

正方形



一、正方形

1. 正方形的定义



有一组邻边相等，并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形。

二、正方形的性质

1. 正方形的性质

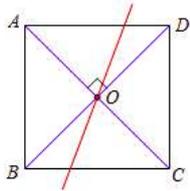
正方形是特殊的平行四边形，既是矩形，又是菱形，因此它具有前三者的所有性质。

图形	性质		符号表示
正方形ABCD 	边	正方形的四条边都相等 正方形的对边平行	$AB = BC = CD = DA$ $AB \parallel CD, AD \parallel BC$
	角	正方形的四个角都是直角	$\angle ABC = \angle BCD =$ $\angle CDA = \angle DAB = 90^\circ$
	对角线	正方形的对角线相等且互相垂直平分 正方形的每一条对角线平分一组对角	$AC = BD, AC \perp BD$ $OA = OC = OB = OD$ AC 平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ BD 平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$

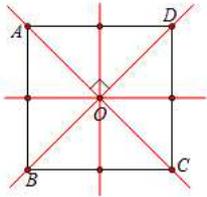
2. 正方形的对称性

正方形是中心对称图形，也是轴对称图形。

①正方形的对称中心是对角线的交点，过这点的任意直线可将正方形分成两个全等的图形。



② 正方形有4条对称轴，它的对角线所在的直线和过对边中点的直线就是它的对称轴。



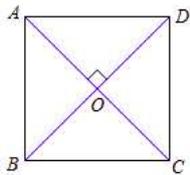
【总结】

① 正方形的四条边都相等，对边平行，邻边垂直；四个角都是直角；两条对角线相等且互相垂直平分，每条对角线平分一组对角。

② 全等三角形有： $\triangle ABC \cong \triangle BAD \cong \triangle ADC \cong \triangle BCD$ ，
 $\triangle AOB \cong \triangle COD \cong \triangle AOD \cong \triangle COB$ 。

③ 对角线将正方形分成4个全等的等腰直角三角形。

④ 图中所有三角形都是等腰直角三角形。



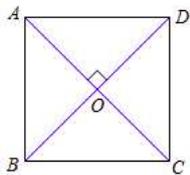
3. 正方形的周长和面积

(1) 正方形的周长：边长的4倍。如图，周长 $C = 4AB$ 。

(2) 正方形的面积：

① 边长的平方。如图，面积 $S_{\text{正方形}ABCD} = AB^2$ 。

② 对角线平方的一半。如图，面积 $S_{\text{正方形}ABCD} = \frac{1}{2}AC^2$ 。



三、正方形的判定



🐾 (1) 有一组邻边相等的矩形是正方形。

🐾 (2) 有一个角是直角的菱形是正方形。

【总结】

① 证明一个四边形是正方形，可以先证它是矩形，再证它是菱形。

② 证明一个四边形是正方形，可以先证它是菱形，再证它是矩形。

四、中点四边形总结

顺次连接四边形 $ABCD$ 各边的中点 E, F, G, H , 所得到的新四边形 $EFGH$ 称为中点四边形.



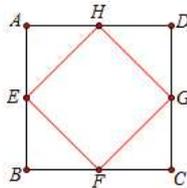
如图： E, F, M, N 分别是四边形 $ABCD$ 的各边中点.

求证：四边形 $EFMN$ 为平行四边形.



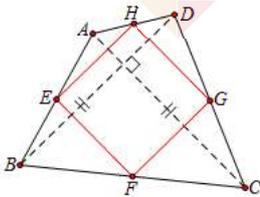
【总结】

- ①任意四边形的中点四边形是——平行四边形.
- ②平行四边形的中点四边形是——平行四边形.
- ③矩形的中点四边形是——菱形.
- ④菱形的中点四边形是——矩形.
- ⑤正方形的中点四边形是——正方形.



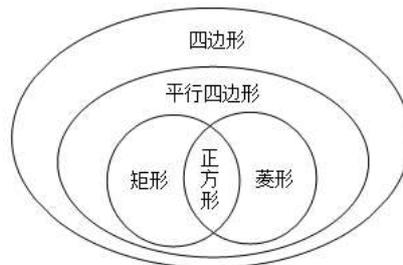
【推广】

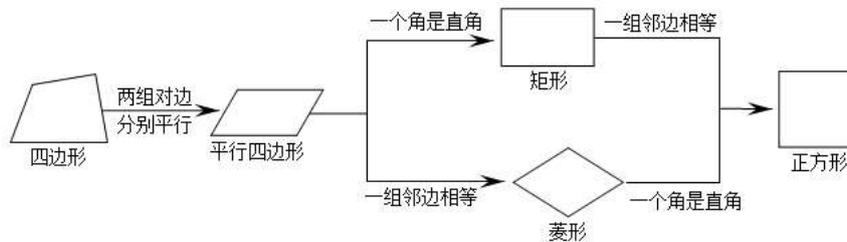
- ①对角线相等的四边形的中点四边形是——菱形.
- ②对角线垂直的四边形的中点四边形是——矩形.
- ③对角线相等且垂直的四边形的中点四边形是——正方形.



五、平行四边形小结

1. 四边形知识结构图





2. 平行四边形的性质

	图形	边	角	对角线	对称性
平行四边形		对边平行且相等	对角相等 邻角互补	互相平分	中心对称图形
矩形		对边平行且相等 邻边垂直	四个角都是直角	相等且平分	轴对称图形 中心对称图形
菱形		对边平行 四条边都相等	对角相等 邻角互补	垂直且平分 平分对角	轴对称图形 中心对称图形
正方形		对边平行 邻边垂直 四条边都相等	四个角都是直角	垂直平分且相等 平分对角	轴对称图形 中心对称图形

3. 特殊平行四边形的判定

	边	角	对角线
平行四边形	①两组对边分别平分 ②两组对边分别相等 ③一组对边平行且相等	④两组对角分别相等	⑤两条对角线互相平分
矩形		①有一个角是直角的平行四边形 ②有三个角是直角的四边形	③两条对角线相等的平行四边形
菱形	①有一组邻边相等的平行四边形 ②四条边都相等的四边形		③两条对角线互相垂直平分的四边形
正方形	①一组邻边相等的矩形	②有一个角是直角的菱形	

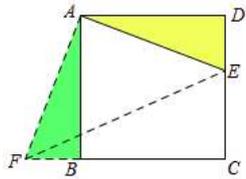
【方法】平行四边形，矩形，菱形，正方形的判定个数为“5332”

六、正方形的有关模型

1. 正方形旋转的基本模型

(1) 如图，正方形 $ABCD$ ，将 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle ABF$ ，则 $\triangle EAF$ 为等腰直角三角形，

$$S_{\text{四边形} AFCE} = S_{\text{正方形} ABCD} .$$



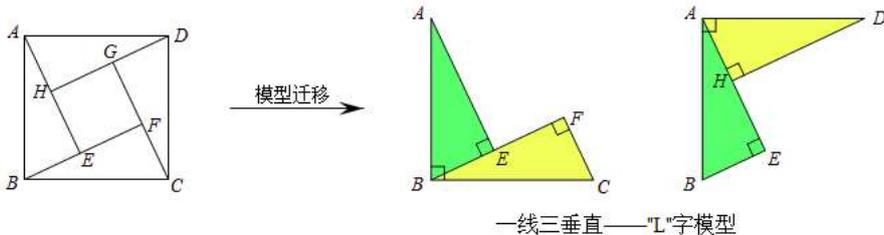
【注意】辅助线为延长 CB 至点 F ，使 $BF = DE$ ，再证明 $\triangle BAF \cong \triangle DAE$ 。

(2) 如图，正方形 $ABCD$ ，将 $\triangle ABE$ 绕点 B 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle CBF$ ， $\triangle EBF$ 为等腰直角三角形。



2. 勾股弦图

在正方形 $ABCD$ 中， $AE \perp BF$ ， $BF \perp CG$ ， $CG \perp DH$ ， $DH \perp AE$ 。



【结论】

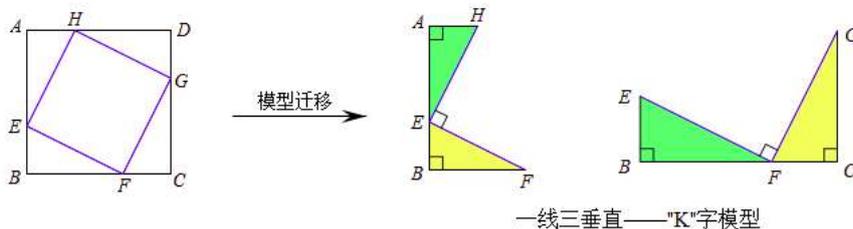
①利用AAS或ASA推出 $\triangle AEB \cong \triangle BFC \cong \triangle CGD \cong \triangle DHA$ ，从而推出四边形 $EFGH$ 为正方形。

② $AE - CF = EF$ 。

【方法】遇到直线上出现两个直角的题型可以考虑构造一线三垂直模型进行证明计算。

3. 弦图变形一

在正方形 $ABCD$ 中， $AE = BF = CG = DH$ 。



【结论】利用SAS推出 $\triangle AEH \cong \triangle BFE \cong \triangle CGF \cong \triangle DHG$ ，从而推出四边形 $EFGH$ 为正方形。

【方法】遇到直线上出现两个直角的题型可以考虑构造一线三垂直模型进行证明计算。

4. 弦图变形二

在正方形 $ABCD$ 中， $AH = BE = CF = DG$ 。

【结论】利用SAS推出 $\triangle DAH \cong \triangle ABE \cong \triangle BCF \cong \triangle CDG$ ，从而推出 $DH = AE = BF = CG$ ， $AE \perp BF$ ，四边形 $MNPQ$ 为正方形。

【注意】本模型与“L”模型有区别，如果“L”模型无法解题，可以考虑构造本模型进行证明计算。

5. 弦图变形二的拓展

①已知在正方形 $ABCD$ 中， $AE = MN$ ，则 $AE \perp MN$ 。

②反之，已知在正方形 $ABCD$ 中， $AE \perp MB$ ，则 $AE = MN$ 。

【辅助线】过点 B 作 $BF \parallel MN$ ，证明 $\triangle ABE \cong \triangle BCF$ ，或过点 M 作 $MH \perp CD$ ，再证明 $\triangle ABE \cong \triangle MHN$ 即可。