第31届全国中学生物理竞赛预赛试卷参考解答与评分标准

一、选择题．

本题共5小题，每小题6分．在每小题给出的4个选项中，有的小题只有一项符合题意，有的小题有多项符合题意．把符合题意的选项前面的英文字母写在每小题后面的方括号内．全部选对的得6分，选对但不全的得3分，有选错或不答的得0分．

1．D；2．C；3．AD；4．A；5．BCD；

二、填空题．把答案填在题中的横线上．只要给出结果，不需要写出求得结果的过程．

6．（10分）

答：$0.022 \sim 0.024\,\text{mm}$，3分

$3.772 \sim 3.774\,\text{mm}$，3分

$3.748 \sim 3.752\,\text{mm}$，4分（若有效位数错，不给这4分）

7．（10分）

答案：$1.5\,\text{m/s}^2$，5分；$4.5\times10^4\,\text{J}$，5分

8．（10分）

答案：（1）右，f，实，倒，1．每空1分；

（2）左，$2f$，实，倒，1．每空1分．

9．（10分）

答案：等压，2分；等容，2分；nR，6分

10．（10分）

答案：3.6×10^{-2}，5分；8.8×10^{7}，5分

三、计算题．

计算题的解答应写出必要的文字说明、方程式和重要的演算步骤，只写出最后结果的不能得分．有数值计算的，答案中必须明确写出数值和单位．

11．（15分）

解法一：

由折射定律得

$\sin\theta_i = n\sin\theta_d$ ①

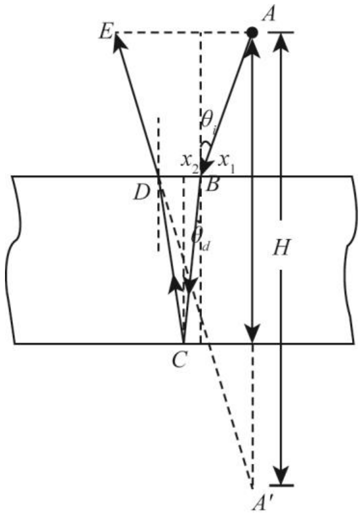
由几何关系得

$x_1 = h\tan\theta_i$ ②

$x_2 = t\tan\theta_d$ ③

$H = 2\left(x_1 + x_2\right)\tan\left(90^\circ - \theta_i\right)$ ④

式中，H 为物 A 到像 A' 的距离.



在小角度近似下有

$\tan\theta_i \approx \sin\theta_i$，

$\tan\theta_d \approx \sin\theta_d$，

$$\tan(90° - \theta_i) \approx \frac{1}{\sin\theta_i} \quad ⑤$$

联立以上各式得

$$H = 2\left(H + \frac{t}{n}\right) \quad ⑥$$

解法二：
由折射定律得

$$\sin\theta_i = n\sin\theta_d \quad ①$$

由几何关系有

$$x_1 = h\tan\theta_i \quad ②$$

$$x_2 = t\tan\theta_d \quad ③$$

$$H - h = (x_1 + 2x_2)\tan(90° - \theta_i) \quad ④$$

式中，H 为物 A 到像 A' 的距离.
利用小角度近似关系

$$\tan\theta_i \approx \sin\theta_i，\ \tan\theta_d \approx \sin\theta_d，\ \tan(90° - \theta_i) \approx \frac{1}{\sin\theta_i} \quad ⑤$$

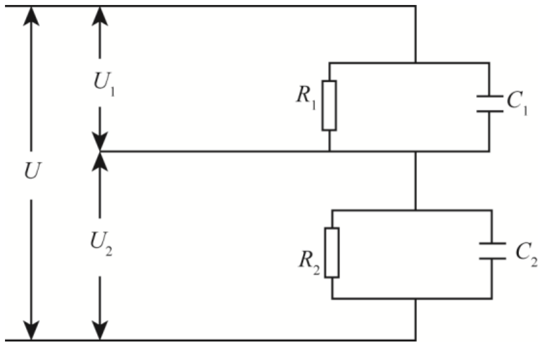
得 $h + \dfrac{2t}{n} = H - h$
像 A' 与 A 点的距离为

$$H = 2\left(h + \frac{t}{n}\right) \quad ⑥$$

评分标准：①式 3 分，②③④式各 2 分，⑤⑥式各 3 分.

12.（20 分）

（1）等效电路如图所示.



（2）等效电容 C_1 和 C_2 为

$$C_1=\frac{\varepsilon_1 A}{d_1},\quad C_2=\frac{\varepsilon_2 A}{d_2} \qquad ①$$

等效电阻 R_1 和 R_2 为

$$R_1=\frac{d_1}{\sigma_1 A},\quad R_2=\frac{d_2}{\sigma_2 A} \qquad ②$$

两层电介质所损耗的功率为

$$P=\frac{U^2}{R_1+R_2}=\frac{U^2 A\sigma_1\sigma_2}{d_1\sigma_2+d_2\sigma_1} \qquad ③$$

（3）设两层介质各自上下界面之间的电压分别为 U_1 和 U_2．上层介质面上的电荷为

$$Q_1=C_1U_1=\frac{\varepsilon_1 U}{d_1}\cdot\frac{R_1U}{R_1+R_2}=\frac{\varepsilon_1\sigma_2 AU}{d_1\sigma_2+d_2\sigma_1} \qquad ④$$

下层介质面上的电荷为

$$Q_2=C_2U_2=\frac{\varepsilon_2\sigma_1 AU}{d_1\sigma_1+d_2\sigma_1} \qquad ⑤$$

两层介质交界面处的净电荷量为

$$Q_1-Q_2=\frac{AU}{d_1\sigma_2+d_2\sigma_1}\left(\varepsilon_1\sigma_2-\varepsilon_2\sigma_1\right) \qquad ⑥$$

评分标准：第（1）问 4 分，等效电路图正确（没标注相应字母和箭头的，也算正确），4 分；第（2）问 9 分，①②③式各 3 分；第（3）问 7 分，④⑤式各 2 分，⑥式 3 分.

13.（20 分）

沿着电流强度 I 的方向液柱长度为 a，该液柱受到的安培力大小为：

$$F_m=BIa \qquad ①$$

液柱两侧面受到的由压强差产生的压力大小为

$F_P=\rho ghad$ ②

由水平方向上力的平衡条件有

$F_m=F_P$ ③

由欧姆定律得

$\xi=I(R+r)$ ④

式中

$R=\dfrac{a}{\sigma bd}$ ⑤

由以上各式解各

$\sigma=\dfrac{\rho gha}{b(B\varepsilon-r\rho ghd)}$ ⑥

评分标准：①式 4 分，②③④⑤式各 3 分，⑥式 4 分．

14．（20 分）

（1）设气体在状态 i（$i=1$、2 和 3）下的压强、体积和绝对温度分别为 p_i、V_i 和 T_i，由题设条件有

$c_1p_2^2+c_2p_2=T_2$ ①

$c_1p_3^2+c_2p_3=T_3$ ②

由此解得

$c_1=\dfrac{T_2p_3-T_3p_2}{p_2^2p_3-p_3^2p_2}=\dfrac{T_2p_3-T_3p_1}{p_1^2p_3-p_3^2p_1}$ ③

$c_2=\dfrac{T_2p_3^2-T_3p_2^2}{p_2p_3^2-p_2^2p_3}=\dfrac{T_2p_3^2-T_3p_1^2}{p_1p_3^2-p_1^2p_3}$ ④

（2）利用气体状态方程 $pV=RT$，以及

$V_1=R\dfrac{T_1}{p_1}$，$V_2=R\dfrac{T_2}{p_2}$，$V_2=R\dfrac{T_3}{p_3}$ ⑤

可将过程 $2-3$ 的方程改写为

$\dfrac{V_2-V_3}{p_2-p_3}p=V+\dfrac{V_2p_3-V_3p_2}{p_2-p_3}$ ⑥

可见，在 $p-V$ 图示上过程 $2-3$ 是以 (p_2, V_2) 和 (p_3, V_3) 为状态端点的直线．在 $p-T$ 图示中，过程 $3-1$ 是通过原点的直线上的一段，因而描述其过程的方程为

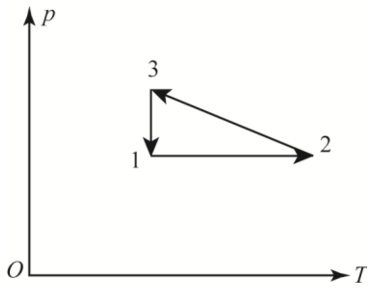
$\dfrac{p}{T}=c_3$ ⑦

式中，c_3 是一常量．利用气体状态方程 $pV=RT$，可将过程 $3-1$ 的方程改写为

$$V=\frac{R}{c_3}=V_3=V_1 \qquad ⑧$$

这是以(p_3,V_1)和(p_1,V_1)为状态端点的等容降压过程.

综上所述，过程$1-2-3-1$在$p-V$图示上是一直角三角形，如图所示.



（3）气体在一次循环过程中对外做的总功为

$$W=-\frac{1}{2}(p_3-p_1)(V_2-V_1) \qquad ⑨$$

利用气体状态方程$pV=RT$和⑤式，上式即

$$W=-\frac{1}{2}R(T_2-T_1)\left(\frac{p_3}{p_1}-1\right) \qquad ⑩$$

评分标准：第（1）问 8 分，①②③④式各 2 分；第（2）问 10 分，⑤⑥式各 2 分，过程$1-2-3-1$在$p-V$图示正确，给 6 分；第（3）问 2 分，⑩式 2 分.

15.（20 分）

以第二个π介子的飞行方向为x轴，以事件平面为$x-y$平面．设衰变前ω介子和衰变后三个π介子的动量大小分别为P_ω、p_1、p_2和p_3．衰变前后粒子在x和y方向的总动量分别守恒

$$p_\omega\cos\varphi=p_1\cos\theta_1+p_2+p_3\cos\theta_2 \qquad ①$$

$$-p_\omega\sin\varphi=-p_1\sin\theta_1+p_3\sin\theta_2 \qquad ②$$

衰变前后粒子总能量守恒

$$m_\omega c^2+T_\omega=\left(mc^2+T_1\right)+\left(m_c^2+T_2\right)+\left(m_c^2+T_3\right) \qquad ③$$

式中左端和右端三个圆括号所示的量分别是衰变前ω介子和衰变后三个π介子的总能（静能与动能之和）．衰变前ω介子和衰变后三个π介子的总能可由分别其动量和静质量表示出来

$$T_\omega=\frac{p_\omega^2}{2m_\omega} \qquad ④$$

$$T_1=\frac{p_1^2}{2m} \qquad ⑤$$

$$T_2=\frac{p_2^2}{2m} \qquad ⑥$$

$$T_3=\frac{p_3^2}{2m} \qquad ⑦$$

分别由⑤⑥⑦式得

$$p_1=\sqrt{2mT_1} \qquad ⑧$$

$$p_2=\sqrt{2mT_2} \qquad ⑨$$

$$p_3=\sqrt{2mT_3} \qquad ⑩$$

联立①②⑧⑨⑩式得

$$\varphi=\arctan\frac{\sqrt{T_1}\sin\theta_1-\sqrt{T_3}\sin\theta_2}{\sqrt{T_1}\cos\theta_1+\sqrt{T_2}+\sqrt{T_3}\cos\theta_2} \quad ⑪$$

$$p_\omega^2=2m\left(T_1+T_2+T_3\right)+4m\left[\sqrt{T_1T_3}\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+\sqrt{T_1T_2}\cos\theta_1+\sqrt{T_2T_3}\cos\theta_2\right] \qquad ⑫$$

由③④⑫式得

$$2c^2m_\omega^2-2\left(3m_c^2+T_1+T_2+T_3\right)m_\omega+2m\left(T_1+T_2+T_3\right)$$

$$+4m\left[\sqrt{T_1T_3}\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+\sqrt{T_1T_2}\cos\theta_1+\sqrt{T_2T_3}\cos\theta_2\right]=0 \qquad ⑬$$

其解为

$$m_\omega=\frac{3}{2}m+\frac{1}{2c^2}\left(T_1+T_2+T_3\right)+\sqrt{\left[\frac{3}{2}m+\frac{1}{2c^2}\left(T_1+T_2+T_3\right)\right]^2-\frac{p_\omega^2}{2c^2}} \qquad ⑭$$

式中，p_ω^2 由⑫式给出．另一解 $m_\omega\sim\frac{P_\omega}{c}$，与非相对论近似条件 $m_\omega c^2\ll p_\omega c$ 矛盾，舍去．

评分标准：本题 20 分．①②③④⑤⑥⑦式各 2 分，⑪⑫⑬⑭式各 2 分．（采用相对论的能量-动量公式得出正确结果的，同样得分）

16．（25 分）

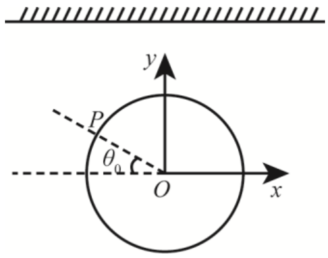
解法一

（1）在圆盘所在平面内建立平面直角坐标系，使盘心 O 为原点，x 轴水平向右，y 轴竖直向上．按题意，天花板上有水的地方仅仅是一点，该心必定是所有水滴运动轨迹的最高点；只有第二象限的圆盘边缘甩出的水滴才能到达这一最高点．水滴甩出时的初速度大小是恒定的

$$v_0=r\omega \qquad ①$$

以 P 点位于 $(-r，0)$ 处时为计时零点，则 P 点在时刻 t_0

处时，O、P 连线与右图中 x 轴负方向的夹角为



$\theta_0=\omega t_0$ ②

这时经过 P 点的水滴的位置 $(x_0，y_0)$ 和速度 $(v_{0x}，v_{0y})$ 分别为

$x_0=-r\cos\theta_0$， $y_0=r\sin\theta_0$ ③

$v_{0x}=v_0\sin\theta_0$， $v_{0y}=v_0\cos\theta_0$ ④

在时刻 t_0 被甩出的水滴做抛体运动．设不存在天花板，该水滴在时刻 t_1 达到最高处．由抛体运动公式，可得

$0=r\omega\cos\theta_0-g(t_1-t_0)$ ⑤

$x_1=x_0+v_{0x}(t_1-t_0)$，

$y_1=y_0+v_{0y}(t_1-t_0)-\frac{1}{2}g(t_1-t_0)^2$ ⑥

由①②③④⑤式和⑥式中第二式，得

$y_1=r\sin(\omega t_0)+\frac{(r\omega)^2}{2g}\left[1-\sin^2(\omega t_0)\right]$ ⑦

对变元 $\sin(\omega t_0)$ 配方后得

$y_1=\frac{(r\omega)^2}{2g}+\frac{g}{2\omega^2}-\frac{(r\omega)^2}{2g}\left[\sin(\omega t_0)-\frac{g}{r\omega^2}\right]^2$ ⑧

于是在

$\sin(\omega t_0)_{y_1=y_1\max}-\frac{g}{r\omega^2}=0$ ⑨

时有

$y_{1\max}=\frac{(r\omega)^2}{2g}+\frac{g}{2\omega^2}$ ⑩

依题意，上式即天花板相对于圆盘中心轴 O 点的高度．代入题给数据得

$y_{\max}=1.25m$ ⑪

（2）由⑨式和题给数据可知，

$\sin(\omega t_0)_{y_1=y_{\max}}=\frac{g}{r\omega^2}=0.5$ ⑫

故

$(\theta_0)_{y_1=y_{1\max}}=30°$ ⑬

由①②③④⑤式和⑥中第一式，得

$$x_{1y_1=y_1\max}=-r\cos 30°+\frac{(r\omega)^2\sin 30°\cos 30°}{g}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{(r\omega)^2}{2g}-r\right)$$

代入题给数据得

$$x_{1y_1=y_1\max}=0 \qquad ⑭$$

所以，y 轴与天花板的交点为天花板上有水的那一点的位置，其坐标值为$(0，1.25\text{m})$.

评分标准：第（1）问 17 分，①②③④⑤式各 1 分，⑥⑧⑨式各 2 分，⑩式 4 分，

⑪式 2 分；第（2）问 8 分，⑬式 4 分，⑭式 2 分，结论正确给 2 分.

解法二

（1）在圆盘所在平面内建立平面直角坐标系，使盘心 O 为原点，x 轴水平向右，y 轴竖直向上．只有第二象限的圆盘边缘甩出的水滴才可能到达天花板上某一固定点；而不是打到天花板上某一区域（不止一个点），或者打不到天花板上．水滴甩出时的初速度大小是恒定的：

$$v_0=r\omega \qquad ①$$

其 x 和 y 分量分别为：

$$v_{0x}=r\omega\sin\theta，\ v_{0y}=r\omega\cos\theta \qquad ②$$

取水滴从 P 点甩出时为计时零点，P 在 $t=0$ 时的初始坐标为：

$$x_0=-r\cos\theta，\ y_0=r\sin\theta \qquad ③$$

水滴的 x，y 坐标与 t 的关系式为：

$$\begin{cases}x=x_0+v_{0x}t\\ y=y_0+v_{0y}t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases} \qquad ④$$

现在求 θ 的各种可能取值中，y 的最大值．

对某一特定的 θ 值，x_0、y_0、v_{0x}、v_{0y} 均为固定值，先针对这个固定的 θ 值，求

$$y-y_0=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2 \qquad ⑤$$

的最大值．即求斜抛运动的“最大射高”：

$$(y-y_0)_{\max}=\left(v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2\right)_{\max}=\frac{v_{0y}^2}{2g} \qquad ⑥$$

对应的

$$y_{\max}=y_0+\frac{v_{0y}^2}{2g}=r\sin\theta+\frac{(r\omega\cos\theta)^2}{2g}$$

$$=r\sin\theta+\frac{(r\omega)^2}{2g}\left(1-\sin^2\theta\right)$$

$$=\frac{(r\omega)^2}{2g}-\left[\frac{(r\omega)^2}{2g}\sin^2\theta-r\sin\theta\right]$$ ⑦

$$=\frac{(r\omega)^2}{2g}+\frac{g}{2\omega^2}-\left[\frac{r\omega\sin\theta}{\sqrt{2g}}-\sqrt{\frac{g}{2}}\frac{1}{\omega}\right]^2$$

这说明不同的 θ 值对应不同的 y 的最大值. 只有含 θ 的平方项（即上式最后的 $[\cdots]$ ）为 0 时，才是这些“最大射高”中的最大值.

由此得到天花板的高度为：

$$y_{\max}=\frac{(r\omega)^2}{2g}+\frac{g}{2\omega^2}=\frac{(1\times4.43)^2}{2\times9.80}+\frac{9.80}{2\times4.43^2}=1.00+0.25=1.25\,\mathrm{m}$$ ⑧

（2）当水滴能打到天花板时，

$$\sin\theta=\frac{g}{r\omega^2}=\frac{9.80}{1\times4.43^2}=0.50$$ ⑨

即

$\theta=30°$

令⑤式为 0 得到斜抛水滴再次到达初始时的水平高度时的时间为：

$$t=\frac{2v_{0y}}{g}$$ ⑪

y 值取最大时所用的时间是上述值的一半，把该时间代入④的第一式得水滴在天花板上的 x 位置坐标为：

$$x=x_0+v_{0x}t=-r\cos\theta+r\omega\sin\theta\frac{\tau\omega\cos\theta}{g}$$

$$=-r\cos\theta+\frac{(r\omega)^2\sin2\theta}{2g}=-1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(1\times4.43)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\times9.80}$$ ⑫

$=0$

所以 y 轴与天花板的交点为天花板上有水的那一点的位置，其坐标值为 $(0，1.25\mathrm{m})$.

评分标准：第（1）问 17 分，①式 1 分，②③④⑤⑥式各 2 分，⑦式 4 分，⑧式 2 分；

第（2）问 8 分，⑩式 4 分，⑫式 2 分，结论正确给 2 分.