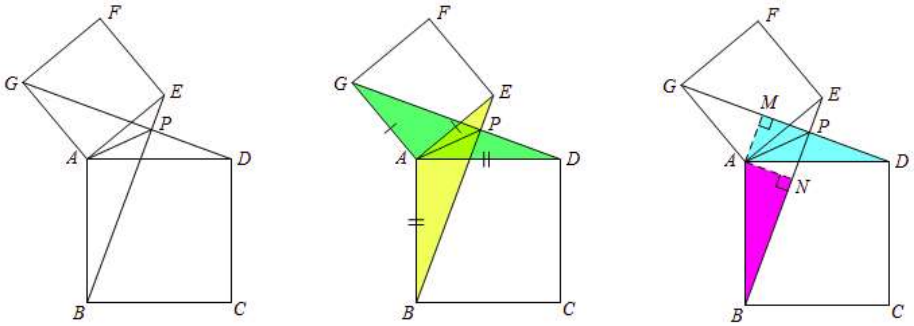
爱智康
gz.jiajiaoban.com
咨询热线：4000-121-121

正方形的综合

一、手拉手旋转模型

1．直角的手拉手模型

已知：如图，四边形$ABCD$、$AEFG$都是正方形，连接BE、DG，BE与DG交于点P．



【结论】

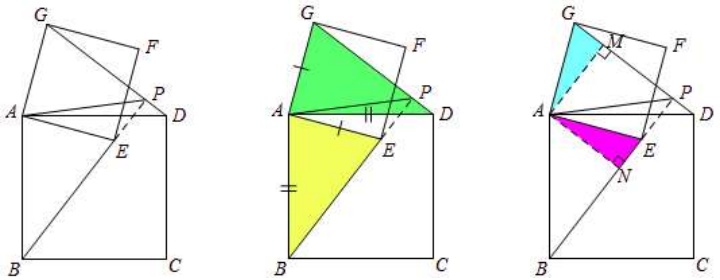
①$\triangle BAE \cong \triangle DAG$；

②$BE=DG$，$BE \perp DG$；

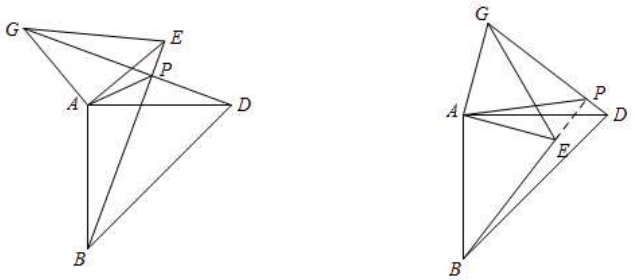
③AP平分$\angle BPG$．

爱智康 2017/07/13

【变形一】绕点A旋转$AEFG$，以上结论均成立．



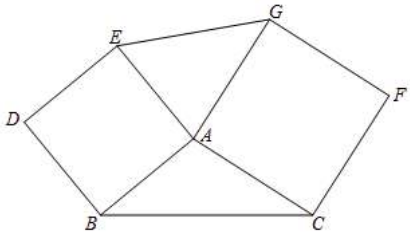
【变形二】将正方形变成等腰直角三角形，以上结论均成立．



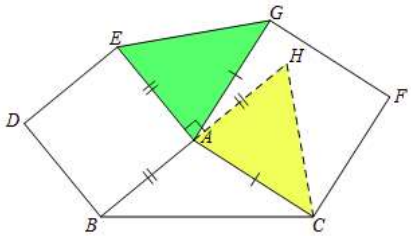
2．形外形

（1）以$\triangle ABC$的AB、AC边向外分别作正方形$ABDE$、$ACFG$，则$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AEG}$．

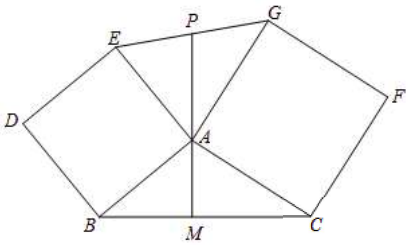
爱智康
gz.jiajiaoban.com
咨询热线：4000-121-121



【辅助线】延长BA至点H，出现“等线段，共顶角，顶角等”，因此手拉手全等，$\triangle AEG\cong\triangle AHC$，再根据$\triangle ABC$和$\triangle AHC$等底同高，从而面积相等．



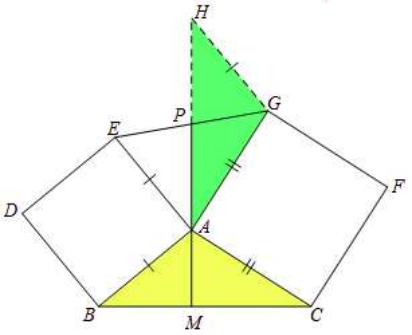
$AM\perp EG$（2）以$\triangle ABC$的AB、AC边向外分别作正方形$ABDE$、$ACFG$，点P为EG中点，则$BC=2AP$，$AM\perp BC$．



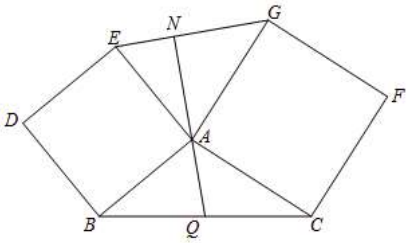
【辅助线】利用倍长中线法解题：

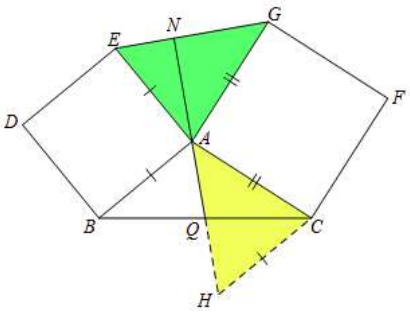
①倍长中线得到$\triangle APE\cong\triangle HPG$，从而得到$AE//HG$，$\angle EAG+\angle AGH=180^\circ$，$\angle AGH=\angle CAB$，

②利用SAS推出$\triangle AGH\cong\triangle CAB$，从而得到$BC=2AP$，$\angle GAH=\angle ACB$，$AM\perp EG$．



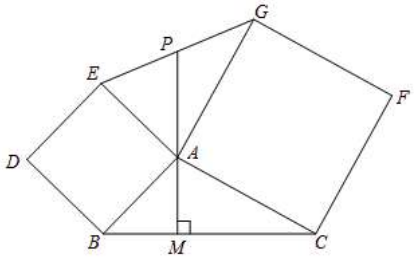
【变形】若条件变成点Q为BC中点，则$EG=2AQ$，$AN\perp EG$．





（3）以$\triangle ABC$的AB、AC边向外分别作正方形$ABDE$、$ACFG$，$AM\perp BC$，AM反向延长线交EG于P，则点P为EG中点，$BC=2AP$．

爱智康
gz.jiajiaoban.com
咨询热线：4000-121-121



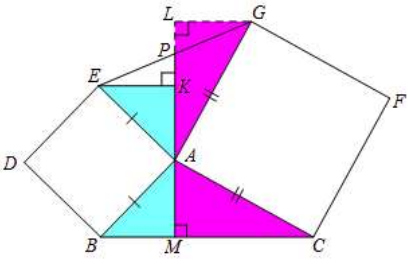
【辅助线】利用一线三垂直解题：

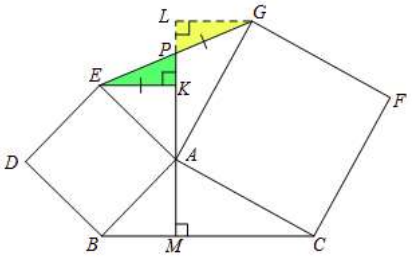
①过点E作$EK\perp MP$于K，过点G作$GL\perp MP$的延长线于点L，

②易证$\triangle AMB\cong\triangle EKA$，$\triangle AMC\cong GLA$，从而得到$AM=EK=GL$，

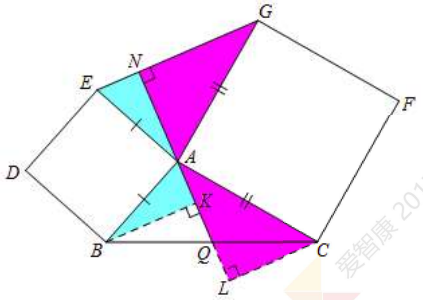
③利用AAS推出$\triangle PEK\cong\triangle PGL$，从而得到点$P$为$EG$中点，$PK=PL$，

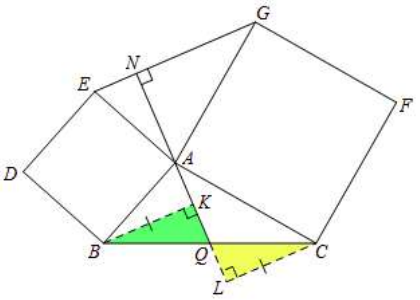
④根据$BM=AK$，$CM=AL$，$PK=PL$，可推出$BC=2AP$．





【变形】若条件变成$AN\perp EG$，AN反向延长线交BC于Q，则点Q为BC中点，$EG=2AQ$．



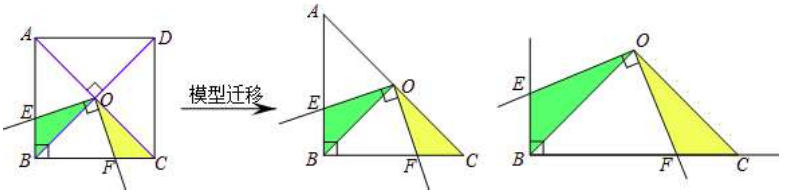


爱智康 2017/07/13

二、对角互补模型（垂直）

1．对角互补模型（垂直）

如图，正方形$ABCD$，对角线AC、BD交于点O，$\angle EOF=90^{\circ}$，与正方形的两边分别交于点E、F．



【结论】

①$\triangle BOE\cong\triangle COF$，$\triangle AOE\cong\triangle BOF$．

②$OE=OF$，$EF=\sqrt{2}OE$．

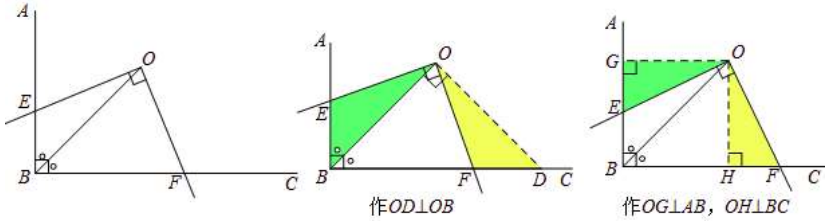
③$S_{四边形OEBF}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$．

【辅助线】

①过点O作$OD\perp OB$，根据等腰三角形的判定得$OB=OD$，再利用ASA或AAS推出$\triangle OBE\cong\triangle ODF$．

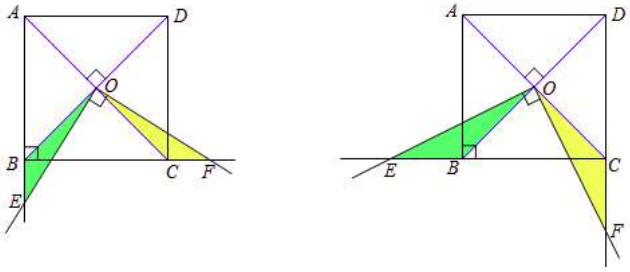
②过点O作$OG\perp AB$，$OH\perp BC$，根据角平分线的性质得$OG=OH$，再利用ASA或AAS推出$\triangle OGE\cong\triangle OHF$．

爱智康
gz.jiajiaoban.com
咨询热线：4000-121-121



2．对角互补模型的变形（垂直）

如图，正方形$ABCD$，对角线AC、BD交于点O，$\angle EOF=90^{\circ}$，旋转$\angle EOF$与正方形的两边延长线分别交于E、F．



【结论】

①$\triangle BOE\cong\triangle COF$，$\triangle AOE\cong\triangle BOF$．

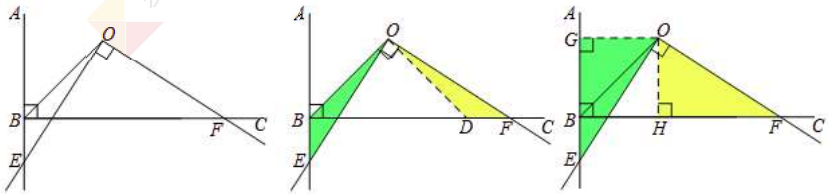
②$OE=OF$，$EF=\sqrt{2}OE$．

③图一：$S_{\triangle OBF}-S_{\triangle OBE}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$；图二：$S_{\triangle OCE}-S_{\triangle OCF}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$．．

【辅助线】

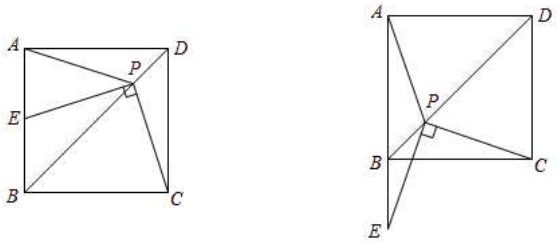
①过点O作$OD\perp OB$，根据等腰三角形的判定得$OB=OD$，再利用ASA或AAS推出$\triangle OBE\cong\triangle ODF$．

②过点O作$OG\perp AB$，$OH\perp BC$，根据角平分线的性质得$OG=OH$，再利用ASA或AAS推出$\triangle OGE\cong\triangle OHF$．



3．对角互补模型拓展

如图，正方形$ABCD$，点P是对角线BD上一点，$PE\perp PC$交AB或AB的延长线于点E，则$PA=PC=PE$．

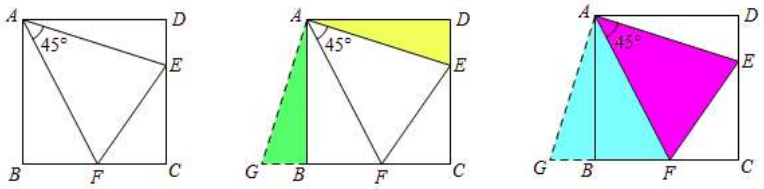


三、角含半角模型（直角）

1．正方形中的角含半角模型（直角）

爱智康
gz.jiajiaoban.com
咨询热线：4000-121-121

如图，正方形$ABCD$，点E在边CD上，点F在边BC上，$\angle EOF=45^\circ$．



【辅助线】延长BC至点G，使$BG=DE$，连接AG．

【结论】

①利用SAS推出$\triangle ABG\cong\triangle ADE$，$AG=AE$，$\angle FAG=\angle FAE$．

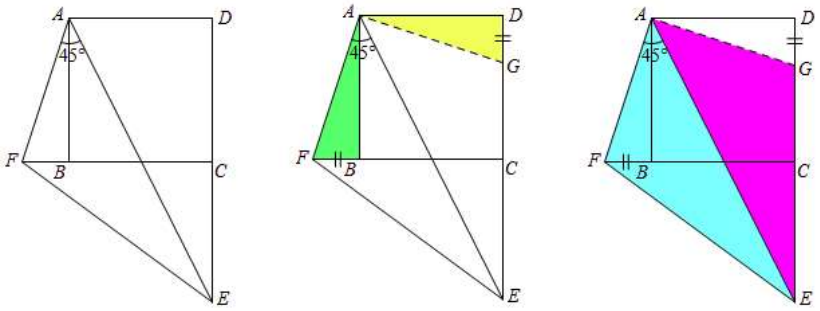
②利用SAS推出$\triangle FAG\cong\triangle FAE$，$FG=EF$．

③$EF=BF+DE$，进而推出$\triangle CEF$的周长等于正方形周长的一半．

④AF平分$\angle BFE$，AE平分$\angle DEF$．

2．正方形中的角含半角模型的变形（直角）

如图，正方形$ABCD$，$\angle EOF=45^\circ$，旋转$\angle EOF$与DC的延长线交于点E，与CB的延长线交于点F．



【辅助线】在CD截取$DG=BF$，连接AG．

【结论】

①利用SAS推出$\triangle ABF\cong\triangle ADG$，$AG=AE$，$\angle EAG=\angle EAF$．

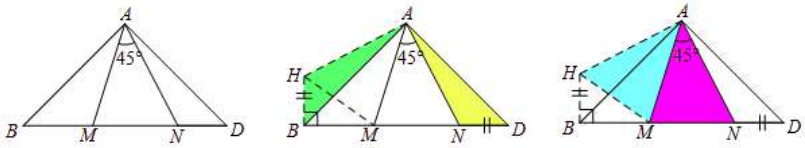
②利用SAS推出$\triangle EAG\cong\triangle EAF$，$EG=EF$．

③$EF=DE-BF$．

④AE平分$\angle DEF$．

3．等腰直角三角形中的角含半角模型（直角）

如图，等腰直角$\triangle ABD$，$AB=AD$，$\angle BAD=90^\circ$，$\angle MAN=45^\circ$．



【辅助线】过点B作$BH\perp BD$，并截取$BH=DN$，连接AH，MH．

【结论】

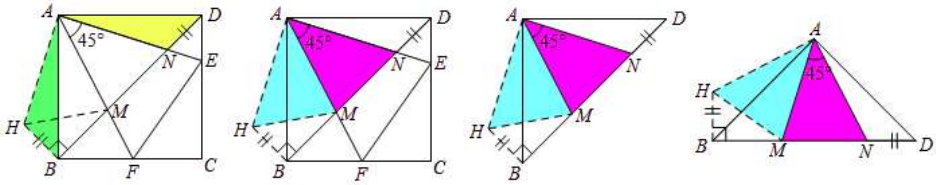
①利用SAS推出$\triangle ABH\cong\triangle ADN$，$AH=AN$，$\angle BAH=\angle DAN$．

②利用SAS推出$\triangle MAH\cong\triangle MAN$，$MH=MN$．

爱智康
gz.jiajiaoban.com
咨询热线：4000-121-121

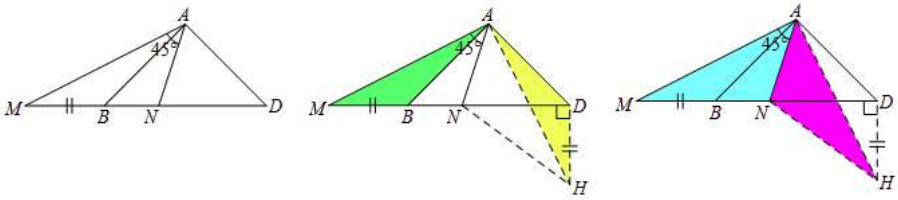
③$MN^2=BM^2+DN^2$.

【模型的演变】



4．等腰直角三角形中的角含半角模型的变形（直角）

如图，等腰直角$\triangle ABD$，$AB=AD$，$\angle BAD=90^\circ$，$\angle MAN=45^\circ$.



【辅助线】过点D作$DH\perp BD$，并截取$DH=BM$，连接AH，NH .

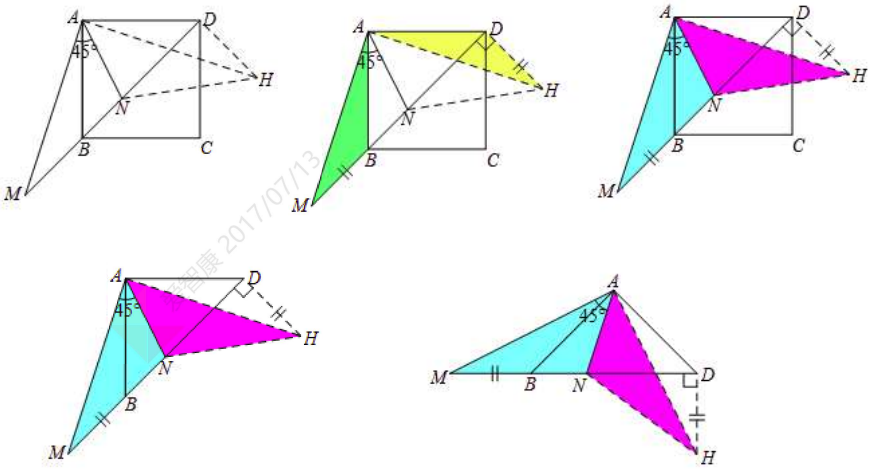
【结论】

①利用SAS推出$\triangle ADH\cong\triangle ABM$，$AH=AM$，$\angle DAH=\angle BAM$.

②利用SAS推出$\triangle NAH\cong\triangle NAM$，$NH=MN$.

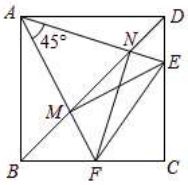
③$MN^2=BM^2+DN^2$.

【模型的演变】



5．【归纳】角含半角模型（直角）

如图，已知正方形$ABCD$中，$\angle EAF=45^\circ$，连接BD与AE、AF分别交于N、M .



【结论】

①$EF=BF+DE$.

爱智康
gz.jiajiaoban.com
咨询热线：4000-121-121

②$\triangle CEF$的周长等于正方形边长的2倍．

③AE平分$\angle DEF$，AF平分$\angle BFE$．

④点A到EF的距离等于正方形边长．

⑤$MN^2=BM^2+DN^2$ ．