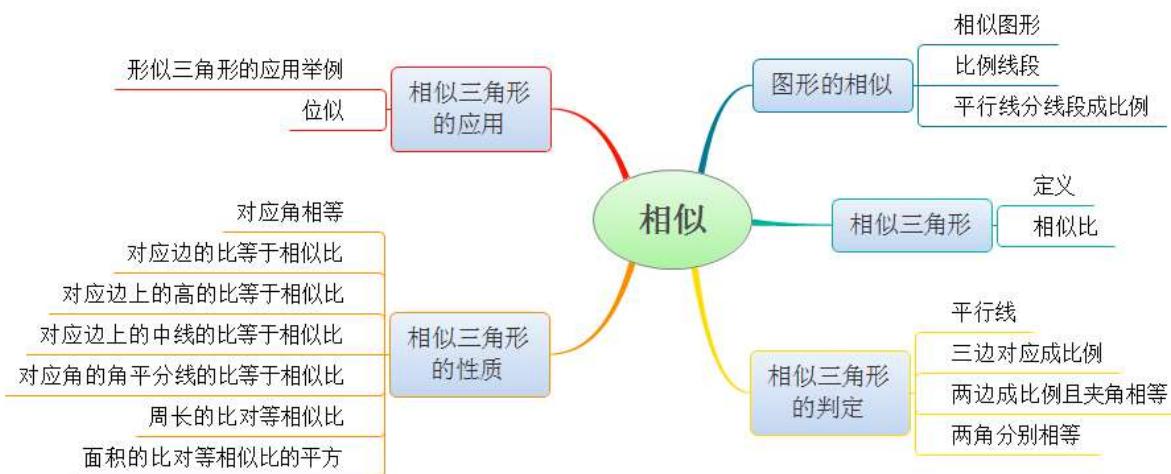


相似三角形

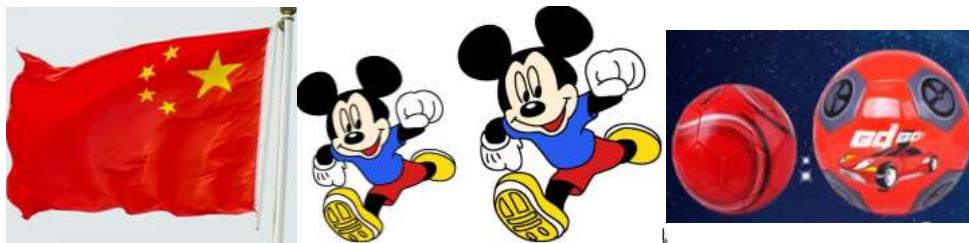
一、知识导图



二、引入

在现实生活中，我们经常见到形状相同的图形，如国旗上大小不同的五角星，不同尺寸同底版的照片，大小不同的足球等等，它们的各部分都是按照一定比例对应的。

在“全等三角形”一章中，我们研究了形状和大小完全相同的两个三角形的性质和判定方法。类似地，两个形状相同，大小不同的三角形又具有怎样的性质和判定呢？



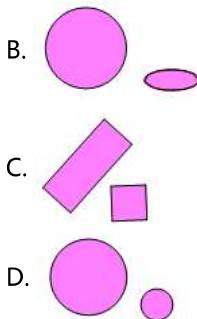
三、图形的相似

1. 相似图形

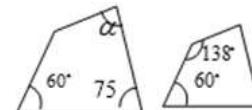
- (1) 定义：我们把形状相同的图形叫做相似图形。
- (2) 相似多边形：两个边数相同的多边形，如果它们的角对应相等，边对应成比例，那么这两个多边形叫做相似多边形。
- (3) 相似多边形的特征：对应角相等，对应边的比相等。
- (4) 相似比：相似多边形对应边的比。

1 下面图形中，相似的一组是（ ）。





2 若如图所示的两个四边形相似，则 $\angle\alpha$ 的度数是（ ）。



- A. 87°
- B. 60°
- C. 75°
- D. 120°

2. 比例线段

(1) 比例性质

- ①基本性质： $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ ；
- ②反比性质： $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ；
- ③更比性质： $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ 或 $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ ；
- ④合比性质： $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ；
- ⑤分比性质： $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ ；
- ⑥合分比性质： $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ ($c \neq d$;
 $a \neq b$)
- ⑦等比性质： $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_k}{b_k} \Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{b_1 + b_2 + \dots + b_k} = \frac{a_1}{b_1}$.

(其中 k 为正整数，且 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k \neq 0$)

1 已知 $a:b = 2:3$ ，那么下列等式中成立的是（ ）。

- A. $3a = 2b$
- B. $2a = 3b$
- C. $\frac{a+b}{b} = \frac{5}{2}$
- D. $\frac{a-b}{b} = \frac{1}{3}$

2 若 $\frac{y}{x} = \frac{3}{4}$ ，则 $\frac{x+y}{x}$ 的值为（ ）。

- A. 1
- B. $\frac{4}{7}$
- C. $\frac{5}{4}$

D. $\frac{7}{4}$

3 已知： $\frac{x+y}{x-2y} = \frac{5}{2}$ ，则 $\frac{x}{y}$ 的值为（ ）.

 A. $\frac{1}{3}$

 B. $\frac{1}{4}$

C. 3

D. 4

(2) 比例线段及相关概念

①两条线段的比：选用同一长度单位量得的两条线段的长度的比，叫做这两条线段的比。

②成比例线段：如果线段 a 和 b 的比等于线段 c 和 d 的比，那么线段 a, b, c, d 叫做成比例线段，记作 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 或 $a:b = c:d$ ，其中 a, c 叫做比的前项， b, d 叫做比的后项， b, c 叫做比例内项， a, d 叫做比例外项， d 叫做 a, b, c 的第四比例项。

③比例中项：若 $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ，则称 b 是 a, c 的比例中项，即有 $b^2 = ac$ 。

4 若线段 $x, x-1, x+4$ 的第四比例项是3，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

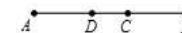
5 已知： $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，求证： $ab + cd$ 是 $a^2 + c^2$ 和 $b^2 + d^2$ 的比例中项。

(3) 黄金分割点

如图，点 C 把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC （ $AC > BC$ ），若 $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AC}$ ，则称线段 AB 被点 C 黄金分割，点 C 叫做线段 AB 的黄金分割点， AC 与 AB 的比叫做黄金比，即 $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$ 。



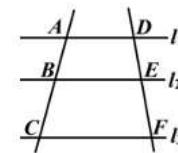
6 如图所示，乐器上的一根弦 $AB = 80$ cm，两个端点 A, B 固定在乐器面板上，支撑点 C 是靠近点 B 的黄金分割点（即 AC 是 AB 与 BC 的比例中项），支撑点 D 是靠近点 A 的黄金分割点，则 $AC = \underline{\hspace{2cm}}$ cm， $DC = \underline{\hspace{2cm}}$ cm。



3. 平行线分线段成比例

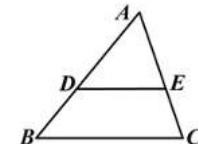
(1) 定理：三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例。

如图所示，如果 $l_1 // l_2 // l_3$ ，则 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ ， $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ ， $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$ 。

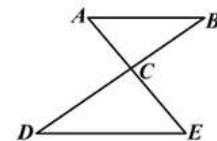


(2) 推论：平行于三角形一边的直线截其它两边(或两边的延长线)，所得的对应线段成比例。

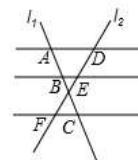
如图所示，若 $DE // BC$ ，则有 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ， $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ， $\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$ 。



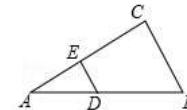
如图所示，若 $AB//DE$ ，则有 $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD}$ 。



- 1 如图， $AD//BE//CF$ ，直线 l_1 ， l_2 与这三条平行线分别交于点 A ， B ， C 和点 D ， E ， F ， $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ ， $DE = 6$ ，则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



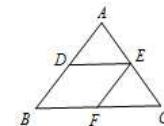
- 2 在 $\triangle ABC$ 中， D 为 AB 边上一点， $DE//BC$ 交 AC 于点 E ，若 $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ ， $DE = 6$ ，则 BC 的长度为()。



- A. 8
B. 10
C. 16
D. 18

- 3 如图，已知 $DE//BC$ ， $EF//AB$ ，则下列比例式中错误的是()。

- A. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$
B. $\frac{CE}{CF} = \frac{EA}{FB}$
C. $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{BD}$
D. $\frac{EF}{AB} = \frac{CF}{CB}$

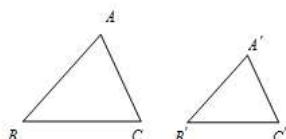


四、相似三角形的定义

1. 定义

相似三角形：形状相同的两个三角形叫做相似三角形。

如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，记作 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，符号 \sim 读作“相似于”。



2. 相似三角形的相似比

相似三角形对应边的比叫做相似比。

【注意】全等三角形的相似比是1，“全等三角形”一定是“相似形”，“相似形”不一定是“全等形”。

下列说法中正确的是（ ）。

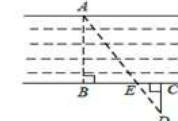
- A. 全等三角形不一定是相似三角形
- B. 相似三角形一定是全等三角形
- C. 不全等的三角形一定不是相似三角形
- D. 不相似的三角形一定不是全等三角形

五、相似三角形的判定

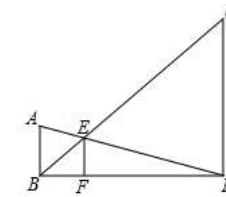
1. 利用平行线判定

(1) 平行于三角形一边的直线和其他两边(或两边的延长线)相交，所构成的三角形与原三角形相似。

- 1 如图，为估算某河的宽度，在河对岸选定一个目标点A，在近岸取点B、C、D，使得 $AB \perp BC$ ， $CD \perp BC$ ，点E在BC上，并且点A、E、D在同一条直线上。若测得 $BE = 20m$ ， $EC = 10m$ ， $CD = 20m$ ，则河的宽度 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ 米。



- 2 如图，已知 AB 、 CD 、 EF 都与 BD 垂直，垂足分别是 B 、 D 、 F ，且 $AB = 1$ ， $CD = 3$ ，那么 EF 的长是（ ）。

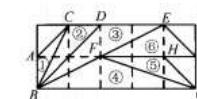


- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{2}{3}$
- C. $\frac{3}{4}$
- D. $\frac{4}{5}$

2. 三边对应成比例

三边对应成比例，两个三角形相似。

如图所示，在正方形网格上有6个三角形① $\triangle ABC$ ，② $\triangle BCD$ ，③ $\triangle BDE$ ，④ $\triangle BFG$ ，⑤ $\triangle FGH$ ，⑥ $\triangle EFK$ ，其中②~⑥中与三角形①相似的是（ ）。



- A. ②③④
- B. ③④⑤

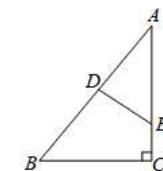
C. ④⑤⑥

D. ②③⑥

3. 两边成比例且夹角相等

两边成比例且夹角相等的两个三角形相似 .

- 1 如图, 在Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, D、E分别为AB、AC边上的点, 且 $\frac{AD}{AE} = \frac{3}{5}$, 连接DE. 若 $AC = 3$, $AB = 5$.



求证: $\triangle ABC \sim \triangle AED$.

- 2 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 6$, $AC = 4$, E是AB上一点, $AE = 2$, 在AC上取一点F, 使以A、E、F为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 则AF的长为 ____.

4. 两角分别相等

两角分别相等的两个三角形相似 .

- 1 下列命题, 其中真命题的个数是().
- (1) 有一个锐角相等的两个直角三角形相似;
 - (2) 两个等边三角形一定相似;
 - (3) 有一个内角是 100° 的两个等腰三角形相似;
 - (4) 任意两个矩形一定相似.

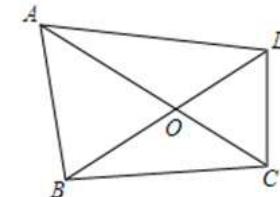
A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

- 2 如图, 已知四边形ABCD的对角线交于点O, $\angle BAC = \angle BDC$.



求证: $\triangle ABO \sim \triangle DCO$.

5. 补充说明

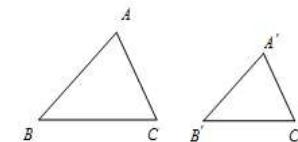
直角三角形相似的判定方法

- (1) 以上各种判定方法均适用；
- (2) 如果一个直角三角形的斜边和一条直角边与另一个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似；
- (3) 垂直法：直角三角形被斜边上的高分成的两个直角三角形与原三角形相似。

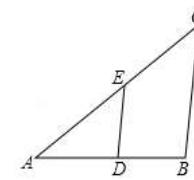
六、相似三角形的性质

1. 相似三角形的对应角相等

如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，则有 $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$ ， $\angle C = \angle C'$ 。

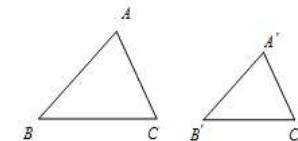


已知：如图， $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ， $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle C = 40^\circ$ 。求： $\angle ADE$ 的度数。

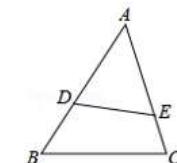


2. 相似三角形的对应边成比例

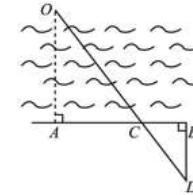
如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，则有 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$ (k 为相似比)。



- 1 若 $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ，且 $\frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$ ， $DE = 10$ ，则 $BC = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



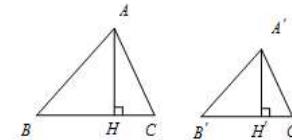
- 2 地质勘探人员为了估算某条河的宽度，在河对岸选定一个目标点 O ，再在他们所在的这一侧选点 A 、 B 、 D ，使得 $AB \perp AO$ ， $DB \perp AB$ ，然后找出 DO 和 AB 的交点 C ，如图所示。测得 $AC = 12m$ ， $BC = 6m$ ， $BD = 8m$ ，则这条河的宽 AO 为 $\underline{\hspace{2cm}}$ m。



3. 相似三角形对应高的比，对应中线的比与对应角平分线的比都等于相似比

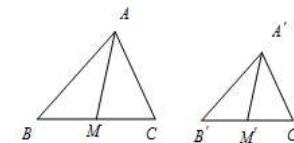
如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似， AH 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高线， $A'H'$ 是 $\triangle A'B'C'$ 中 $B'C'$ 边上的高线，则有

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k = \frac{AH}{A'H'} \quad (k \text{ 为相似比}) .$$



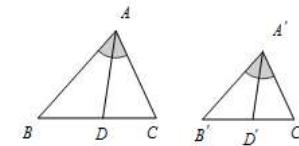
如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似， AM 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的中线， $A'M'$ 是 $\triangle A'B'C'$ 中 $B'C'$ 边上的中线，则有

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k = \frac{AM}{A'M'} \quad (k \text{ 为相似比}) .$$



如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似， AD 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的角平分线， $A'D'$ 是 $\triangle A'B'C'$ 中 $\angle B'A'C'$ 的角平分线，则有

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k = \frac{AD}{A'D'} \quad (k \text{ 为相似比}) .$$



- 1 若两个相似三角形的相似比为 $3:5$ ，则它们的对应角的角平分线的比为（ ）

- A. $1:3$
- B. $3:5$
- C. $1:5$
- D. $9:25$

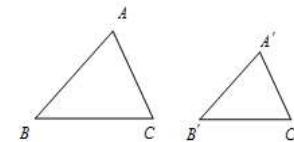
- 2 如果两个相似三角形对应边中线之比是 $1:4$ ，那么它们的对应高之比是（ ）

- A. $1:2$
- B. $1:4$
- C. $1:8$
- D. $1:16$

4. 相似三角形周长的比等于相似比

如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似，则有 $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k$ (k 为相似比)。应用比例的等比性质有

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB + BC + AC}{A'B' + B'C' + A'C'} = k .$$

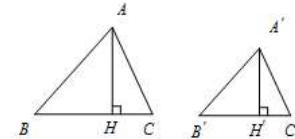


两个相似多边形相似比为 $1:2$ ，且它们的周长和为 90 ，则这两个相似多边形的周长分别是_____，_____。

5. 相似三角形面积的比等于相似比的平方

如图， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似， AH 是 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高线， $A'H'$ 是 $\triangle A'B'C'$ 中 $B'C'$ 边上的高线，则有

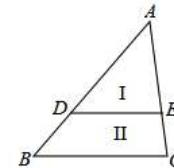
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = k = \frac{AH}{A'H'} \quad (k \text{ 为相似比}) \text{。进而可得 } \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH}{\frac{1}{2} \cdot B'C' \cdot A'H'} = \frac{BC}{B'C'} \cdot \frac{AH}{A'H'} = k^2 \text{。}$$



- 1 已知两个相似三角形的相似比为 $2:3$ ，那么这两个三角形的面积之比为()。

- A. $3:2$
- B. $4:6$
- C. $4:9$
- D. $2:3$

- 2 如图，平行于 BC 的直线 DE 把 $\triangle ABC$ 分成的两部分面积相等，则 $\frac{AD}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

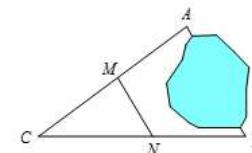


七、相似三角形应用举例

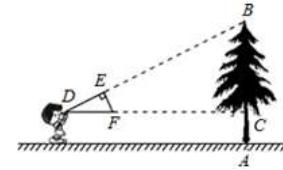
1. 相似三角形应用举例

- 1 如图， A 、 B 两地被池塘隔开，小明通过下列方法测出了 A 、 B 间的距离：先在 AB 外选一点 C ，然后测出 AC 、 BC 的中点 M 、 N ，并测量出 MN 的长为 $12m$ ，由此他就知道了 A 、 B 间的距离，有关他这次探究活动的描述错误的是()。

- A. $CM : MA = 1 : 2$
- B. $MN // AB$
- C. $\triangle CMN \sim \triangle CAB$
- D. $AB = 24 m$



- 2 如图，小明同学用自制的直角三角形纸板 DEF 测量树的高度 AB ，他调整自己的位置，设法使斜边 DF 保持水平，并且边 DE 与点 B 在同一直线上。已知纸板的两条直角边 $DE = 0.4m$ ， $EF = 0.2m$ ，测得边 DF 离地面的高度 $AC = 1.5m$ ， $CD = 8m$ ，求树高。



2. 位似

定义：两个多边形不仅相似，而且对应顶点的连线相交于一点，这样的两个图形叫做位似图形。这点叫做位似中心。

性质：位似图形的任意一对对应点与位似中心在同一直线上，它们到位似中心的距离之比等于相似比。位似图形对应边互相平行或在同一直线上。

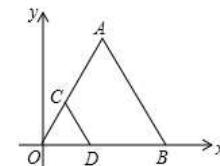
1 下列关于位似图形的表述：

- ①相似图形一定是位似图形，位似图形一定是相似图形；
- ②位似图形一定有位似中心；
- ③如果两个图形是相似图形，且每组对应点的连线所在的直线都经过同一个点，那么，这两个图形是位似图形；
- ④位似图形上任意两点与位似中心的距离之比等于位似比。

其中正确命题的序号是（ ）。

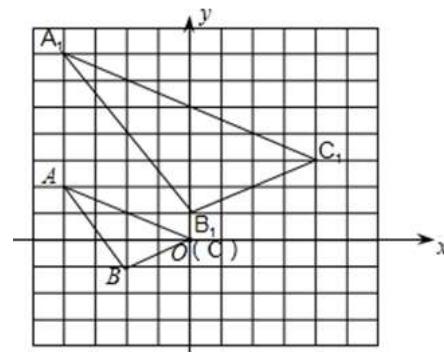
- A. ②③
- B. ①②
- C. ③④
- D. ②③④

2 如图，线段CD两个端点的坐标分别为C(1, 2)、D(2, 0)，以原点为位似中心，将线段CD放大得到线段AB，若点B的坐标为(5, 0)，则点A的坐标为（ ）。

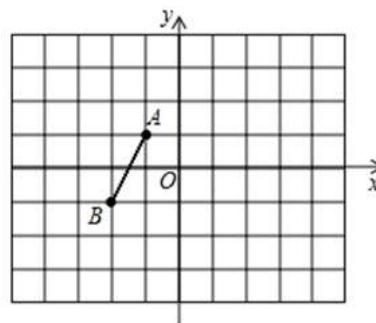


- A. (2, 5)
- B. (2.5, 5)
- C. (3, 5)
- D. (3, 6)

3 如图，将 $\triangle ABC$ 的三边分别扩大一倍得到 $\triangle A_1B_1C_1$ （顶点均在格点上，且 $A(-4, 2)$ ，若它们是以P点为位似中心的位似图形，则P点的坐标是_____。



- 4 如图，在平面直角坐标系中， $A(-1, 1)$ ， $B(-2, -1)$ 。



- 1 以原点O为位似中心，把线段AB放大到原来的2倍，请在图中画出放大的线段CD。
- 2 在(1)的条件下，写出点A的对应点C的坐标为_____，点B的对应点D的坐标为_____。