

# 二次根式的有关概念

## 一、二次根式

### 1. 二次根式

形如 $\sqrt{a}$  ( $a \geq 0$ ) 的式子叫作二次根式， “ $\sqrt{\phantom{x}}$ ” 称为二次根号。

**【注意】**

(1) 二次根式中，被开方数 $a$ 可以是数，也可以是单项式，多项式，分式等代数式。

(2)  $a \geq 0$  是 $\sqrt{a}$  为二次根式的前提条件。

(3) 形如 $m\sqrt{n}$  ( $n \geq 0$ ) 的式子也是二次根式，它表示 $m$ 与 $\sqrt{n}$ 的乘积。

1 判下列式子，哪些是二次根式，哪些不是二次根式： $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt[4]{4}$ 、 $\sqrt[3]{3}$ 、 $\frac{1}{x}$ 、 $\sqrt{x}$  ( $x > 0$ )、 $\sqrt{0}$ 、 $\sqrt[4]{2}$ 、 $\frac{1}{x+y}$ 、 $\sqrt{x+y}$  ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ )。

2 化简成最简二次根式： $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

### 2. 确定二次根式所含字母的取值范围

若二次根式有意义，只要被开方数大于或等于零即可。即当 $a \geq 0$ 时， $\sqrt{a}$ 有意义。

1 当 $x$ 为何值时，下式有意义： $\sqrt{x-1}$ 。

2 要使二次根式 $\frac{1}{x+1} + \sqrt{\frac{5}{x-3}}$ 有意义，则字母 $x$ 的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

## 二、二次根式的性质

### 1. 二次根式的性质

(1)  $\sqrt{a} \geq 0$  ( $a \geq 0$ ) 具有双重非负性。

(2)  $(\sqrt{a})^2 = a$  ( $a \geq 0$ )。

(3)  $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$  或  $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$  或  $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ -a & (a \leq 0) \end{cases}$ 。

**【注意】**

(1) 化简 $\sqrt{a^2}$ 时，一般先将它化成 $|a|$ ，再根据绝对值的意义进行化简。

(2)  $(\sqrt{a})^2$  与  $\sqrt{a^2}$  的区别和联系。

区别： $\sqrt{a^2}$  中的 $a$ 可以取任意实数，而 $(\sqrt{a})^2$  中的 $a$ 必须是非负数。当 $a < 0$ 时， $(\sqrt{a})^2$  无意义，而 $\sqrt{a^2} = -a$ 。

联系：当 $a \geq 0$ 时， $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$ 。

1  $\sqrt{3^2}$  的值是 ( )。

A. 3

B. -3

- C.  $\pm 3$   
D. 6

2 当  $x = -3$  时， $\sqrt{x^2}$  的值是（ ）.

- A.  $\pm 3$   
B. -3  
C. 3  
D. 9

3 当  $x \geq 5$  时， $\sqrt{(x-5)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4 计算：

1  $(\sqrt{\frac{3}{4}})^2$ .

2  $(3\sqrt{4})^2$ .

3  $(-\sqrt{5})^2$ .

4  $(\frac{\sqrt{3}}{2})^2$ .

## 2. 积、商的算术平方根的性质

(1) 积的算术平方根的性质： $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  ( $a \geq 0, b \geq 0$ ) .

(2) 商的算术平方根的性质： $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  ( $a \geq 0, b > 0$ ) .

如果  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-3} = \sqrt{x(x-3)}$ ，那么（ ）.

- A.  $x \geq 0$   
B.  $x \geq 3$   
C.  $0 \leq x \leq 3$   
D.  $x$  为任意实数

## 三、非负数的三种常见形式

### 1. 绝对值

$$|a| \geq 0.$$

### 2. 偶次幂

$$a^{2n} \geq 0 \text{ ( } n \text{ 为正整数) .}$$

### 3. 二次根式

$\sqrt{a} \geqslant 0$  ( $a \geqslant 0$ ) .

1 已知 $(2a+1)^2 + \sqrt{b-1} = 0$  , 则 $-a^2 + b^{2012} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

2 已知:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ 满足 $\frac{1}{2}|a-b| + \sqrt{2b+c} + c^2 - 4c + 4 = 0$  , 求 $(c-b)^a$ 的值 .

#### 四、常考题型

##### 1. 根据字母的取值范围化简二次根式

1 已知 $a < 0$  , 化简二次根式 $\sqrt{-a^3b}$ 的正确结果是( ) .

- A.  $a\sqrt{ab}$
- B.  $-a\sqrt{ab}$
- C.  $-a\sqrt{-ab}$
- D.  $a\sqrt{-ab}$

2 已知 $1 < p < 2$  , 化简 $\sqrt{(p-1)^2} + \sqrt{(p-2)^2}$ 的值 .

3 有理数 $a$ ,  $b$ ,  $c$ 在数轴上的位置如图所示 , 0为原点 , 化简代数式

$$\sqrt{(a+b)^2} - \sqrt{(-c)^2} + (\sqrt{c-b})^2 - (\sqrt{-b})^2 \text{ 的值为( ) .}$$



- A.  $-a - b$
- B.  $a + b$
- C. 0
- D.  $-2b - a$

##### 2. 根据二次根式的化简结果确定字母的取值范围

1 若 $\sqrt{(a-3)^2} = a-3$  , 则 $a$ 的取值范围是( ) .

- A.  $a > 3$
- B.  $a \geqslant 3$
- C.  $a < 3$
- D.  $a \leqslant 3$

2 把 $m\sqrt{-\frac{1}{m}}$ 跟号外的因式移到根号内 , 得( ) .

- A.  $\sqrt{m}$
- B.  $-\sqrt{m}$
- C.  $-\sqrt{-m}$
- D.  $\sqrt{-m}$

##### 3. 利用二次根式的性质求字母(或代数式)的最小(大)值

代数式 $7 - \sqrt{(12 - x)^2 + 9}$ 的最大值是 \_\_\_\_\_ , 此时 $x = \text{_____}$  .