

不等式及不等式组

一、不等式

1. 不等式的概念

(1) 用不等号表示大小关系的式子，叫做不等式。

例如： $a + 3 > -1 + 4$ ， $-5 < -2$ ， $|x| \geq 0$ ， $x + 1 \leq 0$ ， $a + 2 \neq a - 2$ 等都是不等式。

(2) 常见的不等号有5种： $>$ 、 $<$ 、 \geq 、 \leq 、 \neq 。

【注意】

“ \geq ” 表示大于或等于，“ \leq ” 表示小于或等于，满足其中一个即可成立。

不等式 $3 \geq 2$ 成立，因为 $3 > 2$ 成立；不等式 $3 \geq 3$ 也成立，因为 $3 = 3$ 成立。

1 下列各项中，能表示不等关系的是()。

- A. 老师的年龄是你的年龄的2倍
- B. 小军和小红一样高
- C. 小明岁数比爸爸小26岁
- D. x^2 是非负数

2 在数学式子 $-3 < 2$ ， $3x - 2y > 0$ ， $x = 1$ ， $x^2 + 2x - y^2$ ， $x \neq -1$ ， $x + 2 \geq y - 3$ 中是不等式的个数为()。

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

2. 列不等式

不等式模型的建立立足于列不等式，即审清题意，弄清关键字词的含义，找出已知量和未知量以及它们之间存在的关系，然后用不等号将它们连接起来，关键是把题中的文字语言正确转化为数学符号语言。

1 x 的 $\frac{1}{2}$ 与3的差是负数，用不等式表示为_____。

2 语句“ x 的3倍与10的和小于或等于7”用不等式表示为_____。

(1) 常见两层含义的关键词及对应的不等符号：

① 小于或等于，不大于，不超过，不高于，不多于，最多，这些用“ \leq ”连接。

② 大于或等于，不小于，不低于，不少于，至少，这些用“ \geq ”连接。

3 高钙牛奶的包装盒上注明：“每100克内含钙 ≥ 150 毫克”，它的含义是指()。

- A. 每100克含钙150毫克
- B. 每100克含钙不低于150毫克
- C. 每100克含钙高于150毫克

D. 每100含钙不超过150毫克

4 “数 x 不大于2”，指的是（ ）.

- A. $x \leq 2$
- B. $x \geq 2$
- C. $x < 2$
- D. $x > 2$

(2) 常见不等式的文字语言与符号表示：

- ① a 是正数表示为 $a > 0$ ， a 是负数表示为 $a < 0$.
- ② a 是非负数表示为 $a \geq 0$ ， a 是非正数表示为 $a \leq 0$.
- ③ a, b 同号表示为 $ab > 0$ ； a, b 异号表示为 $ab < 0$.

【注意】

- ① 不等式表示代数式之间的不等关系，与方程表示的相等关系相对应 .
- ② 有些不等式中不含未知数，如 $3 > 2$ ；有些不等式中含有未知数，如 $3x > 6$.
- ③ 判断一个式子是否为不等式，关键看所给的式子是否有不等号 .

5 对于命题“ a, b 是有理数，若 $a > b$ ，则 $a^2 > b^2$ ”，若结论保持不变，怎样改变条件，结论才是真命题 .
给出下列四种说法：

- ① a, b 是有理数，若 $a > b > 0$ ，则 $a^2 > b^2$.
- ② a, b 是有理数，若 $a > b$ ，且 $a + b > 0$ ，则 $a^2 > b^2$.
- ③ a, b 是有理数，若 $a < b < 0$ ，则 $a^2 > b^2$.
- ④ a, b 是有理数，若 $a < b$ 且 $a + b < 0$ ，则 $a^2 > b^2$.

其中真命题的个数是（ ）.

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

3. 不等式的解

使不等式成立的未知数的值，叫做不等式的解 .

例如： $-4, -2, 0, 1, 2$ 都是不等式 $x \leq 2$ 的解，当然它的解还有许多 .

判断某个未知数的值是否为不等式的解，直接将该数值代入不等式，看不等式是否成立，若成立，则是不等式的解；若不成立，则不是 .

在 $-\frac{1}{2}, -1, -2, 0, -3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ 中，能使不等式 $x + 3 < 2$ 成立的有（ ）.

- A. 4个
- B. 3个
- C. 2个
- D. 1个

4. 不等式的解集

一般地，一个含有未知数的不等式的所有解，组成这个不等式的解集。

不等式的解集是一个集合，是一个范围，其含义：

- ①解集中的每一个数值都能使不等式成立；
- ②能够使不等式成立的所有数值都在解集中。

【注意】不等式的解和解集是两个不同的概念，不等式的解指满足不等式的未知数的某个值，而它的解集是指不等式所有解的一个集合。

1 判断下列语句的正误。

1. 2是 $x + 3 > 1$ 的解集。
2. $x < 3$ 是不等式 $2x + 5 < 11$ 的解。
3. $x > 7$ 是不等式 $2x - 5 > 7$ 的解集。
4. 不等式 $-x + 5 > 4$ 的正整数解只有一个。

2 已知 $x > a$ 的解集中最小整数为-2，则 a 的取值范围是_____。

3 已知 $x < a$ 的解集中的最大整数为3，则 a 的取值范围是_____。

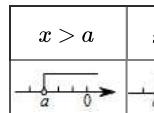
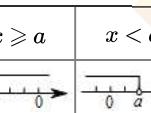
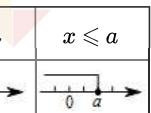
5. 不等式解集的表示方法

(1) 用不等式表示：

一般地，一个含有未知数的不等式有无数个解，它的解集是某个范围，这个范围可用一个最简单的不等式 $x > a$ （或 $x \geq a$ ）， $x < a$ （或 $x \leq a$ ）的形式表示。

(2) 用数轴表示：

①解集与数轴的对应关系如图所示：

$x > a$	$x \geq a$	$x < a$	$x \leq a$
			

解集 $x > a$ 用 a 点右边的点来表示，表示 a 的点画成空心圆圈。

解集 $x < a$ 用 a 点左边的点来表示，表示 a 的点画成空心圆圈。

解集 $x \geq a$ 用表示 a 的点和它右边的点来表示，表示 a 的点画成实心圆点。

解集 $x \leq a$ 用表示 a 的点和它左边的点来表示，表示 a 的点画成实心圆点。

②用数轴表示不等式的解集时要“两定”：一是定边界点，二是定方向。

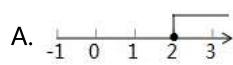
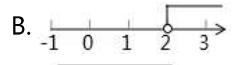
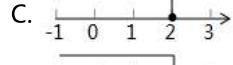
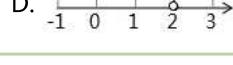
【注意】

①若不等号是“ \leq ”或“ \geq ”，边界点是实心圆点；

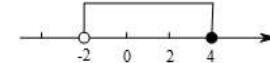
②若不等号是“ $<$ ”或“ $>$ ”，边界点是空心圆圈。

③定方向时，相对于边界点而言，小于向左，大于向右。

1 不等式 $2x - 3 < 1$ 的解集在数轴上表示为()。

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

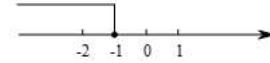
2 如图，在数轴上表示的解集对应的不等式是（ ）.



- A. $-2 < x < 4$
- B. $-2 < x \leq 4$
- C. $-2 \leq x < 4$
- D. $-2 \leq x \leq 4$

3 关于 x 的不等式 $2x - a \leq -1$ 的解集如图所示，则 a 的取值是（ ）.

- A. 0
- B. -3
- C. -2
- D. -1



二、不等式基本性质

1. 不等式基本性质

(1) 基本性质1：

不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变。

如果 $a > b$ ，那么 $a \pm c > b \pm c$ 。

(2) 基本性质2：

不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变。

如果 $a > b$ ，并且 $c > 0$ ，那么 $ac > bc$ （或 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ ）。

(3) 基本性质3：

不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变。

如果 $a > b$ ，并且 $c < 0$ ，那么 $ac < bc$ （或 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ ）。

2. 不等式的其他性质

(1) 不等式的其他性质：

①互逆性：若 $a > b$ ，则 $b < a$ ；若 $b < a$ ，则 $a > b$ 。

②传递性：若 $a > b$ ，且 $b > c$ ，则 $a > c$ 。

③若 $a \geq b$ ，且 $a \leq b$ ，则 $a = b$ 。

④若 $a^2 \leq 0$ ，则 $a = 0$ 。

(2) 不等式的性质与等式的性质的区别与联系：

等式的性质	不等式的性质
对称性：若 $a = b$ ，则 $b = a$	互逆性：若 $a > b$ ，则 $b < a$
传递性：若 $a = b$, $b = c$ ，则 $a = c$	传递性：若 $a > b$, $b > c$ ，则 $a > c$
性质1：若 $a = b$ ，则 $a \pm c = b \pm c$	性质1：若 $a > b$ ，则 $a \pm c > b \pm c$
	性质2：若 $a > b$, $c > 0$ ，则 $ac > bc$, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

性质2：若 $a = b$, $c \neq 0$, 则 $ac = bc$, $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ 性质3：若 $a > b$, $c < 0$, 则 $ac < bc$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

1 若 $a < b$, 则下列结论正确的是() .

- A. $-a < -b$
- B. $2a > 2b$
- C. $a - 1 < b - 1$
- D. $3 + a > 3 + b$

2 已知 $a > b$, 下列不等式变形错误的是() .

- A. $a + 1 > b + 1$
- B. $\frac{a}{2} > \frac{b}{2}$
- C. $4 - 3a > 4 - 3b$
- D. $3a - 4 > 3b - 4$

3. 作差法比较大小

我们经常把两个要比较的对象先数量化, 再求它们的差, 根据差的正负判断对象的大小.

$$a - b > 0 \Leftrightarrow a > b ;$$

$$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b ;$$

$$a - b < 0 \Leftrightarrow a < b .$$

1 已知 $x = m + 15$, $y = 5 - 2m$, 若 $m > -3$, 则 x 与 y 的关系为() .

- A. $x = y$
- B. $x > y$
- C. $x < y$
- D. 不能确定

2 比较 $3x + 5$ 与 $10 - 2x$ 的大小 .

4. 不等式的最值

由不等式可知:

$x \geq a$ 无最大值, 但有最小值为 a ;

$x \leq a$ 无最小值, 但有最大值为 a ;

$x > a$ 或 $x < a$ 既无最大值, 也无最小值 .

非负数有最____值为____; 非正数有最____值为____.

三、一元一次不等式

1. 一元一次不等式

(1) 含有一个未知数，未知数的次数是1的不等式，叫做一元一次不等式。

(2) 一般式是 $ax > b$ 或 $ax < b$ ($a \neq 0$)。

【方法】一元一次不等式满足的条件：

- ① 不等式的两边都是整式；
- ② 不等式中只含有一个未知数；
- ③ 未知数的次数是1。

1 下列不等式中，一元一次不等式有()个。

① $x^2 + 3 > 2x$; ② $\frac{1}{x} - 3 > 0$; ③ $x - 3 > 2y$; ④ $\frac{x - 1}{\pi} \geqslant 5\pi$; ⑤ $5y > -3$

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

2 若 $(m+2)x^{|m|-1} + 3 > 0$ 是关于 x 的一元一次不等式，则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

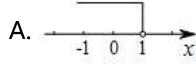
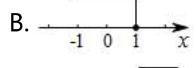
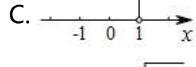
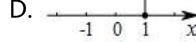
2. 一元一次不等式的解集

一元一次不等式的所有解组成的集合叫做一元一次不等式的解集。

【注意】不等式的解集一般是一个取值范围，但有时候需要求未知数的某些特殊解，如求整数解、正整数解、非负整数解，最大整数解等，解答这类问题的关键是明确解的特征。

1 不等式 $x - 4 < 0$ 的解集是 。

2 不等式 $2x + 3 < 5$ 的解集在数轴上表示为()。

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

四、解一元一次不等式

1. 解不等式

求不等式的解集的过程叫做解不等式。

2. 解一元一次不等式的步骤

(1) 去分母：

根据不等式的性质2或3，把不等式的两边同时乘各分母的最小公倍数，得到整数系数的不等式。

(2) 去括号：

根据去括号的法则，括号前的系数要与括号里每一项相乘，特别要注意括号外面是负号时，括号里面的各项要改变符号。

(3) 移项：

根据不等式的基本性质1，一般把含有未知数的项移到不等式的左边，常数项移到不等式的右边，移项变号。

(4) 合并同类项：

将同类项合并，化成 $ax < b$ 或 $ax > b$ 形式。

(5) 系数化1：

根据不等式基本性质2或3，特别要注意系数化为1时，系数是负数的，不等号要改变方向，最后化成 $x > \frac{b}{a}$ 或 $x < \frac{b}{a}$ 的形式。

【注意】

①去分母时，不要漏乘不含分母的项。

②分子是一个多项式时，分数线有括号的作用，去分母后，应作为一个整体加上括号。

③去括号时，先去小括号，再去中括号，最后去大括号，若括号前是负号，括号里各项均要变号。

④移项时，移项变号改变的是所移项的符号，不等号的方向不变。

⑤把系数化为1时：不等式两边同时除以未知数的系数，当这个系数是负数时，不等号的方向要改变。

⑥在解不等式时，有些步骤可能用不到，要根据不等式的形式灵活选择解题步骤。

1 解不等式 $5x - 12 \leqslant 2(4x - 3)$ ，并把解集在数轴上表示出来。

2 解不等式： $1 - \frac{x-1}{3} \leqslant \frac{2x+3}{3} + x$ 。

3 解不等式： $\frac{2x-1}{3} - \frac{10x+1}{6} \geqslant \frac{5}{4}x - 5$ ，并把它的解集在数轴上表示出来，并求出非负整数解。

五、一元一次不等式组

1. 一元一次不等式组

含有相同未知数的几个一元一次不等式所组成的不等式组，叫做一元一次不等式组。

如 $\begin{cases} x > 1 \\ 2x < 5 \end{cases}$ ， $\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ x + 8 < 4x - 1 \\ x + 2 < 8 \end{cases}$ 是一元一次不等式组。

定义中的“几个”并没有确定个数，但必须是两个或两个以上。

【方法】判断一个不等式组是否为一元一次不等式组，要从以下两个方面考虑：

- ①组成不等式组的每一个不等式必须是一元一次不等式。
- ②整个不等式组中只含有一个未知数。

2. 一元一次不等式组的解集

(1) 一般地，几个一元一次不等式解集的公共部分，叫做由它们所组成的一元一次不等式组的解集。

(2) 找几个不等式的解集的公共部分的方法：

- ①先将几个不等式的解集在同一数轴上表示出来，然后找出它们重叠部分。
- ②当几个不等式的解集没有公共部分时，称这个不等式组无解（解集为空集）。

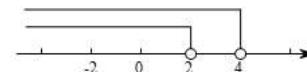
一元一次不等式组解集的四种基本类型

不等式组 ($a < b$)	图示	解集	口诀
$\begin{cases} x \geq a \\ x \geq b \end{cases}$		$x \geq b$	同大取大
$\begin{cases} x \leq a \\ x \leq b \end{cases}$		$x \leq a$	同小取小
$\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}$		$a \leq x \leq b$	大大小小中间找
$\begin{cases} x \leq a \\ x \geq b \end{cases}$		无解	大大小小找不到

【注意】

- ①在求不等式组解集的过程中通常是利用数轴来确定不等式组的解集的。
- ②在数轴上表示不等式组的解集时，要把几个不等式的解集都表示出来，不能仅画出公共部分。
- ③关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x \geq a \\ x \leq a \end{cases}$ 的解集为 $x = a$ ，关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x > a \\ x < a \end{cases}$ 的解集为空集。

- 1 如图，在数轴上表示某不等式组中的两个不等式的解集，则该不等式组的解集为()。

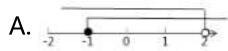
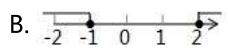
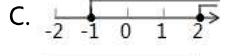
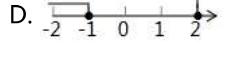


- A. $x < 4$
- B. $x < 2$
- C. $2 < x < 4$
- D. $x > 2$

- 2 不等式组 $\begin{cases} -2x < 6 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$ 的解集是()。

- A. $x > -3$
- B. $x < -3$
- C. $x > 2$
- D. $x < 2$

3 不等式组 $\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 2 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是() .

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

4 对于不等式组 $\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$ (a, b 是常数) , 下列说法正确的是() .

- A. 当 $a < b$ 时无解
- B. 当 $a \geq b$ 时无解
- C. 当 $a \geq b$ 时有解
- D. 当 $a = b$ 时有解

3. 解一元一次不等式组的步骤

(1) 求不等式组解集的过程叫做解不等式组 .

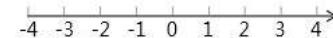
(2) 解一元一次不等式组的步骤

① 分开解 : 分别求出不等式组中各个不等式的解集 ;

② 画数轴 : 将各不等式的解集在数轴上表示出来

③ 集中判 : 在数轴上找出各不等式的解集的公共部分 , 这个公共部分就是不等式组的解集 .

1 解不等式组 $\begin{cases} 2x + 5 \geq 3 \\ 3(x - 2) < 2x - 4 \end{cases}$, 并把解集在数轴上表示出来 .



2 解不等式组 $\begin{cases} 3(x + 2) > x + 8 \\ \frac{x}{4} \geq \frac{x-1}{3} \end{cases}$, 并把它的解集在数轴上表示出来 .

4. 一元一次不等式组的整数解

先求出不等式组的解集，再从解集中找出所有整数解。

1 在 $-2 < x \leq 3$ 中，整数解有_____。

2 求适合不等式 $-11 < -2a - 5 \leq 3$ 的a的整数解。