

二元一次方程组

一、二元一次方程

1. 二元一次方程的概念

(1) 二元一次方程的概念

含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是1，像这样的方程叫做二元一次方程。

“元”是指未知数，“二元”就是指方程中含有两个未知数。

【方法】判定一个方程是二元一次方程必须同时满足三个条件：

- ①方程两边的代数式都是整式——整式方程（即分母中不含未知数）；
- ②有且只有两个未知数——“二元”；
- ③含有未知数的项的次数为1——“一次”。

【注意】“含有未知数的项的次数为1”切不可理解成两个未知数的次数都为1，如方程 $2xy + 2 = 0$ 中含有两个未知数，且未知数的次数都是1，但是含未知数项“ $2xy$ ”的次数是2，所以他不是二元一次方程。

(2) 二元一次方程的一般形式

二元一次方程的一般形式为： $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0$)。

1 方程 $2x - 3y = 5$, $xy = 3$, $x + \frac{3}{y} - 1$, $3x - y + 2z = 0$, $x^2 + y = 6$ 中是二元一次方程的有()。

- A. 1个
- B. 2个
- C. 3个
- D. 4个

2 已知方程 $(m-2)x^{n-1} + 2y^{|m-1|} = m$ 是关于 x 、 y 的二元一次方程，求 m 、 n 的值。

3 已知关于 x 、 y 的方程式 $(a^2 - 1)x^2 - (a+1)x + y = -5$ ，是二元一次方程，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 二元一次方程的解

(1) 一般地，使二元一次方程左、右两边的值相等的两个未知数的值，叫做二元一次方程的解。

$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}$ 是二元一次方程 $2x + y = 10$ 的解。

(2) 一般情况下，一个二元一次方程有无数个解。

1 在(1) $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$; (2) $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$; (3) $\begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}$; (4) $\begin{cases} x=-1 \\ y=-7 \end{cases}$ 各组数中，是方程 $2x - y = 5$ 的解是()。

- A. (2) (3)
- B. (1) (3)
- C. (3) (4)
- D. (1) (2) (4)

- 2 已知 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ 是方程 $x + ay = 3$ 的解，则 a 的值为（ ）。
- A. 0
B. 1
C. 2
D. 3

- 3 写出二元一次方程 $2x + y = 5$ 的非负整数解 _____。

二、二元一次方程组

1. 二元一次方程组的概念

方程组中有两个未知数，含有每个未知数的项的次数都是1，并且一共有两个方程，像这样的方程组叫做二元一次方程组。

如 $\begin{cases} 2x - y = 8 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$ 。

【方法】判定一个方程组是二元一次方程组的必须满足的条件：一共含有两个未知数，每个方程都是一次方程。

【注意】二元一次方程组不一定由两个二元一次方程合在一起，方程的个数可以超过两个，其中有的方程可以只有一元（一元方程在这里也可看作另一未知数系数为0的二元方程）。

如 $\begin{cases} x = 1 \\ 3y = 6 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ ， $\begin{cases} 2x = 6 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ 都是二元一次方程组。

下列方程组中，是二元一次方程组的是（ ）。

- A. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$
B. $\begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 8 \end{cases}$
C. $\begin{cases} xy = 2 \\ y = 1 \end{cases}$
D. $\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ s + y = 3 \end{cases}$

2. 二元一次方程组的解

二元一次方程组的解：二元一次方程组的两个方程的公共解，叫做二元一次方程组的解。

【注意】

①二元一次方程组的解必须满足方程组中的每一个方程，同时它也必须是一个数对，而不能是一个数，用大括号将他们联立起来。

②一般常见的二元一次方程组有唯一解，但有的方程组有无数多个解，如 $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$ 等，有的方程组无解，如 $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$ 。

③检验方程组的解的方法就是将一对数值分别代入方程组中的每一个方程，只有这对数值满足所有方程时，才能说这对数值是此方程组的解；如果这对数值不满足其中的某一个方程，那么它就不是此方程组的解。

1 二元一次方程组 $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ 的解是 () .

A. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 7 \\ y = -1 \end{cases}$

2 写一个以 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$ 为解的二元一次方程组 _____ .

3 已知 $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ 是二元一次方程组 $\begin{cases} 3x + 2y = m \\ nx - y = 1 \end{cases}$ 的解，则 $m - n$ 的值是 () .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

三、二元一次方程组的解法

消元思想：

二元一次方程组中有两个未知数，如果消去其中一个未知数，那么就把二元一次方程组转化成一元一次方程。即可先求出一个未知数，然后再求出另一个未知数，这种将未知数的个数由多化少、逐一解决的思想，叫做消元思想。

1. 代入消元法

代入法是通过等量代换，把二元一次方程组中一个方程的一个未知数用含有另一个未知数的式子表示出来，再代入另一个方程，实现消元，进而求得这个二元一次方程组的解，这种方法叫做代入消元法，简称代入法。

代入法解二元一次方程组的一般步骤：

①变：从方程组中选定一个系数比较简单的方程进行变形，将这个方程中的一个未知数 y （或 x ），用另一个未知数

如 x （或 y ）的代数式表示出来，即写成 $y = ax + b$ （或 $x = ay + b$ ）的形式；

②消：将 $y = ax + b$ （或 $x = ay + b$ ）代入另一个方程中，消去 y （或 x ），得到一个关于 x （或 y ）的一元一次方程；

③解：解这个一元一次方程，求出 x （或 y ）的值；

④回代：把求得的 x （或 y ）的值代入 $y = ax + b$ （或 $x = ay + b$ ）中，求出 y （或 x ）的值，从而得出方程组的解；

⑤写：把这个方程组的解写成 $\begin{cases} x = m \\ y = n \end{cases}$ 的形式。

【方法】一变二消三解四代五写。

【注意】

①找准消元对象，变形时，消元对象一般选取系数简单的（如系数的绝对值较小的，系数是 ± 1 的）未知数，使变形后的方程比较简单或代入后化简比较容易。

②选好回代方程，用代入法求出一个未知数的值后，再求另一个未知数时，一般代入变形后得到的方程，这样比较简单。

1 用代入消元法解方程组 $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$

2 解方程组 : $\begin{cases} 3x = 5y \textcircled{1} \\ 2x - 3y = 1 \textcircled{2} \end{cases}$

2. 加减消元法

当二元一次方程组的两个方程中同一个未知数的系数相反或相等时，把这两个方程的两边分别相加或相减，就能消去这个未知数，得到一个一元一次方程，这种方法叫做加减消元法，简称加减法。

(1) 用加减法解二元一次方程组的一般步骤：

①变换系数：把一个方程或者两个方程的两边都乘以适当的数，使两个方程里的某一个未知数的系数互为相反数或相等；

②加减消元：把变形后的两个方程的两边分别相加或相减，消去一个未知数，得到一个一元一次方程；

③解：解这个一元一次方程，求得一个未知数的值；

④回代：将求出的未知数的值代入原方程组中较简单的一个方程中，求出另一个未知数的值；

⑤写：把这个方程组的解写成 $\begin{cases} x = m \\ y = n \end{cases}$ 的形式。

【方法】一变二消三解四代五写。

(2) 加减消元方法的选择：

①一般选择系数绝对值最小的未知数消元；

②当某一未知数的系数互为相反数时，用加法消元；当某一未知数的系数相等时，用减法消元；

③某一未知数系数成倍数关系时，直接对一个方程变形，使其系数互为相反数或相等，再用加减消元求解；

④当相同的未知数的系数都不相同时，找出某一个未知数的系数的最小公倍数，同时对两个方程进行变形，转化为系数的绝对值相同，再用加减消元求解。

1 利用加减消元法解方程组 $\begin{cases} 2x + 5y = -10 \quad \textcircled{1} \\ 5x - 3y = 6 \quad \textcircled{2} \end{cases}$ ，下列做法正确的是()。

- A. 要消去 y ，可以将 $\textcircled{1} \times 5 + \textcircled{2} \times 2$
- B. 要消去 x ，可以将 $\textcircled{1} \times 3 + \textcircled{2} \times (-5)$
- C. 要消去 y ，可以将 $\textcircled{1} \times 5 + \textcircled{2} \times 3$
- D. 要消去 x ，可以将 $\textcircled{1} \times (-5) + \textcircled{2} \times 2$

2 解方程组 : $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 2 \textcircled{1} \\ 2x + 3y = 28 \textcircled{2} \end{cases}$

3 若 $|3a + 2b + 7| + (5a - 2b + 1)^2 = 0$ ，则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4 甲、乙二生同解关于 x 、 y 的二元一次方程组 $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx - 7y = 8 \end{cases}$ ，甲生得正确解为 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ ；乙生将 c 看错，得其解为 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ ，求 a 、 b 、 c 的值。

3. 巧解二元一次方程组

1 已知 $\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$ ，则 $x + y = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $x - y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2 解方程组 : $\begin{cases} 23x + 17y = 63 \\ 17x + 23y = 57 \end{cases}$

3 已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} ax + by = 7 \\ bx + ay = 8 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$, 那么关于 m, n 的二元一次方程组 $\begin{cases} a(m+n) + b(m-n) = 7 \\ b(m+n) + a(m-n) = 8 \end{cases}$ 的解为 _____.

4 解方程组 : $\begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 6 \\ 3(x+y) = 4(x-y) \end{cases}$

5 三个同学对问题 “若方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 12 \\ y = 5.6 \end{cases}$, 求方程组 $\begin{cases} 3a_1x + 2b_1y = 5c_1 \\ 3a_2x + 2b_2y = 5c_2 \end{cases}$ 的解.” 提出各自的想法. 甲说：“这个题目好象条件不够，不能求解”；乙说：“它们的系数有一定的规律，可以试试”；丙说：“能不能把第二个方程组的两个方程的两边都除以5，通过换元替代的方法来解决”. 参考他们的讨论，请你求出这个题目的解.

4. 二元一次方程的特殊解

1 如果 $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - (m-1)y = 6 \end{cases}$ 中的解 x, y 相同，则 m 的值是（ ）.

- A. 1
- B. -1
- C. 2
- D. -2

2 已知方程组 $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ ax + by = 2 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 3x - 5y = 6 \\ bx + ay = -4 \end{cases}$ 有相同的解，则 a, b 的值分别为 _____.

3 当 a 为何值时，方程组 $\begin{cases} 2x + ay = 16 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ 有正整数解？并求出正整数解.

四、二元一次方程组解的情况

(1) 在 x, y 的方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 中， $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 均为已知数，(a_1 与 b_1, a_2 与 b_2 都至少有一个不等于0)，则有：由①× b_2 -②× b_1 得： $(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$ ，

由①× a_2 -②× a_1 得： $(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$ ，

当 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ 时，方程组有唯一一组解；

当 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ，且 $b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0$ ， $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ 时，方程组无解；

当 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ，且 $b_2c_1 - b_1c_2 = 0$ ， $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ 时，方程组有无穷多组解.

(2) 由(1)可整理成二元一次方程组 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的解的情况有以下三种：

① 当 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ 时，方程组有无数多解；(\because 两个方程等效)

② 当 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ 时，方程组无解；(\because 两个方程是矛盾的)

③ 当 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (即 $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$) 时，方程组有唯一的解： $\begin{cases} x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{cases}$ (这个解可用加减消元法求得).

【注意】

①方程的个数少于未知数的个数时，一般是不定解，即有无数多解，若要求整数解，可按二元一次方程整数解的求法进行。

②求方程组中的待定系数的取值，一般是求出方程组的解（把待定系数当已知数），再解含待定系数的不等式或加以讨论。

1 关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} 4x + 4ky + 1 = 0 \\ 8y - 4x = 1 \end{cases}$ 有无穷多组解，求 k 的值。

2 当 a ， b 满足什么条件时，方程 $(b - 3)x = 3$ 与方程组 $\begin{cases} ax - y = 1 \\ 3x - 2y = b - 5 \end{cases}$ 都无解。

五、二元一次方程组的应用题

列方程组解应用题的一般步骤：

- ①审：审题，搞清楚已知量和待求量。
- ②找：找出题目中蕴含的等量关系。
- ③设：设未知数。四种设未知数的方法：直接设元、间接设元、辅助设元、整体设元。
- ④列：列方程组。
- ⑤解：解方程组。
- ⑥验：检验方程组的解是不是原方程组的解，是否符合实际意义。
- ⑦答：作答。

【注意】

- ①审题是很重要的，应反复阅读题目，用笔画出关键的语句，再找出数量之间的关系；
- ②一般求解的几个未知量可直接设几个未知数，也可多设或少设。除直接设未知数外，也可以间接设未知数；
- ③所设未知数的单位可以与题目中要求的不同，但所列各方程的同一未知数的单位要一致，每个方程两边单位要一致，答与问的单位要一致；
- ④检验包含两方面的含义：首先要检验未知数的值是不是原方程（组）的解；其二是检验未知数的值是否符合实际意义。

1 每个木工一天能装双人课桌（一张课桌配两把椅子）4张或单人椅子10把，现有木工9人，怎样分配工作才能使一天装配的课桌与椅子配套？设安排 x 个木工装配课桌， y 个木工装配椅子，则下列方程组正确的（ ）。

- A. $\begin{cases} x + y = 9 \\ 2 \times 4x = 10y \end{cases}$
- B. $\begin{cases} x + y = 9 \\ 4x = 20y \end{cases}$
- C. $\begin{cases} x + y = 9 \\ 4x = y \end{cases}$
- D. $\begin{cases} x + y = 9 \\ 4x = 10y \end{cases}$

2 某一天，蔬菜经营户老李用了145元从蔬菜批发市场批发一些黄瓜和茄子，到菜市场去卖，黄瓜和茄子当天的批发价与零售价如下表所示：

品名	黄瓜	茄子
批发价（元/千克）	3	4
零售价（元/千克）	4	7

当天他卖完这些黄瓜和茄子共赚了90元，这天他批发的黄瓜和茄子分别是多少千克？

- 3 《九章算术》中记载一个这样的问题“五只雀、六只燕，共重1斤（等于16两），雀重燕轻，互换其中一只，恰好一样重，问：每只雀、燕的重量各为多少？”如果设雀重 x 两，燕重 y 两，根据题意列出方程组为_____.

- 4 如图所示，长方形ABCD中放置9个形状、大小都相同的小长方形，则图中阴影部分的面积是多少？

