ；

④ 点 A 到 EF 的距离 = AB .

2. 120° 中含有 60°

已知，等边 $\triangle ABC$ ， $DB = DC$ ， $\angle BDC = 120^\circ$ ， $\angle EDF = 60^\circ$.

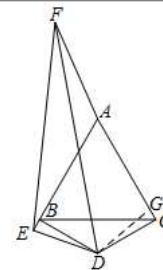
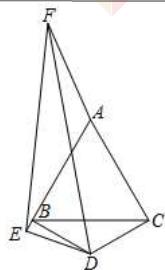


延长 AC 至 G ，使得 $CG = BE$ ，连接 DG .

易证 $\triangle DBE \cong \triangle DCG$ ， $DE = DG$ ， $\angle BDE = \angle CDG$ ，

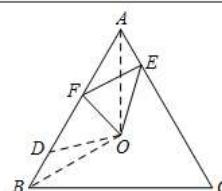
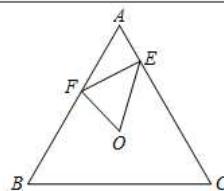
再证 $\triangle DEF \cong \triangle DGF$ ， $EF = GF$ ，

故 $EF = BE + CF$.



结论： $EF = FC - BE$.

已知点 O 是等边 $\triangle ABC$ 的中心点， $\angle EOF = 60^\circ$.



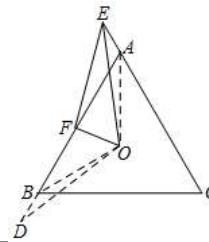
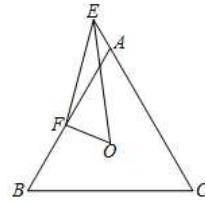
连接 OA 、 OB ，在 AB 上截取 $BD = AE$ ，连接 OD ，

依题可知， $\triangle AOB$ 是顶角为 120° 的等腰三角形， $OA = OB$ ，

易证 $\triangle OAE \cong \triangle OBD$ ， $OE = OD$ ， $\angle EOD = 120^\circ$ ，

再证 $\triangle EOF \cong \triangle DOF$ ， $EF = DF$ ，

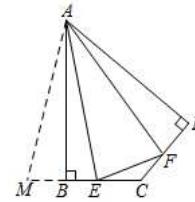
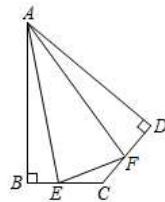
故 $BF = EF + AE$.



结论： $BF = EF - AE$.

3. 任意角中含有等于其一半的角

在四边形ABCD中， $AB = AD$ ， $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ， $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$.

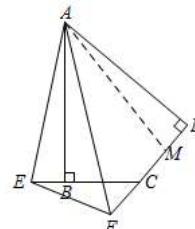
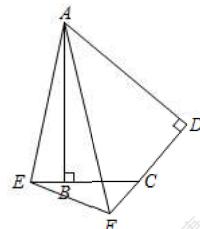


延长CB至M，使得 $BM = DF$ ，连接AM .

易证 $\triangle ABM \cong \triangle ADF$ ， $AM = AF$ ， $\angle MAF = \angle BAD$ ，

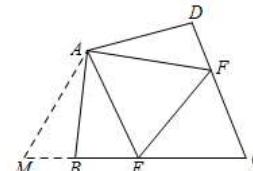
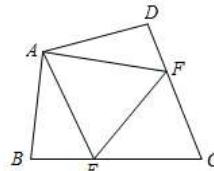
再证 $\triangle AME \cong \triangle AFE$ ， $ME = EF$ ，

故 $EF = DF + BE$.



结论： $EF = DF - BE$.

在四边形ABCD中， $AB = AD$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ， $\angle EAF = \frac{1}{2}\angle BAD$.

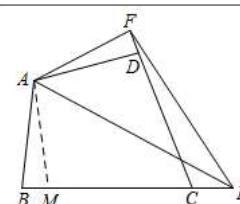
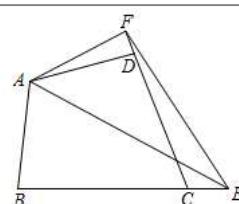


延长CB至M，使得 $BM = DF$ ，连接AM .

易证 $\triangle ABM \cong \triangle ADF$ ， $AM = AF$ ， $\angle MAF = \angle BAD$ ，

再证 $\triangle AME \cong \triangle AFE$ ， $ME = EF$ ，

故 $EF = BE + DF$.



结论： $EF = BE - DF$.

【总结】

① 旋转时，令共顶点的等线段重合；

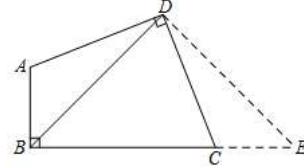
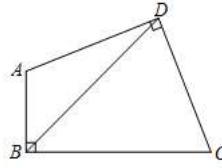
②角含半角旋转模型中都有一对旋转全等和一对轴对称全等 .

二、对角互补旋转模型

对角互补的旋转模型中，除了对角互补外，一般都还会有共顶点的等线段 .

1. 直角对角互补旋转模型

在四边形 $ABCD$ 中， $DA = DC$ ， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$.



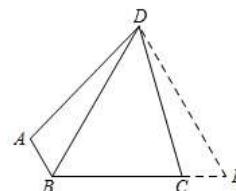
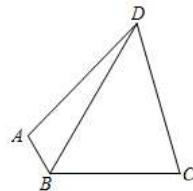
延长 BC 至 E ，使得 $CE = AB$ ，

易证 $\triangle DAB \cong \triangle DCE$ ， $DB = DE$ ， $DB \perp DE$ ，

故 $AB + BC = \sqrt{2}BD$.

2. 特殊角对角互补旋转模型

在四边形 $ABCD$ 中， $DA = DC$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ， $\angle ADC = 60^\circ$.



四边形 $ABCD$ ，依然满足对角互补，可将互补的角转化成邻补角，

延长 BC 至 E ，使得 $CE = AB$ ，

易证 $\triangle DAB \cong \triangle DCE$ ， $DB = DE$ ， $\angle BDE = \angle ADC$ ，

故 $\triangle DBE$ 为等边三角形 .

故 $BD = AB + BC$.

结论：

① $BD = AB + BC$ ；

② BD 平分 $\angle ABC$ ；

③ $S_{\text{四边形 } ABCD} = S_{\triangle BDE} = \frac{\sqrt{3}}{4}BD^2$.

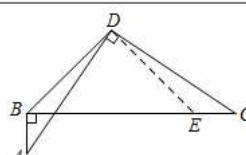
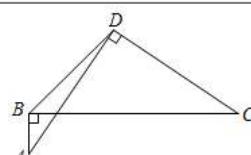
【总结】

① 旋转时，令共顶点的等线段重合；

② 我们通常将互补的一对角中的一个角转换成另一个角的邻补角进行解题 .

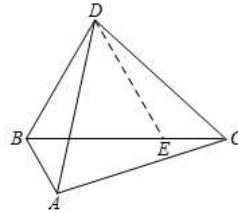
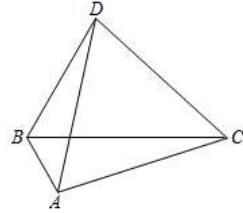
三、“8”字旋转模型

已知： $DA = DC$ ， $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$.



在 $ABCD$ 这种“8”字模型中， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ，可推 $\angle A = \angle C$ ，
又因为 $DA = DC$ ，故只需在 BC 上截取 $CE = AB$ 就可以构造 $\triangle DCE \cong \triangle DAB$ ，
从而推出 $\triangle BDE$ 是等腰直角三角形。
故 $BC - AB = \sqrt{2}BD$ 。

已知： $DA = DC$ ， $\angle ADC = \angle ABC = 60^\circ$ 。



在 $ABCD$ 这种“8”字模型中， $\angle ABC = \angle ADC = 60^\circ$ ，可推 $\angle BAD = \angle BCD$ ，
又因为 $DA = DC$ ，故只需在 BC 上截取 $CE = AB$ 就可以构造 $\triangle DAB \cong \triangle DCE$ ，
从而推出 $\triangle BDE$ 是等边三角形。
故 $BD = BC - AB$ 。

结论：

- ① $BD = BC - AB$ ；
- ② $\angle DBC = 60^\circ$ ；
- ③ $S_{\triangle ADC} - S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBE} = \frac{\sqrt{3}}{4} BD^2$ 。

【总结】

由“8”字型可进行倒角，得到一对等角；
已知等角的一边对应相等，只需作出等角的另一边对应相等即可得到一对旋转的全等。