

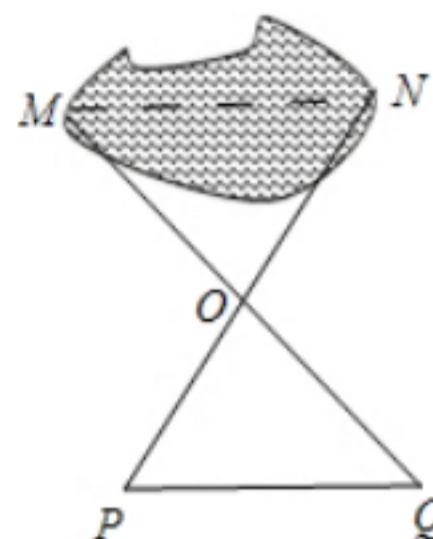
2012 年全国各地中考数学真题分类汇编

第 22 章 全等三角形

一. 选择题

1. (2012?柳州) 如图, 小强利用全等三角形的知识测量池塘两端 M、N 的距离, 如果 $\triangle PQO \cong \triangle NMO$, 则只需测出其长度的线段是 (B)

- A. PO B. PQ
C. MO D. MQ



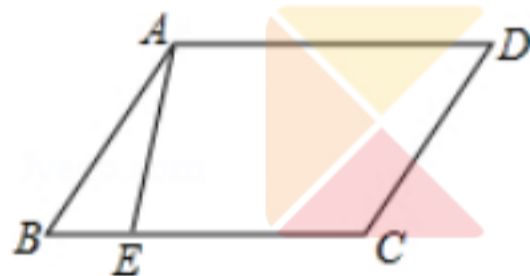
【考点】全等三角形的应用.

【分析】利用全等三角形对应边相等可知要想求得 MN 的长, 只需求得其对应边 PQ 的长, 据此可以得到答案.

【解答】解: 要想利用 $\triangle PQO \cong \triangle NMO$ 求得 MN 的长, 只需求得线段 PQ 的长, 故选 B.

【点评】本题考查了全等三角形的应用, 解题的关键是如何将实际问题与数学知识有机的结合在一起.

3. (2012?聊城) 如图, 四边形 ABCD 是平行四边形, 点 E 在边 BC 上, 如果点 F 是边 AD 上的点, 那么 $\triangle CDF$ 与 $\triangle ABE$ 不一定全等的条件是 (C)



- A. $DF=BE$ B. $AF=CE$ C. $CF=AE$ D. $CF \parallel AE$

考点: 平行四边形的性质; 全等三角形的判定.

分析: 根据平行四边形的性质和全等三角形的判定方法逐项分析即可.

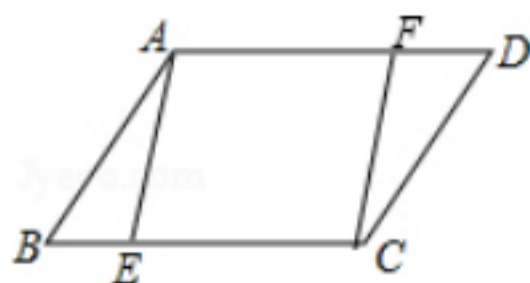
解答: 解: A 当 $DF=BE$ 时, 有平行四边形的性质可得: $AB=CD$, $\angle B = \angle D$, 利用 SAS 可判定 $\triangle CDF \cong \triangle ABE$;

B 当 $AF=CE$ 时, 有平行四边形的性质可得: $BE=DF$, $AB=CD$, $\angle B = \angle D$, 利用 SAS 可判定 $\triangle CDF \cong \triangle ABE$;

C 当 $CF=AE$ 时, 有平行四边形的性质可得: $AB=CD$, $\angle B = \angle D$, 利用 SSA 不能判定 $\triangle CDF \cong \triangle ABE$;

D 当 $CF \parallel AE$ 时, 有平行四边形的性质可得: $AB=CD$, $\angle B = \angle D$, $\angle AEB = \angle CFD$, 利用 AAS 可判定 $\triangle CDF \cong \triangle ABE$.

故选 C.



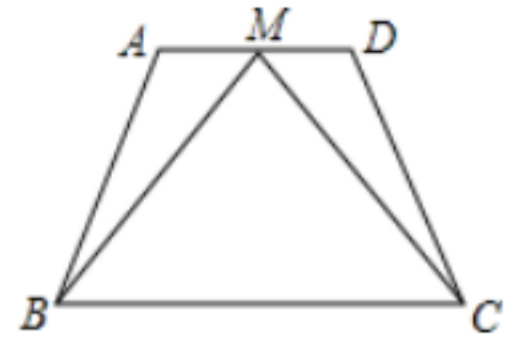
点评: 本题考查了平行四边形的性质和重点考查了三角形全等的判定定理,

普通两个三角形

全等共有四个定理，即 AAS, ASA, SAS, SSS, 但 AAA, SSA, 无法证明三角形全等，
本题是一道较为简单的题目。（21 世纪教育网版权所有）

4. (2012 十堰) 如图，梯形 ABCD 中，AD // BC，点 M 是 AD 的中点，且 MB=MC，若 AD=4，AB=6，BC=8，则梯形 ABCD 的周长为 (B)

A. 22 B. 24 C. 26 D. 28



【考点】 梯形；全等三角形的判定与性质。

【专题】 数形结合。

【分析】 先判断 $\triangle AMB \cong \triangle DMC$ ，从而得出 $AB=DC$ ，然后代入数据即可求出梯形 ABCD 的周长。

【解答】 解： $AD \parallel BC$ ，
 $\angle AMB = \angle MBC$ ， $\angle DMC = \angle MCB$ ，
 又 $MC=MB$ ，
 $\angle MBC = \angle MCB$ ，
 $\angle AMB = \angle DMC$ ，
 在 $\triangle AMB$ 和 $\triangle DMC$ 中，
 $AM=DM$ ， $MB=MC$ ， $\angle AMB = \angle DMC$
 $\triangle AMB \cong \triangle DMC$ ，
 $AB=DC$ ，

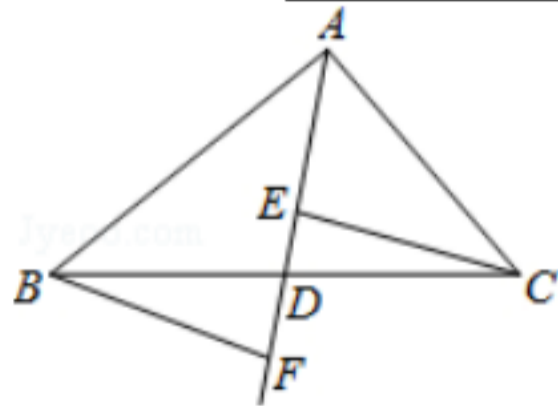
四边形 ABCD 的周长 $=AB+BC+CD+AD=24$ 。

故选 B。

【点评】 此题考查了梯形、全等三角形的判定与性质，属于基础题，解答本题的关键是判断 $\triangle AMB \cong \triangle DMC$ ，得出 $AB=DC$ ，难度一般。（21 世纪教育网版权所有）

二. 填空题

5. (2012 义乌市) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 BC 的中点，作射线 AD，在线段 AD 及其延长线上分别取点 E、F，连接 CE、BF。添加一个条件，使得 $\triangle BDF \cong \triangle CDE$ ，并加以证明。你添加的条件是 DE=DF (或 CE=BF 或 $\angle ECD = \angle DBF$ 或 $\angle DEC = \angle DFB$ 等)。(不添加辅助线)。



考点：全等三角形的判定。

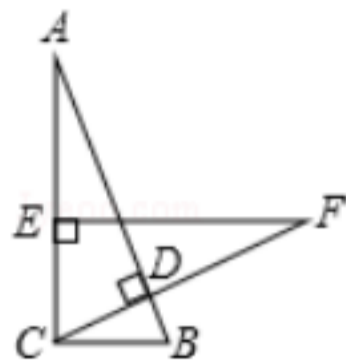
解答：解：(1) 添加的条件是：DE=DF (或 CE=BF 或 $\angle ECD = \angle DBF$ 或 $\angle DEC = \angle DFB$ 等)。

(2) 证明：在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CDE$ 中

$$\begin{cases} BD=CD \\ \angle EDC = \angle FDB \\ DE=DF \end{cases}$$

$\triangle BDF \cong \triangle CDE$ 。

6 (2012 临沂) 在 Rt $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $BC=2\text{cm}$, $CD \perp AB$, 在 AC 上取一点 E , 使 $EC=BC$, 过点 E 作 $EF \perp AC$ 交 CD 的延长线于点 F , 若 $EF=5\text{cm}$, 则 $AE=$ _____ cm .



考点：全等三角形的判定与性质。 [来源：学.科.网 Z.X.X.K]

解答：解： $\angle ACB=90^\circ$,

$$\angle ECF + \angle BCD = 90^\circ,$$

$CD \perp AB$,

$$\angle BCD + \angle B = 90^\circ,$$

$$\angle ECF = \angle B,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle FEC$ 中,
$$\begin{cases} \angle ECF = \angle B \\ EC = BC \\ \angle ACB = \angle FEC = 90^\circ \end{cases}$$
,

$\triangle ABC \cong \triangle FEC$ (ASA),

$$AC = EF,$$

$$AE = AC - CE, \quad BC = 2\text{cm}, \quad EF = 5\text{cm},$$

$$AE = 5 - 2 = 3\text{cm}.$$

故答案为：3.

三.解答题

7. (2012 十堰) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD$,

$CB=CD$. 求证: $\angle B = \angle D$.

【考点】全等三角形的判定与性质.

【专题】证明题.

【分析】先连接 AC , 由于 $AB=AD$, $CB=CD$, $AC=AC$, 利用 SSS 可证 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$, 于是 $\angle B = \angle D$.

【解答】证明: 连接 AC ,

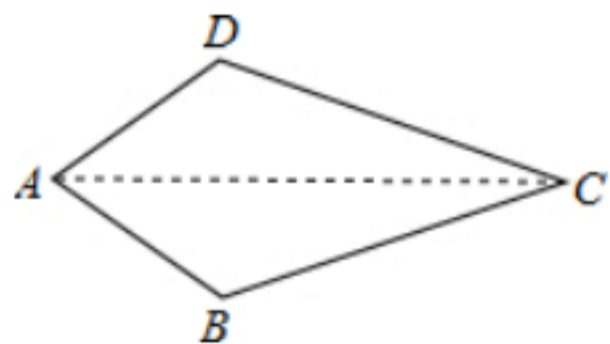
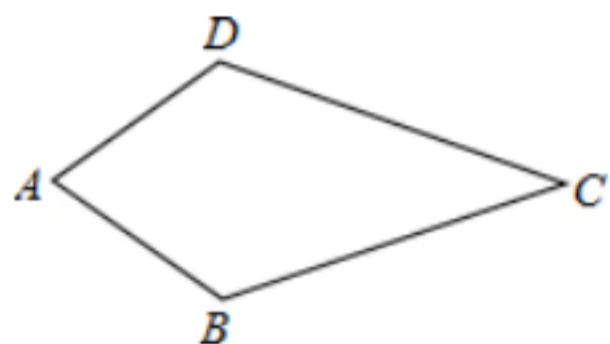
在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ CB = CD \\ AC = AC \end{cases}$$

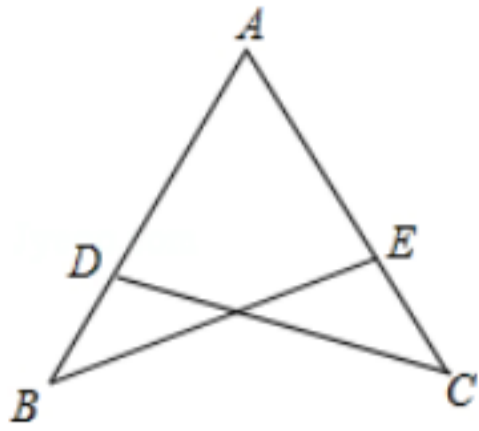
$\triangle ABC \cong \triangle ADC$,

$\angle B = \angle D$.

【点评】 本题考查了全等三角形的判定和性质, 解题的关键是连接 AC , 构造全等三角形.



8. (2012?广州) 如图, 点 D 在 AB 上, 点 E 在 AC 上, $AB=AC$, $\angle B = \angle C$. 求证: $BE=CD$.



考点：全等三角形的判定与性质。

专题：证明题。

分析：已知图形 $\angle A = \angle A$ ，根据 ASA 证 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，根据全等三角形的性质即可求出答案。

解答：证明：在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中

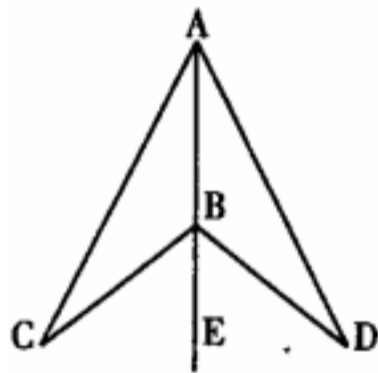
$$\begin{cases} \angle A = \angle A \\ AB = AC \\ \angle B = \angle C \end{cases},$$

$$\triangle ABE \cong \triangle ACD,$$

$$BE = CD.$$

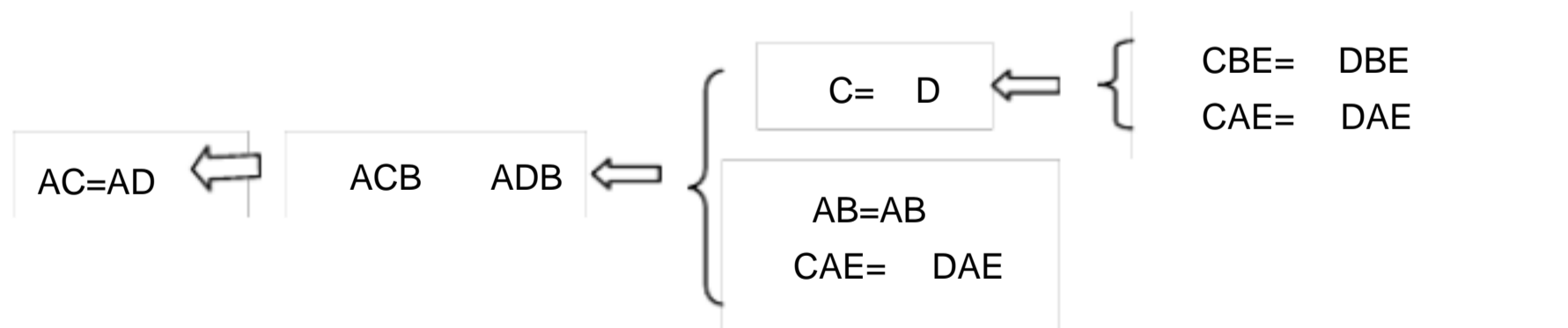
点评：本题考查了全等三角形的性质和判定的应用，全等三角形的判定方法有：SAS, ASA, AAS, SSS, 用 ASA (还有 $\angle A = \angle A$) 即可证出 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ 。

9. (2012·哈尔滨) 如图，点 B 在射线 AE 上， $\angle CAE = \angle DAE$ ， $\angle CBE = \angle DBE$ ，
求证：AC=AD.



(第 23 题图)

【解析】 本题考查三角形全等的判定及性质。



【答案】证明： $\angle CBE = \angle DBE$ ， $\angle CAE = \angle DAE$ ，

$$\angle C = \angle D,$$

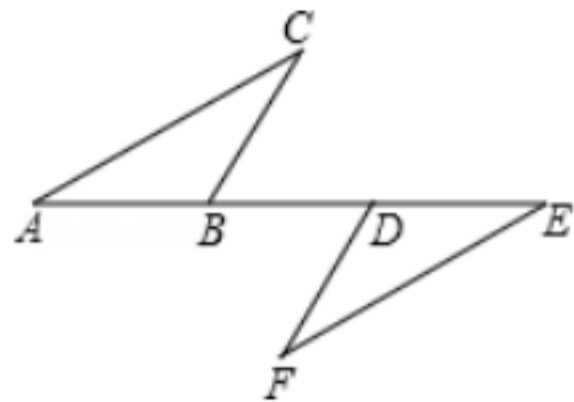
又 $AB = AB$ ， $\angle CAE = \angle DAE$ ，

$$\triangle ACB \cong \triangle ADB,$$

$$AC = AD.$$

【点评】 探索线段关系，如可两线段在两个三角形中，一般考虑它们所在两个三角形是否全等，若在同一个三角形，可考虑所对应的角的关系。

10. (2012 宜宾) 如图，点 A、B、D、E 在同一直线上，AD=EB，BC=DF，∠C=∠F。求证：AC=EF。



考点：全等三角形的判定与性质。

解答：证明：AD=EB

AD - BD = EB - BD，即 AB = ED ... (1分)

又 BC = DF，∠CBD = ∠FDE ... (2分)

∠ABC = ∠EDF ... (3分)

又 ∠C = ∠F，

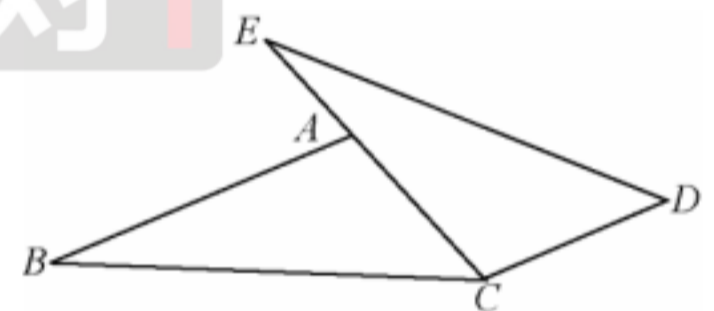
∴ △ABC ≌ △EDF ... (5分)

∴ AC = EF ... (6分)

11. (2012 北京) 已知：如图，点 E、A、C 在同一条直线上，

∠B = ∠D，AB = CE，AC = CD。

求证：BC = ED。



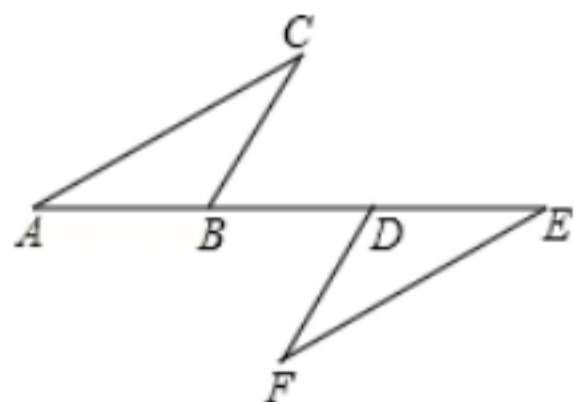
【解析】证 △ABC ≌ △CED (SAS) ∴ BC = ED

【点评】 本题是一道很简单的全等证明，纵观近几年北京市中考数学试卷，每一年都有一道比较简单的几何证明题：只需证一次全等，无需添加辅助线，且全等的条件都很明显。本题是解答题中几何的第 1 道题，难度较小是为了让所有的考生在进入解答题后都有一个顺利的开端，避免产生畏惧心理，这样考试才有信心做后面较难的题目。

本题考点：全等三角形的判定 (SAS) 和性质。

难度系数：0.9

12. (2012 宜宾) 如图，点 A、B、D、E 在同一直线上，AD=EB, BC=DF, ∠C=∠F, 求证：AC=EF.



【解析】 根据 $BC \parallel DF$ 证得 $\angle CBD = \angle FDB$ ，利用邻角的补角相等证得 $\angle ABC = \angle EDF$ ，然后根据 $AD = EB$ 得到 $AB = CD$ ，利用 AAS 证明两三角形全等即可。

【答案】 证明： $AD = EB$

$$AD - BD = EB - BD \text{ 即 } AB = ED$$

又 $BC \parallel DF$ ， $\angle CBD = \angle FDB$

$$\angle ABC = \angle EDF$$

又 $\angle C = \angle F$ ，

$$\triangle ABC \cong \triangle EDF$$

$$AF = EF$$

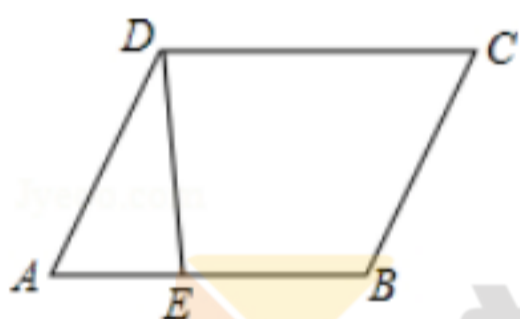
【点评】 本题考查了全等三角形的判定与性质， 解题的关键是选择最合适的方法证明两三角形全等

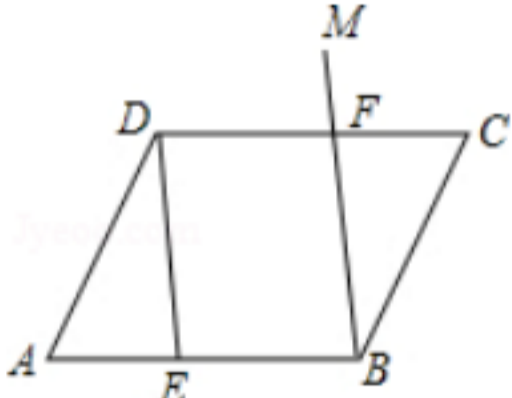
13. (2012 宜昌) 如图，已知 E 是平行四边形 ABCD 的边 AB 上的点，连接 DE。

(1) 在 $\triangle ABC$ 的内部，作射线 BM 交线段 CD 于点 F，使 $\angle CBF = \angle ADE$ ；

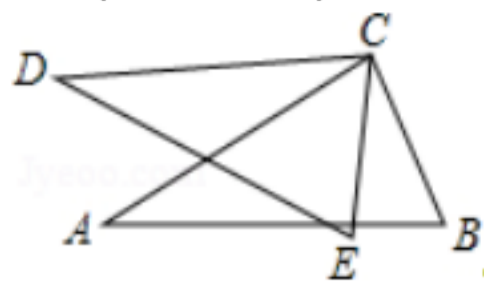
(要求：用尺规作图，保留作图痕迹，不写作法和证明)

(2) 在 (1) 的条件下，求证： $\triangle ADE \cong \triangle CBF$ 。



考点：	作图—复杂作图；全等三角形的判定；平行四边形的性质。
分析：	(1) 作 $\angle CBM = \angle ADE$ ，其中 BM 交 CD 于 F； (2) 根据平行四边形的性质可得 $\angle A = \angle C$ ， $AD = BC$ ，由 ASA 可证 $\triangle ADE \cong \triangle CBF$ 。
解答：	(1) 解：作图基本正确即可评 3 分。 (2) 证明： 四边形 ABCD 是平行四边形 $\angle A = \angle C$ ， $AD = BC$..5 分 $\angle ADE = \angle CBF$..6 分 $\triangle ADE \cong \triangle CBF$ (ASA)。 
点评：	综合考查了角的作图，平行四边形的性质和全等三角形的判定的知识，三角形全等的判定是中考的热点，一般以考查三角形全等的方法为主，判定两个三角形全等，先根据已知条件或求证的结论确定三角形，然后再根据三角形全等的判定方法，看缺什么条件，再去证什么条件。

14. (2012 武汉) 如图 $CE=CB$, $CD=CA$, $\angle DCA= \angle ECB$, 求证: $DE=AB$.

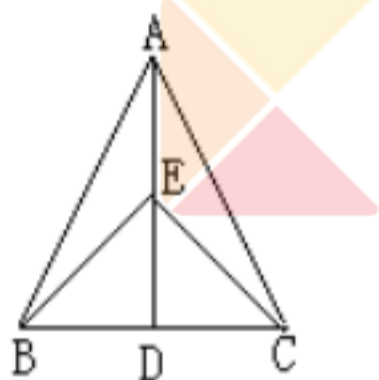


考点: 全等三角形的判定与性质。

解答: 证明: $\angle DCA= \angle ECB$,
 $\angle DCA+ \angle ACE= \angle BCE+ \angle ACE$,
 $\angle DCE= \angle ACB$,
 在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle ACB$ 中

$$\begin{cases} DC=AC \\ \angle DCE=\angle ACB, \\ CE=CB \end{cases}$$
 $\triangle DCE \cong \triangle ACB$,
 $DE=AB$.

15. (2012 随州) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 点 D 是 BC 的中点, 点 E 在 AD 上。
 求证: (1) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$; (2) $BE=CE$



第19题图

解析: (1) 由点 D 是 BC 的中点, 得 $BD=CD$ 。则 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中三条对应边分别相等, 利用 SSS 即可判定两三角形全等。(2) 利用等腰三角形“三线合一”或全等可得 $\angle BAD= \angle CAD$, 从而易证 $\triangle ABE \cong \triangle ACE$, 得到 $BE=CE$

答案: 证明: (1) 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中

D 是 BC 的中点,

$$\left. \begin{array}{l} \therefore BD = CD \\ AB = AC \\ AD = AD \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACD. (SSS)$$

(2) 由 (1) 知 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$

$\therefore \angle BAD= \angle CAD$

即: $\angle BAE= \angle CAE$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACE$ 中,

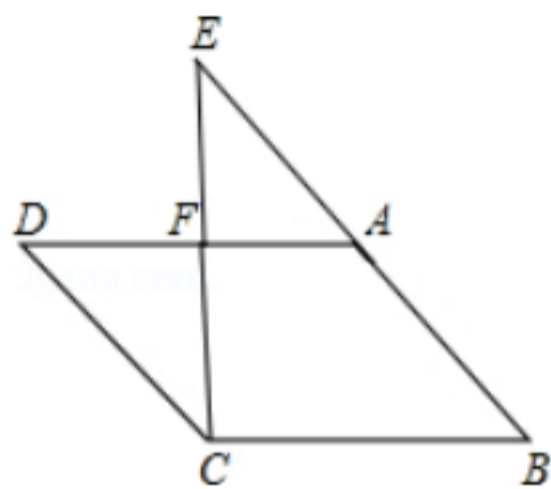
$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \\ \angle BAE = \angle CAD \\ AE = AE \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle ACE \text{ (SAS)}$$

$$\therefore BE = CE$$

(其他正确证法同样给 . 分)

点评：本题考查了三角形全等的性质及判定及等腰三角形的性质。等腰三角形的“三线合一”性质的灵活应用，可以为全等三角形判定中条件的确定提供便利。而要证明两三角形中线段的相等关系，一般可以通过证明两三角形全等，从而利用对应边相等得证。

16. (2012?广安) 如图，四边形 ABCD 是平行四边形，点 E 在 BA 的延长线上，且 BE=AD，点 F 在 AD 上，AF=AB，求证： $\triangle AEF \cong \triangle DFC$ 。



考点：平行四边形的性质；全等三角形的判定。

专题：证明题。

分析：由四边形 ABCD 是平行四边形，利用平行四边形的性质，即可得 $AB=CD$ ， $AB \parallel CD$ ，又由平行线的性质，即可得 $\angle D = \angle EAF$ ，然后由 $BE=AD$ ， $AF=AB$ ，求得 $AF=CD$ ， $DF=AE$ ，继而利用 SAS 证得： $\triangle AEF \cong \triangle DFC$ 。

解答：证明：四边形 ABCD 是平行四边形，

$$AB=CD, AB \parallel CD,$$

$$\angle D = \angle EAF,$$

$$AF=AB, BE=AD,$$

$$AF=CD, AD - AF = BE - AB,$$

$$\text{即 } DF=AE,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DFC$ 中，

$$\begin{cases} AE=DF \\ \angle EAF=\angle D, \\ AF=DC \end{cases}$$

$$\triangle AEF \cong \triangle DFC \text{ (SAS)}.$$

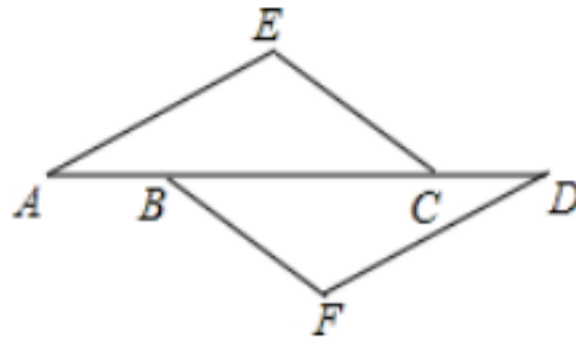
点评：此题考查了平行四边形的性质与全等三角形的判定。此题难度不大，注意数形结合思想的应用。

17. (2012 广元) 如图，在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle DFB$ 中， $\angle E = \angle F$ ，点 A, B, C, D 在同一直线上，

有如下三个关系式： $\angle A = \angle D$ ， $AB=CD$ ， $CE=BF$ 。

(1) 请用其中两个关系式作为条件， 另一个作为结论， 写出你认为正确的所有命题 (用序号写出命题书写形式：“如果 \otimes ， \otimes ， 那么 \otimes ”)；

(2) 选择 (1) 中你写出的一个命题， 说明它正确的理由。



【答案】 解：(1) 命题 1：如果 $AE \parallel DF$ ， $\angle A = \angle D$ ， 那么 $AB = CD$ ； 命题 2：如果 $AE \parallel DF$ ， $AB = CD$ ， 那么 $CE = BF$ 。

(2) 命题 1 的证明：

$$AE \parallel DF, \quad \angle A = \angle D.$$

$$AB = CD, \quad AB + BC = CD + BC, \quad \text{即 } AC = DB.$$

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle DFB$ 中，

$$\angle E = \angle F, \quad \angle A = \angle D, \quad AC = DB, \quad \triangle AEC \cong \triangle DFB \text{ (AAS)}.$$

$$CE = BF \text{ (全等三角形对应边相等)}.$$

【考点】 全等三角形的判定和性质， 平行的性质， 真假命题。

【分析】 (1) 如果 $AE \parallel DF$ 作为条件， $AB = CD$ 作为结论， 得到的命题为真命题； 如果 $AE \parallel DF$ 作为条件， $CE = BF$ 作为结论， 得到的命题为真命题， 写成题中要求的形式即可。

(2) 若选择 (1) 中的如果 $AE \parallel DF$ ， 那么 $AB = CD$ ， 由 $AE \parallel DF$ 平行， 利用两直线平行内错角相等得到一对角相等， 再由 $AB = DC$ ， 等式左右两边都加上 BC ， 得到 $AC = DB$ ， 又 $\angle E = \angle F$ ， 利用 AAS 即可得到三角形 $\triangle ACE$ 与三角形 $\triangle DBF$ 全等， 根据全等三角形的对应边相等得到 $CE = BF$ ， 得证。

若选择如果 $AE \parallel DF$ ， 那么 $CE = BF$ ， 证明如下：

$$AE \parallel DF, \quad \angle A = \angle D.$$

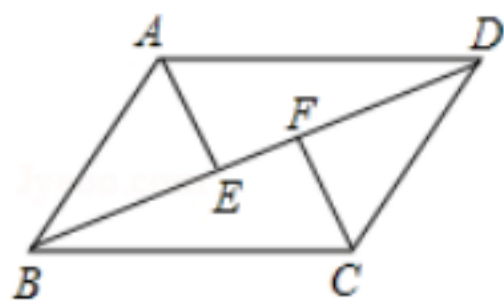
$$AC = DB, \quad AC - BC = DB - BC, \quad \text{即 } AB = CD,$$

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle DFB$ 中， $\angle E = \angle F$ ， $\angle A = \angle D$ ， $CE = BF$ ， $\triangle AEC \cong \triangle DFB$ (AAS)。

$$AC = DB \text{ (全等三角形对应边相等)}, \text{ 则 } AC - BC = DB - BC, \text{ 即 } AB = CD.$$

注：命题 ‘如果 $AE \parallel DF$ ， 那么 $AB = CD$ ’ 是假命题。

18. (2012?衢州) 如图， 在平行四边形 $ABCD$ 中， E 、 F 是对角线 BD 上的两点， 且 $BE = DF$ ， 连接 AE 、 CF 。 请你猜想： AE 与 CF 有怎样的数量关系？ 并对你的猜想加以证明。



[来源 :Z § xx § k.Com]

考点：平行四边形的性质；全等三角形的判定与性质。

专题：探究型。

分析：由四边形 ABCD 是平行四边形，即可得 $AB \parallel CD$ ， $AB=CD$ ，然后利用平行线的性质，求得 $\angle ABE = \angle CDF$ ，又由 $BE=DF$ ，即可证得 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ，继而可得 $AE=CF$ 。

解答：解：猜想： $AE=CF$ 。

证明：四边形 ABCD 是平行四边形，

$AB \parallel CD$ ， $AB=CD$ ，

$\angle ABE = \angle CDF$ ，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} AB=CD \\ \angle ABE=\angle CDF \\ BE=DF \end{cases}$$

$\triangle ABE \cong \triangle CDF$ (SAS)，

$AE=CF$ 。

点评：此题考查了平行四边形的性质与全等三角形的判定与性质。此题比较简单，注意掌握平行四边形的对边平行且相等，注意数形结合思想的应用。



19. (2012 济南) (1) 如图 1，在 $\square ABCD$ 中，点 E，F 分别在 AB，CD 上， $AE=CF$ 。求证： $DE=BF$ 。

(2) 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle A=40^\circ$ ，BD 是 $\triangle ABC$ 的平分线，求 $\angle BDC$ 的度数。

【考点】平行四边形的性质；全等三角形的判定与性质；等腰三角形的性质。

【专题】证明题。

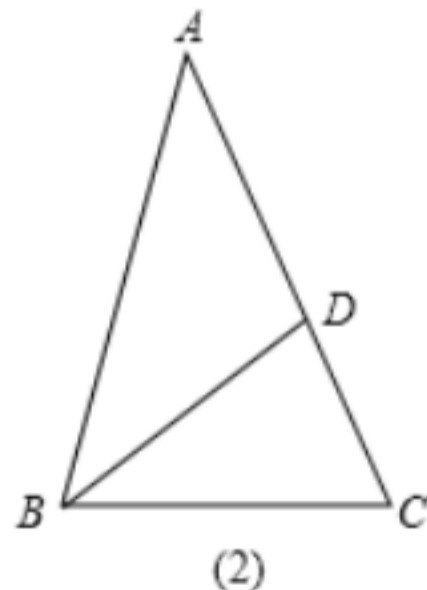
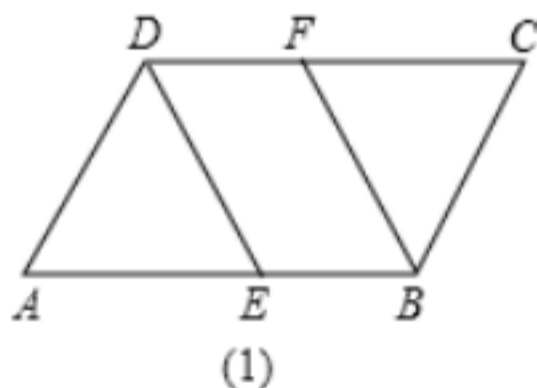
【分析】(1) 根据四边形 ABCD 是平行四边形，利用平行四边形的性质得到一对边和一对角的对应相等，在加上已知的一对边的相等，利用“SAS”，证得 $\triangle ADE \cong \triangle CBF$ ，最后根据全等三角形的对应边相等即可得证；

(2) 首先根据 $AB=AC$ ，利用等角对等边和已知的 $\angle A$ 的度数求出 $\angle ABC$ 和 $\angle C$ 的度数，再根据已知的 BD 是 $\triangle ABC$ 的平分线，利用角平分线的定义求出 $\angle DBC$ 的度数，最后根据三角形的内角和定理即可求出 $\angle BDC$ 的度数。

【解答】(1) 证明：四边形 ABCD 是平行四边形，

$AD=BC$ ， $\angle A = \angle C$ ，

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 中，



$$AD=CB, \quad \angle A=\angle C, \quad AE=CF,$$

$$\triangle ADE \cong \triangle CBF \text{ (SAS)},$$

$$DE=BF;$$

(2) 解: $AB=AC, \quad \angle A=40^\circ$, [来源:Zxxk.Com]

$$\angle ABC=\angle C=\frac{1}{2}(180^\circ-40^\circ)=70^\circ,$$

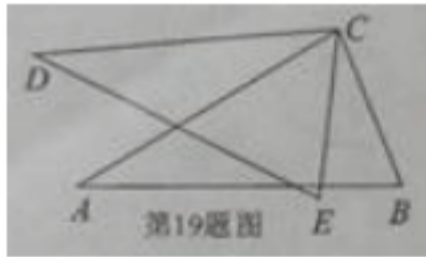
又 BD 是 $\triangle ABC$ 的平分线,

$$\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=35^\circ,$$

$$\angle BDC=180^\circ-\angle DBC-\angle C=75^\circ.$$

【点评】此题考查了平行四边形的性质，等腰三角形的性质，三角形的内角和定理，角平分线的定义以及全等三角形的性质与判定，熟练掌握定理与性质是解本题的关键。

20. (2012 武汉) 如图, $CE=CB, CD=CA, \angle DCA=\angle ECB$. 求证: $DE=AB$



解析: 欲证 $DE=AB$, 可考虑证明它们所在的三角形全等, 已有 $CE=CB, CD=CA$ 两个条件, 可考虑找夹角相等, 而 $\angle DCA=\angle ECB$, 刚好有 $\angle DCE=\angle ACB$. 得证

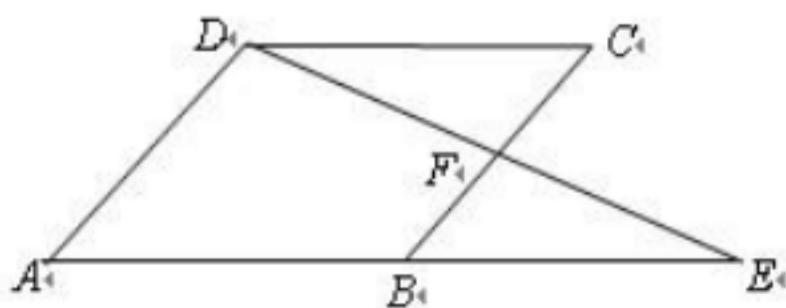
解: 证明: $\angle DCA=\angle ECB, \quad \angle DCE=\angle ACB$

又 $CE=CB, CD=CA, \quad \triangle DEC \cong \triangle ABC$ (SAS)

$$DE=AB$$

点评: 本题在于考察全等三角形的判定与性质, 判定三角形全等, 关键在于找到三组对应相等条件。题目难度低

21. (2012 淮安) 已知: 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 延长 AB 到点 E , 使 $BE=AB$, 连接 DE 交 BC 于点 F . 求证: $\triangle BEF \cong \triangle CDF$.



题 21 图

【解析】根据平行四边形的对边平行且相等, 结合已知条件可推出所证三角形全等的条件。

【答案】解：证明：因为四边形 ABCD 是平行四边形，所以 $CD=AB$ ， $AB \parallel CD$ 。

因为 $BE=AB$ ，所以 $CD=BE$ 。

因为 $AB \parallel CD$ ，所以 $\angle EBF = \angle DCB$ 。

在 $\triangle BEF$ 和 $\triangle CDF$ 中，
$$\begin{cases} \angle EBF = \angle DCF \\ \angle EFB = \angle DFC \text{ (对顶角相等)} \\ BE = CD \end{cases}$$
，所以 $\triangle BEF \cong \triangle CDF$ (AAS)。

【点评】本题考查平行四边形的性质及全等三角形的判定，全等三角形的判定常见的判断方法有 5 中，选用哪一种方法，取决于题目中的已知条件，若已知两边对应相等，则找它们的夹角或第三边；若已知两角对应相等，则必须再找一组对边对应相等，且要是两角的夹边，若已知一边一角，则找另一组角，或找这个角的另一组对应邻边。 <http://www.21cnjy.com/>

22. (2012 云南省) (本小题 5 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，点 D 是 AB 边上一点， $DM \perp AB$ 且 $DM = AC$ ，过点 M 作 $ME \parallel BC$ 交 AB 于点 E。求证： $\triangle ABC \cong \triangle MED$ 。

【解析】此题主要是要找到三角形全等的三个条件，角角边来证明，即找到 $\angle C = \angle MDE$ ， $\angle B = \angle MED$ ， $AC = DM$ 就可以证明了。

【答案】解：∵ $DM \perp AB$ ， $\angle C = 90^\circ$

$$\therefore \angle C = \angle MDE = 90^\circ$$

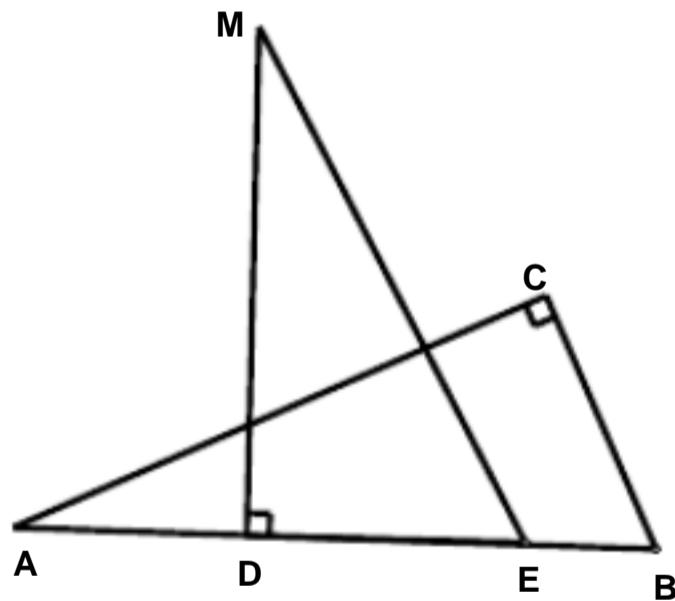
∵ $ME \parallel BC$

$$\therefore \angle B = \angle MED \text{ [来源:Zxxk.Com]}$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle MED$ 中

$$\begin{cases} \angle C = \angle MDE \\ \angle B = \angle MED \\ AC = DM \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle MED$$

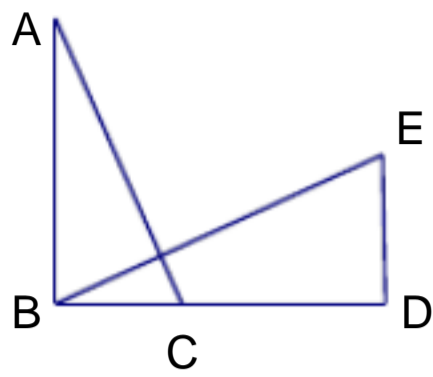


【点评】此题考查考生会不会证明三角形全等，能否找到证明全等的条件是关键。即对角角边定理的理解运用。

23. (2012 南京) 如图，在 $Rt \triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ，点 D 在 BC 的延长线上，且 $BD = AB$ ，过点 B 作 $BE \perp AC$ ，与 BD 的垂线 DE 交于点 E。

(1) 求证： $\triangle ABC \cong \triangle BDE$ ；

(2) $\triangle BDE$ 可由 $\triangle ABC$ 旋转得到，利用尺规作出旋转中心 O (保留作图痕迹，不写作法)



解析：由两线垂直，利用余角的性质，推出 $\angle DBE = \angle A$ ，证出 $\triangle ABC \cong \triangle BDE$ ；利用旋转的性质，旋转中心是对应点中垂线的交点做出旋转中心 O 。

证明：(1) $BE \perp AC$,

$$\angle A + \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\angle ABC = 90^\circ,$$

$$\angle DBE + \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\angle A = \angle DBE$$

$$\angle ABC = \angle BDE = 90^\circ, \quad BD = AB$$

$$\triangle AOB \cong \triangle DOC$$

(2) 分别作对应点 B 、 D 连线的中垂线、 A 、 B 连线的垂直平分线，两线的交点即为旋转中心 O 。

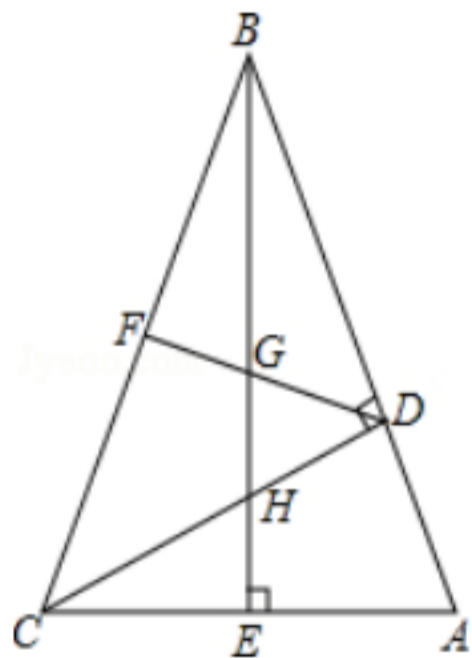
点评：本题考查余角的性质、三角形全等的判定及旋转的性质与作图，考察了学生简单的推理能力。



24. (2012 泰安) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 45^\circ$ ， $CD \perp AB$ ， $BE \perp AC$ ，垂足分别为 D ， E ， F 为 BC 中点， BE 与 DF ， DC 分别交于点 G ， H ， $\angle ABE = \angle CBE$ 。

(1) 线段 BH 与 AC 相等吗？若相等给予证明，若不相等请说明理由；

(2) 求证： $BG^2 - GE^2 = EA^2$ 。



考点：全等三角形的判定与性质；线段垂直平分线的性质；勾股定理。

解答：证明：(1) $\angle BDC = \angle BEC = \angle CDA = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 45^\circ$ ，

$$\angle BCD = 45^\circ \cong \angle ABC, \quad \angle A + \angle DCA = 90^\circ, \quad \angle A + \angle ABE = 90^\circ,$$

$$DB = DC, \quad \angle ABE = \angle DCA,$$

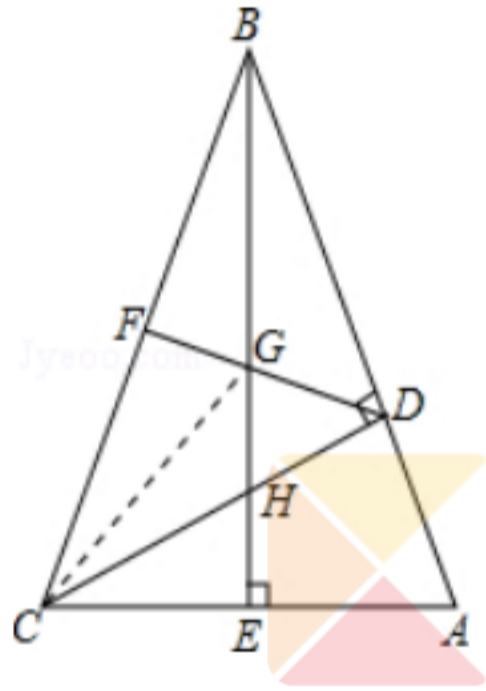
在 $\triangle DBH$ 和 $\triangle DCA$ 中

$\angle DBH = \angle DCA$, $\angle BDH = \angle CDA$, $BD = CD$,
 $\angle DBH = \angle DCA$,
 $BH = AC$.

(2) 连接 CG ,
 F 为 BC 的中点 , $DB = DC$,
 DF 垂直平分 BC ,
 $BG = CG$,
 $\angle ABE = \angle CBE$, $BE \perp AC$,
 $\angle AEB = \angle CEB$,

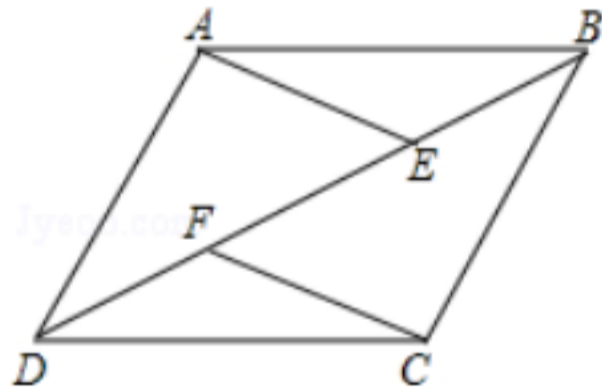
在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CBE$ 中
 $\angle AEB = \angle CEB$, $BE = BE$, $\angle CBE = \angle ABE$,
 $\triangle ABE \cong \triangle CBE$,
 $EC = EA$,

在 $\text{Rt} \triangle CGE$ 中 , 由勾股定理得 : $BG^2 - GE^2 = EA^2$.



学而思 1对1

25 . (2012 铜仁) 如图 , E 、 F 是四边形 $ABCD$ 的对角线 BD 上的两点 , $AE \perp CF$, $AE = CF$,
 $BE = DF$. 求证 : $\triangle ADE \cong \triangle CBF$.



考点 : 全等三角形的判定。

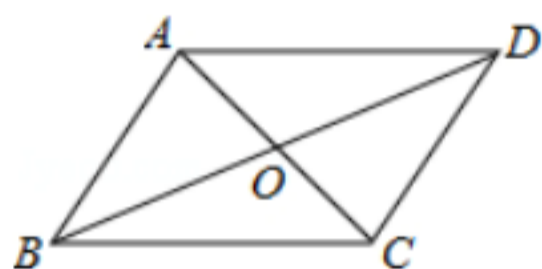
解答 : 证明 : $AE \perp CF$
 $\angle AED = \angle CFB$, ... (3 分)
 $DF = BE$,
 $DF + EF = BE + EF$,
 即 $DE = BF$, ... (6 分)
 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 中 ,

$$\begin{cases} AE = CF \\ \angle AED = \angle CFB, \dots (9 \text{分}) \\ DE = BF \end{cases}$$

$\triangle ADE \cong \triangle CBF$ (SAS) ... (10分).

26. (2012 广东) 已知：如图，在四边形 ABCD 中， $AB \parallel CD$ ，对角线 AC、BD 相交于点 O， $BO=DO$ 。

求证：四边形 ABCD 是平行四边形。



考点：平行四边形的判定；全等三角形的判定与性质。 (21 世纪教育网版权所有)

解答：证明： $AB \parallel CD$ ，

$\triangle ABO \cong \triangle CDO$ ，(21 世纪教育网版权所有)

在 $\triangle ABO$ 与 $\triangle CDO$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABO = \angle CDO \\ BO = DO \\ \angle AOB = \angle DOC \end{cases}$$

$\triangle ABO \cong \triangle CDO$ ，

$AB = CD$ ，

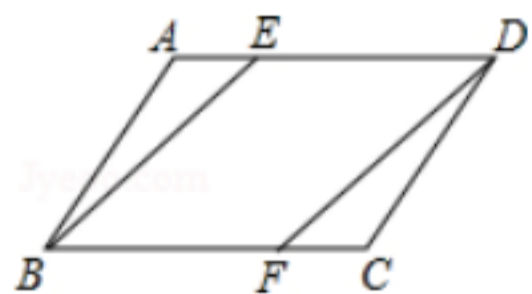
四边形 ABCD 是平行四边形。

学而思 1对1

27. (2012 湛江) 如图，在平行四边形 ABCD 中，E、F 分别在 AD、BC 边上，且 $AE=CF$ 。

求证：(1) $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ ；

(2) 四边形 BFDE 是平行四边形。



解：证明：(1) 四边形 ABCD 是平行四边形，

$\angle A = \angle C$ ， $AB = CD$ ，

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases} AB = CD \\ \angle A = \angle C \\ AE = CF \end{cases}$$

$\triangle ABE \cong \triangle CDF$ (SAS)；

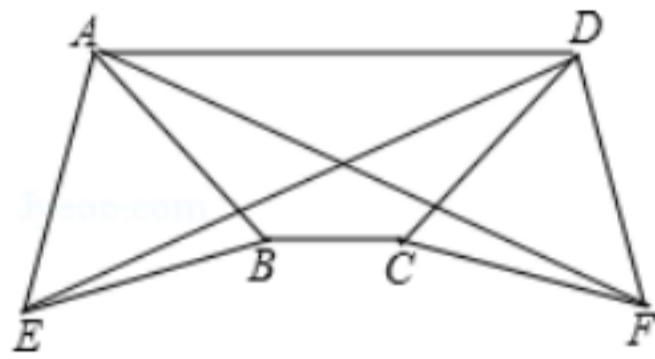
(2) 四边形 BFDE 是平行四边形，

$AD \parallel BC$, $AD=BC$,
 $AE=CF$,
 $AD - AE=BC - CF$,
 即 $DE=BF$,
 四边形 $BFDE$ 是平行四边形 .

28 . (2012 ? 杭州) 如图 , 在梯形 $ABCD$ 中 , $AD \parallel BC$, $AB=CD$, 分别以 AB , CD 为边向外侧作等边三角形 ABE 和等边三角形 DCF , 连接 AF , DE .

(1) 求证 : $AF=DE$;

(2) 若 $\angle BAD=45^\circ$, $AB=a$, ABE 和 DCF 的面积之和等于梯形 $ABCD$ 的面积 , 求 BC 的长 .



考点 : 等腰梯形的性质 ; 全等三角形的判定与性质 ; 等边三角形的性质 .

专题 : 探究型 . <http://www.21cnjy.com/>

分析 : (1) 根据等腰梯形的性质和等边三角形的性质以及全等三角形的判定方法证明 $\triangle AED \cong \triangle DFA$ 即可 ;

(2) 如图作 $BH \perp AD$, $CK \perp AD$, 利用给出的条件和梯形的面积公式即可求出 BC 的长 .

解答 : (1) 证明 : 在梯形 $ABCD$ 中 , $AD \parallel BC$, $AB=CD$,

$\angle BAD = \angle CDA$,

而在等边三角形 ABE 和等边三角形 DCF 中 ,

$AB=AE$, $DC=DF$, 且 $\angle BAE = \angle CDF = 60^\circ$,

$\angle EAD = \angle FDA$, $AD=DA$,

$\triangle AED \cong \triangle DFA$ (SAS) ,

$AF=DE$;

(2) 解 : 如图作 $BH \perp AD$, $CK \perp AD$, 则有 $BC=HK$,

$\angle BAD = 45^\circ$,

$\angle HAB = \angle KDC = 45^\circ$,

$AB = \sqrt{2}BH = \sqrt{2}AH$,

同理 : $CD = \sqrt{2}CK = \sqrt{2}KD$,

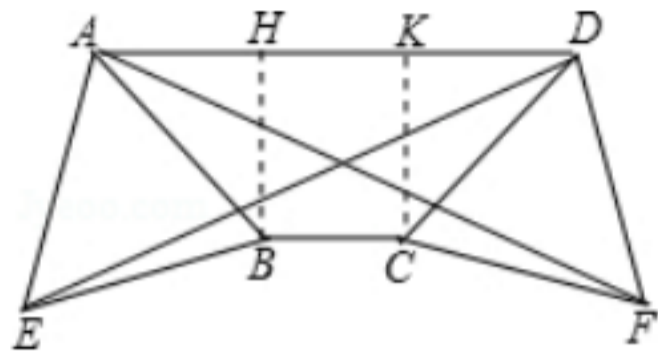
$S_{\text{梯形 } ABCD} = \frac{(AD+BC) \cdot HB}{2}$, $AB=a$,

$$S_{\text{梯形 } ABCD} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}a}{2} \times 2 + 2BC\right) \cdot \frac{\sqrt{2}a}{2}}{2} = \frac{a^2 + \sqrt{2}aBC}{2}$$

而 $S_{ABE} = S_{DCF} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$,

$$\frac{a^2 + \sqrt{2}aBC}{2} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

$$BC = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}a.$$



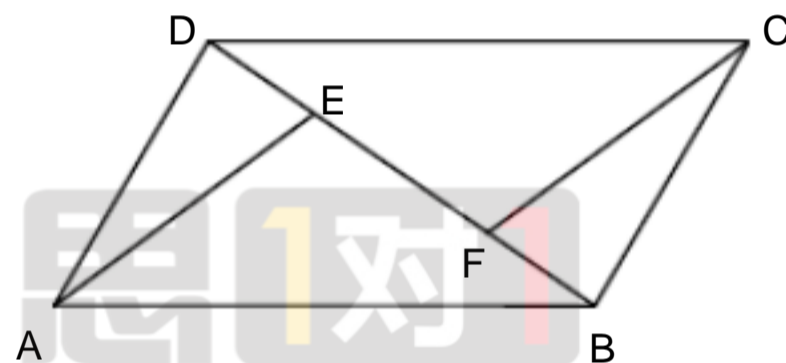
点评：本题综合性的考查了等腰梯形的性质、等边三角形的性质、全等三角形的判定、全等三角形的性质以及等于直角三角形的性质和梯形、三角形的面积公式，属于中档题目。

29. (2012黄石) (本小题满分 7 分) 如图(8), 已知在平行四边形 ABCD 中, $BE = DF$. 求证: $\angle DAE = \angle BCF$.

【考点】平行四边形的性质; 平行线的性质; 全等三角形的判定与性质.

【专题】证明题.

【分析】根据平行四边形性质求出 $AD \parallel BC$, 且 $AD = BC$, 推出 $\angle ADE = \angle CBF$, 求出 $DE = BF$, 证 $\triangle ADE \cong \triangle CBF$, 推出 $\angle DAE = \angle BCF$ 即可.



图(8)

【解答】证明： 四边形 ABCD 为平行四边形

$AD \parallel BC$, 且 $AD = BC$

$\angle ADE = \angle CBF$ 2 分

又 $BE = DF$, $BF = DE$ 1 分

$\triangle ADE \cong \triangle CBF$ 2 分

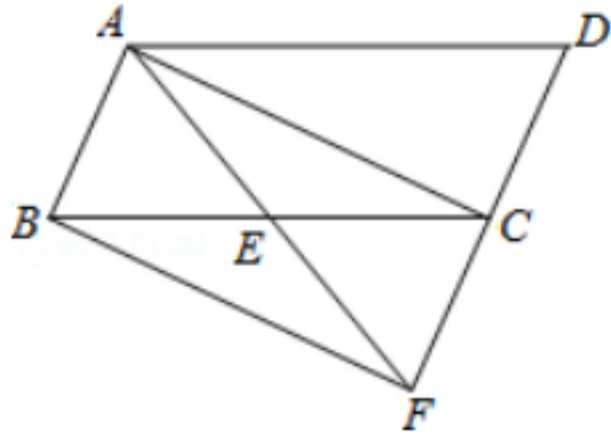
$\angle DAE = \angle BCF$ 2 分

【点评】 本题考查了平行四边形性质, 平行线性质的应用, 全等三角形的性质和判定的应用, 关键是求出证出 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CBF$ 全等的三个条件, 主要考查学生的推理能力.

30. (2012 六盘水) 如图, 已知 E 是 $\square ABCD$ 中 BC 边的中点, 连接 AE 并延长 AE 交 DC 的延长线于点 F.

(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle FCE$.

(2) 连接 AC. BF, 若 $\angle AEC = 2\angle ABC$, 求证: 四边形 ABFC 为矩形.



考点：矩形的判定；全等三角形的判定与性质；平行四边形的性质。

专题：证明题。

分析：(1) 由 $ABCD$ 为平行四边形，根据平行四边形的对边平行得到 AB 与 DC 平行，根据两直线平行内错角相等得到一对角相等，由 E 为 BC 的中点，得到两条线段相等，再由对应角相等，利用 ASA 可得出三角形 ABE 与三角形 FCE 全等；

(2) 由 ABE 与 FCE 全等，根据全等三角形的对应边相等得到 $AB=CF$ ；再由 AB 与 CF 平行，根据一组对边平行且相等的四边形为平行四边形得到 $ABFC$ 为平行四边形，根据平行四边形的对角线互相平分得到 $AE=EF$ ， $BE=EC$ ；再由 AEC 为三角形 ABE 的外角，利用外角的性质得到 $\angle AEC$ 等于 $\angle ABE + \angle EAB$ ，再由 $\angle AEC = 2\angle ABC$ ，得到 $\angle ABE = \angle EAB$ ，利用等角对等边可得出 $AE=BE$ ，可得出 $AF=BC$ ，利用对角线相等的平行四边形为矩形可得出 $ABFC$ 为矩形。

解答：证明：(1) 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$AB \parallel DC$ ，

$\angle ABE = \angle ECF$ ，

又 E 为 BC 的中点，

$BE = CE$ ，

在 ABE 和 FCE 中，

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle ECF \\ BE = CE \\ \angle AEB = \angle FEC \text{ (对应角相等)} \end{cases},$$

$\triangle ABE \cong \triangle FCE$ (ASA)；

(2) $\triangle ABE \cong \triangle FCE$ ，

$AB = CF$ ，又 $AB \parallel CF$ ，

四边形 $ABFC$ 为平行四边形，

$BE = EC$ ， $AE = EF$ ，

又 $\angle AEC = 2\angle ABC$ ，且 $\angle AEC$ 为 $\triangle ABE$ 的外角，

$\angle AEC = \angle ABC + \angle EAB$ ，

$\angle ABC = \angle EAB$ ，

$AE = BE$ ，

$AE + EF = BE + EC$ ，即 $AF = BC$ ，

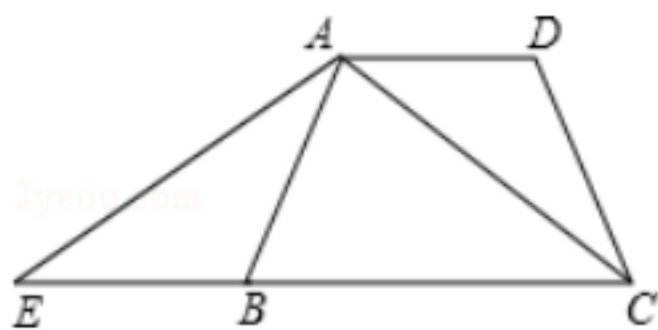
则四边形 $ABFC$ 为矩形。

点评：此题考查了矩形的判定，平行四边形的性质，三角形的外角性质，等腰三角形的判定与性质，以及全等三角形的判定与性质，熟练掌握判定与性质是解本题的关键。

学而思 1对1

31. (2012 苏州) 如图, 在梯形 ABCD 中, 已知 $AD \parallel BC$, $AB=CD$, 延长线段 CB 到 E, 使 $BE=AD$, 连接 AE、AC.

- (1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle CDA$;
 (2) 若 $\angle DAC=40^\circ$, 求 $\angle EAC$ 的度数.



考点: 梯形; 全等三角形的判定与性质。

专题: 证明题。

分析: (1) 先根据题意得出 $\angle ABE = \angle CDA$, 然后结合题意条件利用 SAS 可判断三角形的全等;
 (2) 根据题意可分别求出 $\angle AEB$ 及 $\angle ACE$ 的度数, 在 $\triangle AEC$ 中利用三角形的内角和定理即可得出答案.

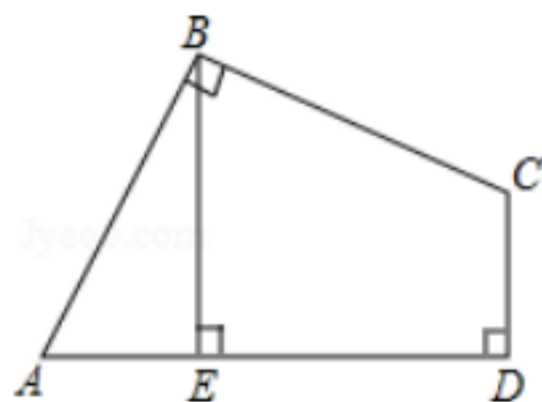
解答: (1) 证明: 在梯形 ABCD 中, $AD \parallel BC$, $AB=CD$,
 $\angle ABE = \angle BAD$, $\angle BAD = \angle CDA$,
 $\angle ABE = \angle CDA$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDA$ 中, $\begin{cases} AB=CD \\ \angle ABE = \angle CDA \\ BE=DA \end{cases}$
 $\triangle ABE \cong \triangle CDA$.

(2) 解: 由 (1) 得: $\angle AEB = \angle CAD$, $AE=AC$,
 $\angle AEB = \angle ACE$,
 $\angle DAC=40^\circ$,
 $\angle AEB = \angle ACE=40^\circ$,
 $\angle EAC=180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$.

点评: 此题考查了梯形、全等三角形的判定及性质, 解答本题的关键是根据梯形及题意条件得出一些线段之间的关系, 注意所学知识的融会贯通.

32. (2012 扬州) 如图, 在四边形 ABCD 中, $AB=BC$, $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$, BE \perp AD, 垂足为 E. 求证: $BE = DE$.

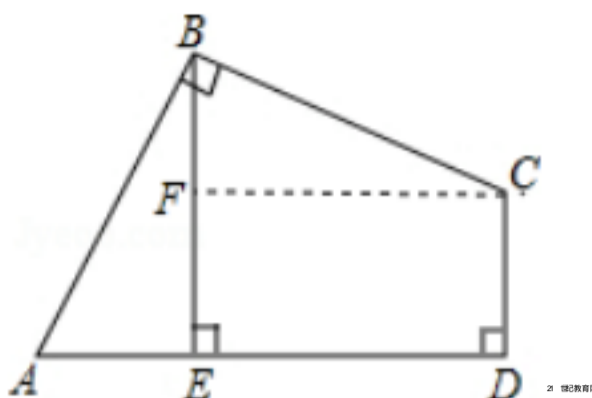


考点: 全等三角形的判定与性质; 矩形的判定与性质。

专题: 证明题。

分析：作 $CF \perp BE$ ，垂足为 F ，得出矩形 $CFED$ ，求出 $\angle CBF = \angle A$ ，根据 AAS 证 $\triangle BAE \cong \triangle CBF$ ，推出 $BE = CF$ 即可。

解答：



证明：作 $CF \perp BE$ ，垂足为 F ，

$BE \perp AD$ ，

$\angle AEB = 90^\circ$ ，[来源:学_科_网 Z_X_X_K]

$\angle FED = \angle D = \angle CFE = 90^\circ$ ， $\angle CBE + \angle ABE = 90^\circ$ ， $\angle BAE + \angle ABE = 90^\circ$ ，

$\angle BAE = \angle CBF$ ，

四边形 $EFCD$ 为矩形，

$DE = CF$ ，

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle CBF$ 中，有 $\angle CBE = \angle BAE$ ， $\angle BFC = \angle BEA = 90^\circ$ ， $AB = BC$ ，

$\triangle BAE \cong \triangle CBF$ ，

$BE = CF = DE$ ，

即 $BE = DE$ 。

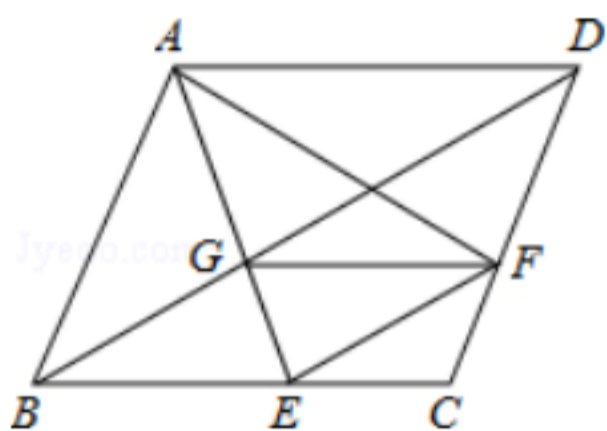
点评：本题考查了全等三角形的性质和判定，矩形的判定和性质的应用，关键是求出

$\angle BAE = \angle CBF$ ，主要考查学生运用性质进行推理的能力。

33. (2012 上海) 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD ， $\angle BAF = \angle DAE$ ， AE 与 BD 交于点 G 。

(1) 求证： $BE = DF$ ；

(2) 当 $\frac{DF}{FC} = \frac{AD}{DF}$ 时，求证：四边形 $BEFG$ 是平行四边形。



考点：平行线分线段成比例；全等三角形的判定与性质；平行四边形的判定；菱形的性质。

解答：证明：(1) 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$AB = AD$ ， $\angle ABC = \angle ADC$ ，

$\angle BAF = \angle DAE$ ，

$\angle BAF - \angle EAF = \angle DAE - \angle EAF$ ，

即： $\angle BAE = \angle DAF$ ，

$\triangle BAE \cong \triangle DAF$

$BE = DF$ ；

(2) $\frac{DF}{FC} = \frac{AD}{DF}$ ，

$$\frac{FD}{FC} = \frac{AD}{BE} = \frac{DG}{GB}$$

FG // BC

$$\angle DGF = \angle DBC = \angle BDC$$

$$DF = GF$$

$$BE = GF$$

四边形 BEFG 是平行四边形 .

34 . (2012 中考) (本小题满分 10 分)

如图 , 菱形 ABCD 中 , $\angle B = 60^\circ$,
点 E 在边 BC 上 , 点 F 在边 CD 上 .

(1) 如图 1 , 若 E 是 BC 的中点 ,
 $\angle AEF = 60^\circ$, 求证 : $BE = DF$;

(2) 如图 2 , 若 $\angle EAF = 60^\circ$,
求证 : $\triangle AEF$ 是等边三角形 .

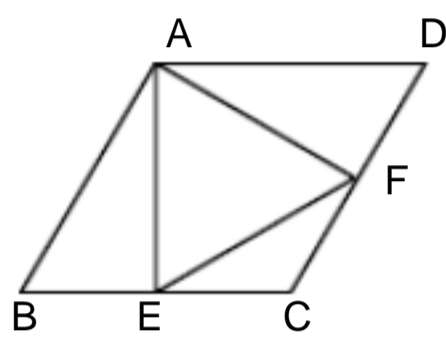


图 1

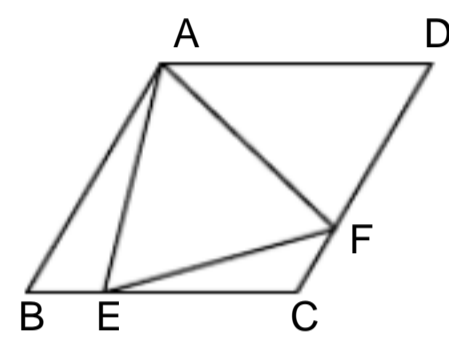


图 2

【考点】菱形的性质；全等三角形的判定与性质；等边三角形的判定 .

[来源 :Zxxk.Com]

【专题】证明题 .

【分析】(1) 首先连接 AC , 由菱形 ABCD 中 , $\angle B = 60^\circ$, 根据菱形的性质 , 易得 $\triangle ABC$ 是等边三角形 , 又由三线合一 , 可证得 $AE \perp BC$, 继而求得 $\angle FEC = \angle CFE$, 即可得 $EC = CF$, 继而证得 $BE = DF$;

(2) 首先连接 AC , 可得 $\triangle ABC$ 是等边三角形 , 即可得 $AB = AC$, 以求得 $\angle ACF = \angle B = 60^\circ$, 然后利用平行线与三角形外角的性质 , 可求得 $\angle AEB = \angle AFC$, 证得 $\triangle AEB \cong \triangle AFC$, 即可得 $AE = AF$, 证得 : $\triangle AEF$ 是等边三角形 .

【解答】证明 : (1) 连接 AC ,

菱形 ABCD 中 , $\angle B = 60^\circ$,
 $AB = BC = CD$, $\angle C = 180^\circ - \angle B = 120^\circ$,

$\triangle ABC$ 是等边三角形 ,

E 是 BC 的中点 ,

$AE \perp BC$,

$\angle AEF = 60^\circ$,

$\angle FEC = 90^\circ - \angle AEF = 30^\circ$,

$\angle CFE = 180^\circ - \angle FEC - \angle C$

$= 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ$,

$\angle FEC = \angle CFE$,

$EC = CF$,

$BE = DF$;

(2) 连接 AC ,

四边形 ABCD 是菱形 , $\angle B = 60^\circ$,

$AB = BC$, $\angle D = \angle B = 60^\circ$, $\angle ACB = \angle ACF$,

$\triangle ABC$ 是等边三角形 ,

$AB = AC$, $\angle ACB = 60^\circ$,

$\angle B = \angle ACF = 60^\circ$,

$AD \parallel BC$,

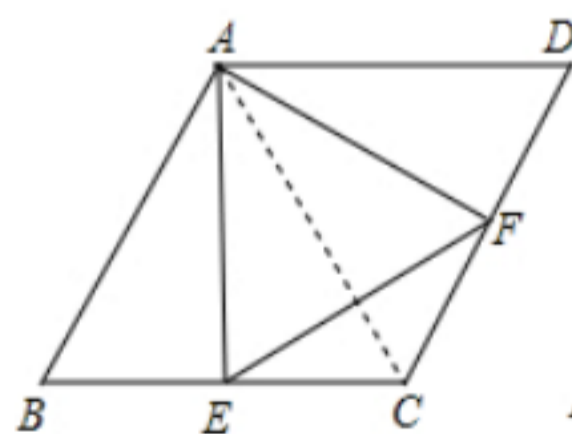


图1

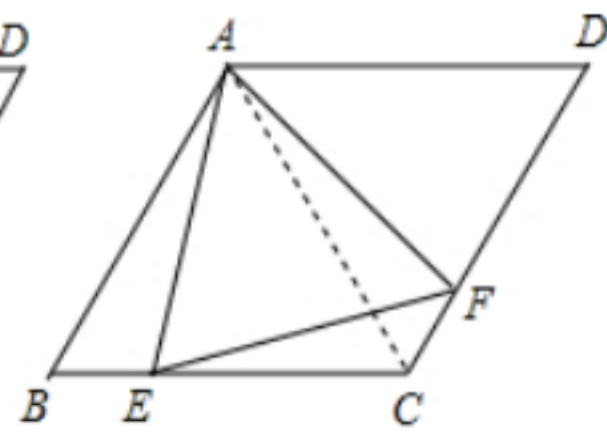


图2

$\angle AEB = \angle EAD = \angle EAF + \angle FAD = 60^\circ + \angle FAD$,
 $\angle AFC = \angle D + \angle FAD = 60^\circ + \angle FAD$,
 $\angle AEB = \angle AFC$,
 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle AFC$ 中 ,
 $\angle B = \angle ACF$ $\angle AEB = \angle AFC$ $AB = AC$
 $\triangle ABE \cong \triangle AFC$ (AAS) ,
 $AE = AF$,
 $\angle EAF = 60^\circ$,
 $\triangle AEF$ 是等边三角形 .

【点评】此题考查了菱形的性质、等边三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质以及等腰三角形的判定与性质. 此题难度适中, 注意准确作出辅助线, 注意数形结合思想的应用.

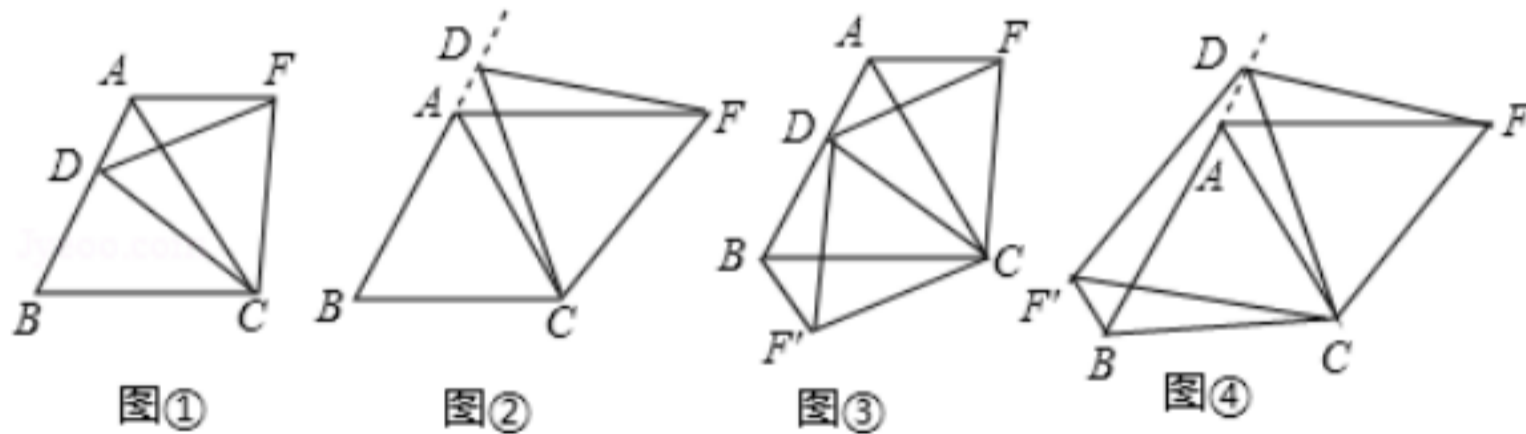
35. (2012 岳阳) (1) 操作发现: 如图, D 是等边 $\triangle ABC$ 边 BA 上一动点 (点 D 与点 B 不重合), 连接 DC , 以 DC 为边在 BC 上方作等边 $\triangle DCF$, 连接 AF . 你能发现线段 AF 与 BD 之间的数量关系吗? 并证明你发现的结论.

(2) 类比猜想: 如图, 当动点 D 运动至等边 $\triangle ABC$ 边 BA 的延长线上时, 其他作法与 (1) 相同, 猜想 AF 与 BD 在 (1) 中的结论是否仍然成立?

(3) 深入探究:

. 如图, 当动点 D 在等边 $\triangle ABC$ 边 BA 上运动时 (点 D 与点 B 不重合) 连接 DC , 以 DC 为边在 BC 上方、下方分别作等边 $\triangle DCF$ 和等边 $\triangle DCF'$, 连接 AF 、 BF , 探究 AF 、 BF 与 AB 有何数量关系? 并证明你探究的结论.

. 如图, 当动点 D 在等边 $\triangle ABC$ 边 BA 的延长线上运动时, 其他作法与图 相同, 中的结论是否成立? 若不成立, 是否有新的结论? 并证明你得出的结论.



考点 :	全等三角形的判定与性质; 等边三角形的性质.
专题 :	几何综合题.
分析 :	<p>(1) 根据等边三角形的三条边、三个内角都相等的性质, 利用全等三角形的判定定理 SAS 可以证得 $\triangle BCD \cong \triangle ACF$; 然后由全等三角形的对应边相等知 $AF = BD$;</p> <p>(2) 通过证明 $\triangle BCD \cong \triangle ACF$, 即可证明 $AF = BD$;</p> <p>(3) . $AF + BF = AB$; 利用全等三角形 $\triangle BCD \cong \triangle ACF$ (SAS) 的对应边 $BD = AF$; 同理 $\triangle BCF \cong \triangle ACD$ (SAS), 则 $BF = AD$, 所以 $AF + BF = AB$;</p> <p>. 中的结论不成立. 新的结论是 $AF = AB + BF$; 通过证明 $\triangle BCF \cong \triangle ACD$ (SAS), 则 $BF = AD$ (全等三角形的对应边相等) ; 再结合 (2) 中的结论即可证得 $AF = AB + BF$.</p>
解答 :	<p>解: (1) $AF = BD$;</p> <p>证明如下: $\triangle ABC$ 是等边三角形 (已知) ,</p>

$BC=AC$, $\angle BCA=60^\circ$ (等边三角形的性质) ;
 同理知 , $DC=CF$, $\angle DCF=60^\circ$;
 $\angle BCA - \angle DCA = \angle DCF - \angle DCA$, 即 $\angle BCD = \angle ACF$;

在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ACF$ 中 ,

$$\begin{cases} BC=AC \\ \angle BCD=\angle ACF, \\ DC=FC \end{cases}$$

$\triangle BCD \cong \triangle ACF$ (SAS),

$BD=AF$ (全等三角形的对应边相等) ;

(2) 证明过程同 (1), 证得 $\triangle BCD \cong \triangle ACF$ (SAS), 则 $AF=BD$ (全等三角形的对应边相等), 所以 , 当动点 D 运动至等边 $\triangle ABC$ 边 BA 的延长线上时 , 其他作法与 (1) 相同 , $AF=BD$ 仍然成立 ;

(3) . $AF+BF = AB$;

证明如下 : 由 (1) 知 , $\triangle BCD \cong \triangle ACF$ (SAS), 则 $BD=AF$;

同理 $\triangle BCF \cong \triangle ACD$ (SAS), 则 $BF = AD$,

$AF+BF = BD+AD=AB$;

. 中的结论不成立 . 新的结论是 $AF=AB+BF$;

证明如下 : 在 $\triangle BCF'$ 和 $\triangle ACD$ 中 ,

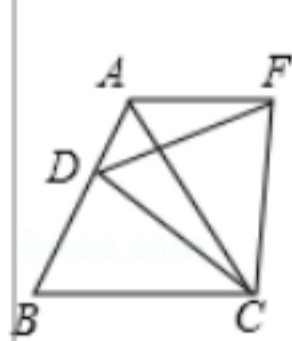
$$\begin{cases} BC=AC \\ \angle BCF' = \angle ACD, \\ F'C=DC \end{cases}$$

$\triangle BCF' \cong \triangle ACD$ (SAS),

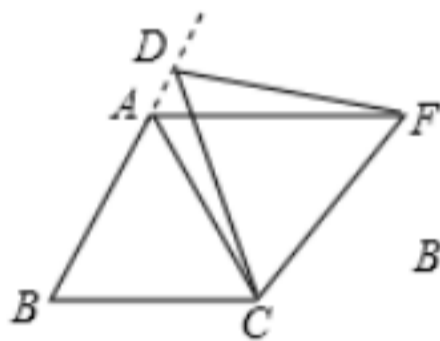
$BF' = AD$ (全等三角形的对应边相等) ;

又由 (2) 知 , $AF=BD$;

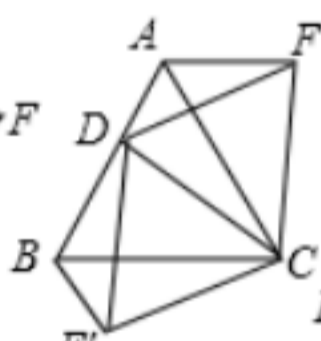
$AF=BD=AB+AD=AB+BF'$, 即 $AF=AB+BF$.



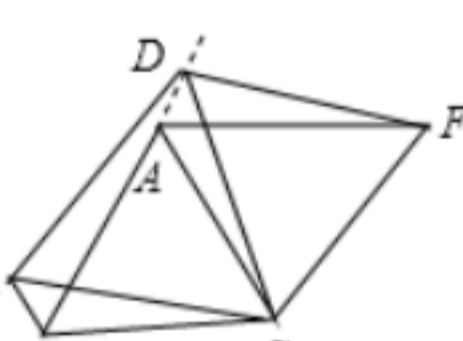
图①



图②



图③

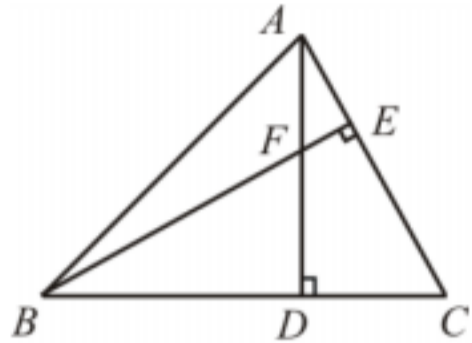


图④

点评 : 本题考查了全等三角形的判定与性质、等边三角形的性质 . 等边三角形的三条边都相等 , 三个内角都是 60° .

1. (2011安徽芜湖, 6, 4分)如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 45^\circ$, F 是高 AD 和 BE 的交点, $CD = 4$, 则线段 DF 的长度为 ().

- A. $2\sqrt{2}$ B. 4 C. $3\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

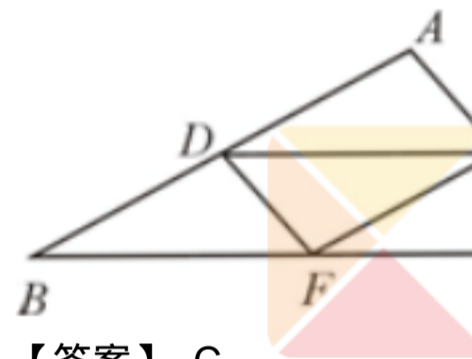


第6题图

【答案】 B

2. (2011山东威海, 6, 3分)在 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, 点 D, E 分别是边 AB, AC 的中点, 点 F 在 BC 边上, 连接 DE, DF, EF . 则添加下列哪一个条件后, 仍无法判定 $\triangle BFD$ 与 $\triangle EDF$ 全等 ().

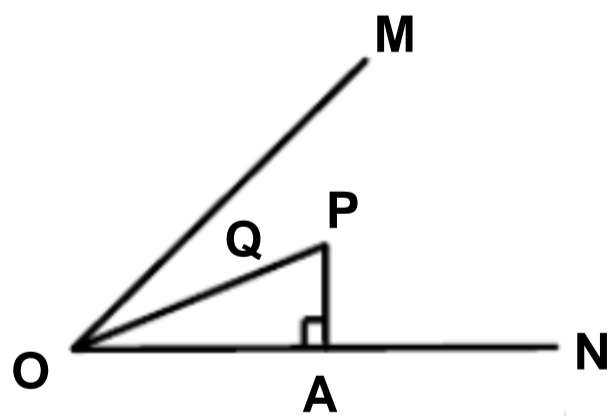
- A. $EF \perp AB$ B. $BF = CF$ C. $\angle A = \angle DFE$ D. $\angle B = \angle DFE$



【答案】 C

3. (2011浙江衢州, 1, 3分)如图, OP 平分 $\angle MON$, $PA \perp ON$ 于点 A , 点 Q 是射线 OM 上的一个动点, 若 $PA = 2$, 则 PQ 的最小值为 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

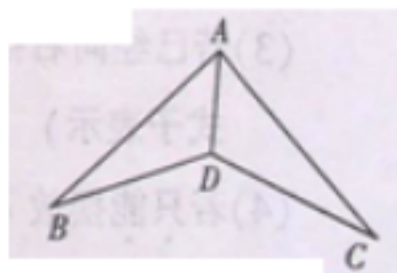


(第6题)

【答案】 B

4. (2011江西, 7, 3分)如图下列条件中, 不能证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 的是 ().

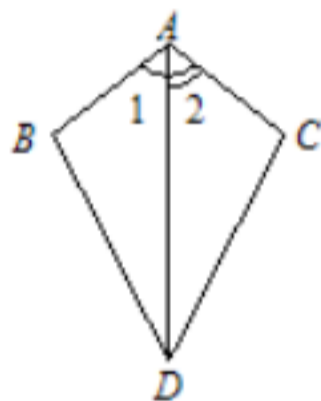
- A. $BD = DC, AB = AC$ B. $\angle ADB = \angle ADC$
C. $\angle B = \angle C, \angle BAD = \angle CAD$ D. $\angle B = \angle C, BD = DC$



第 7 题图

【答案】 D

5. (2011 江苏宿迁, 7, 3 分) 如图, 已知 $\angle 1 = \angle 2$, 则不一定能使 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 的条件是 ()
- A. $AB = AC$ B. $BD = CD$ C. $\angle B = \angle C$ D. $\angle BDA = \angle CDA$



(第 7 题)

【答案】 B

6. (2011 江西南昌, 7, 3 分) 如图下列条件中, 不能证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 的是 () .
- A. $BD = DC, AB = AC$ B. $\angle ADB = \angle ADC$
 C. $\angle B = \angle C, \angle BAD = \angle CAD$ D. $\angle B = \angle C, BD = DC$



第 7 题图

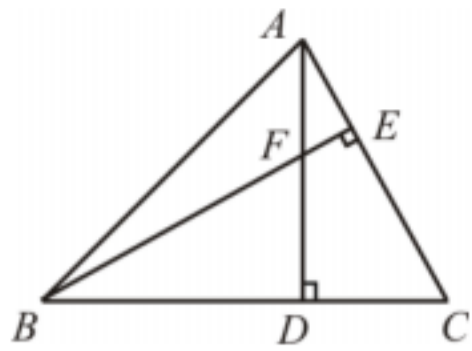
【答案】 D

7. (2011 上海, 5, 4 分) 下列命题中, 真命题是 () .
- (A) 周长相等的锐角三角形都全等; (B) 周长相等的直角三角形都全等;
 (C) 周长相等的钝角三角形都全等; (D) 周长相等的等腰直角三角形都全等.

【答案】 D

8. (2011 安徽芜湖, 6, 4 分) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 45^\circ$, F 是高 AD 和 BE 的交点, $CD = 4$, 则线段 DF 的长度为 () .

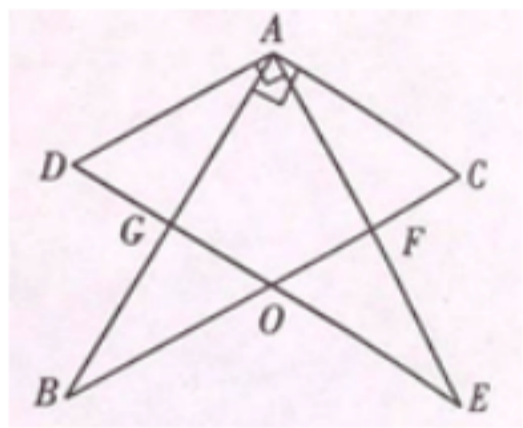
- A. $2\sqrt{2}$ B. 4 C. $3\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$



【答案】 B

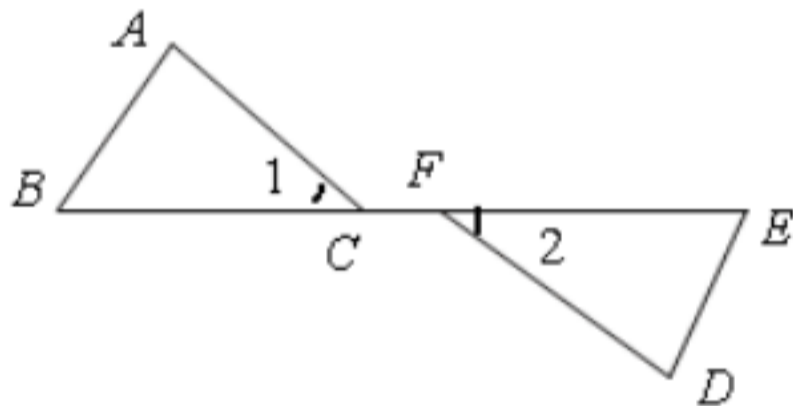
二、填空题

1. (2011 江西, 16, 3 分) 如图所示, 两块完全相同的含 30° 角的直角三角形叠放在一起, 且 $\angle DAB=30^\circ$ 。有以下四个结论: $AF \perp BC$; $AD \perp GC$; O 为 BC 的中点; $AG:DE = \sqrt{3} : 4$, 其中正确结论的序号是 _____ (错填得 0 分, 少填酌情给分)



【答案】

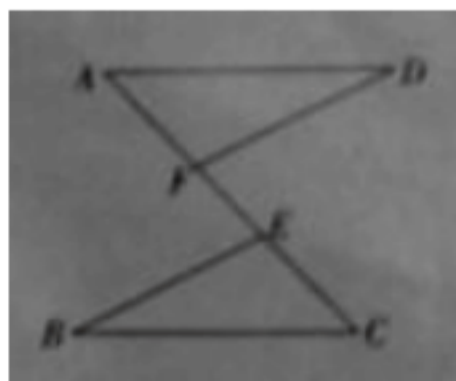
2. (2011 广东湛江 19, 4 分) 如图, 点 B, C, F, E 在同一直线上, $\angle 1 = \angle 2$, $BC = FE$, $\angle 1$ (填“是”或“不是”) $\angle 2$ 的对顶角, 要使 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, 还需添加一个条件, 这个条件可以是 _____ (只需写出一个)。



【答案】 $AC = DF$

三、解答题

1. (2011 广东东莞, 13, 6 分) 已知: 如图, E, F 在 AC 上, $AD \parallel CB$ 且 $AD=CB$, $\angle D = \angle B$ 求证: $AE=CF$



【答案】 $AD \parallel CB$

$\angle A = \angle C$

又 $AD=CB$, $\angle D = \angle B$

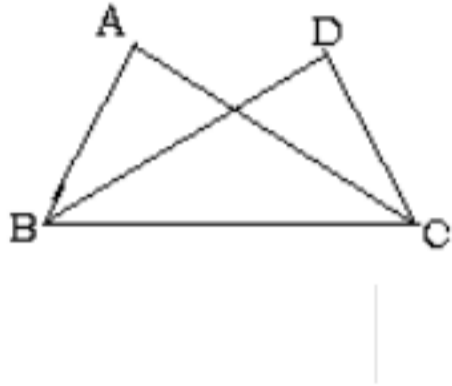
$$\triangle ADF \cong \triangle CBE$$

$$AF = CE$$

$$AF + EF = CE + EF$$

即 $AE = CF$

2. (2011 山东菏泽, 15(2), 6分) 已知: 如图, $\angle ABC = \angle DCB$, BD 、 CA 分别是 $\triangle ABC$ 、 $\triangle DCB$ 的平分线. 求证: $AB = DC$



证明: 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DCB$ 中

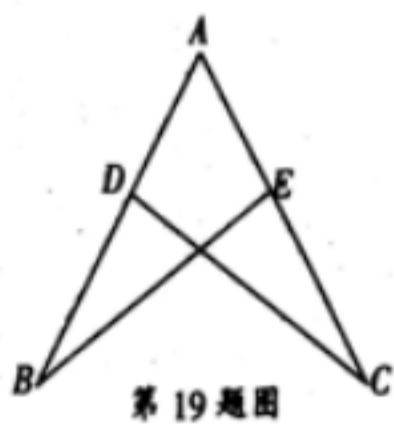
$$\begin{cases} \angle ABC = \angle DCB \text{ (已知)} \\ \angle ACB = \angle DBC \text{ (} \angle AC \text{ 平分 } \angle DCB, \angle BD \text{ 平分 } \angle ABC) \\ BC = BC \text{ (公共边)} \end{cases}$$

$$AB = DC$$

3. (2011 浙江省, 19, 8分) 如图, 点 D, E 分别在 AC, AB 上.

(1) 已知, $BD = CE$, $CD = BE$, 求证: $AB = AC$;

(2) 分别将“ $BD = CE$ ”记为 p , “ $CD = BE$ ”记为 q , “ $AB = AC$ ”记为 r . 添加条件 p, q , 以 r 为结论构成命题 1, 添加条件 p, r 以 q 为结论构成命题 2. 命题 1 是命题 2 的 _____ 命题, 命题 2 是 _____ 命题. (选择“真”或“假”填入空格).



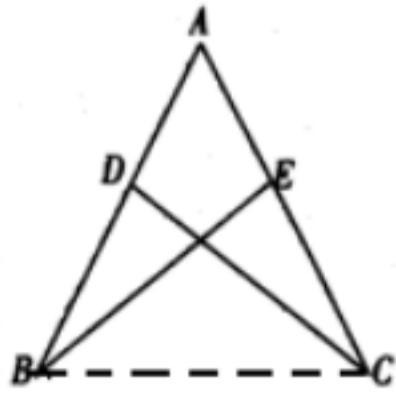
【答案】

(1) 连结 BC , $BD = CE$, $CD = BE$, $BC = CB$

$\triangle DBC \cong \triangle ECB$ (SSS)

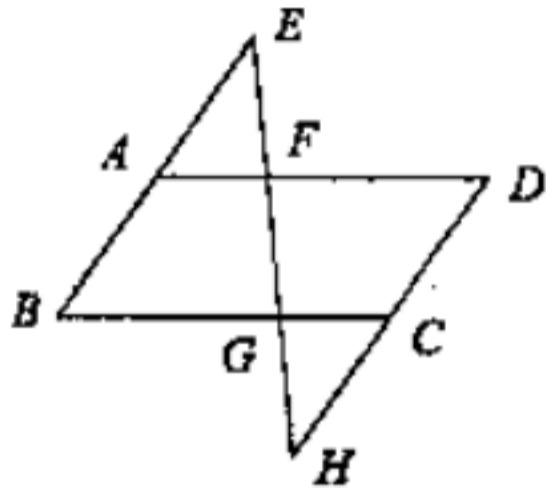
$\angle DBC = \angle ECB$

$AB = AC$



(2) 逆，假；

4. (2011 浙江台州, 19,8 分) 如图, 在 $ABCD$ 中, 分别延长 BA, DC 到点 E, H , 使得 $AE=AB, CH=CD$ 连接 EH , 分别交 AD, BC 于点 F, G . 求证: $AEF \cong CHG$.



【答案】证明：

$ABCD$

$AB=CD, \angle BAD=\angle BCD, AB \parallel CD$

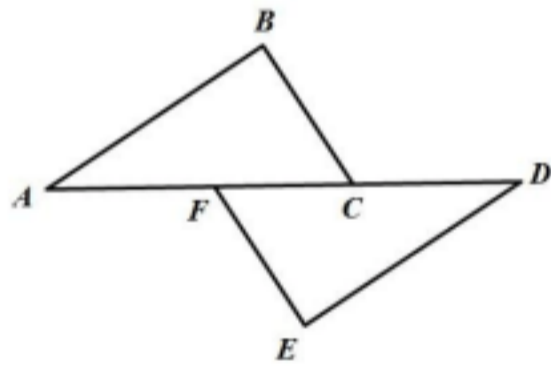
$\angle EAF=\angle HCG, \angle E=\angle H$

$AE=AB, CH=CD$

$AE=CH$

$\triangle AEF \cong \triangle CHG$.

5. (2011 四川重庆, 19, 6 分) 如图, 点 A, F, C, D 在同一直线上, 点 B 和点 E 分别在直线 AD 的两侧, 且 $AB=DE, \angle A=\angle D, AF=DC$. 求证: $BC \parallel EF$.



【证明】 $AF=DC, AC=DF$, 又 $\angle A=\angle D$,

$AB=DE, \triangle ABC \cong \triangle DEF$,

$\angle ACB=\angle DFE, BC \parallel EF$.

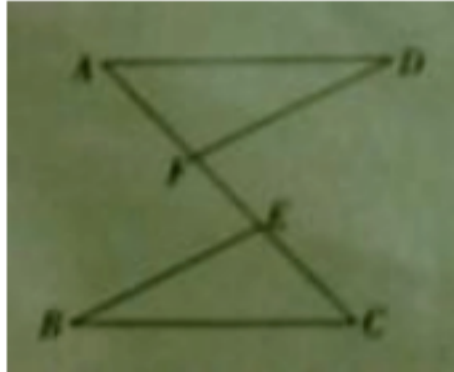
6. (2011 江苏连云港, 20, 6 分) 两块完全相同的三角形纸板 ABC 和 DEF , 按如图所示的方式叠放, 阴影部分为重叠部分, 点 O 为边 AC 和 DF 的交点. 不重叠的两部分 $\triangle AOF$ 与 $\triangle DOC$ 是否全等? 为什么?



(第20题图)

【答案】解：全等。理由如下：两三角形纸板完全相同， $AG=BF$, $AB=BD$, $A=D$,
 $AB-BF=BD-BC$, 即 $AF=DC$ 在 $\triangle AOF$ 和 $\triangle DOC$ 中, $AF=DC$, $A=D$, $\angle AOF=\angle DOC$,
 $\triangle AOF \cong \triangle DOC$ (AAS).

7. (2011 广东汕头, 13, 6分) 已知: 如图, E, F 在 AC 上, $AD \parallel CB$ 且 $AD=CB$, $D=B$
 求证: $AE=CF$

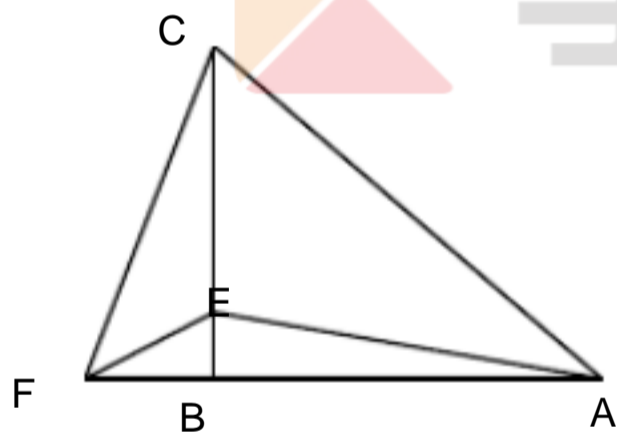


【答案】 $AD \parallel CB$
 $\angle A = \angle C$
 又 $AD=CB$, $\angle D = \angle B$
 $\triangle ADF \cong \triangle CBE$
 $AF=CE$
 $AF+EF=CE+EF$

即 $AE=CF$

8. (2011 重庆江津, 22, 10分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=CB$, $\angle ABC=90^\circ$, F 为 AB 延长线上一点, 点 E 在 BC 上, 且 $AE=CF$.

- (1) 求证: $\text{Rt} \triangle ABE \cong \text{Rt} \triangle CBF$;
- (2) 若 $\angle CAE=30^\circ$, 求 $\angle ACF$ 度数.



第 22 题图

【答案】 (1) $\angle ABC=90^\circ$, $\angle CBF=\angle ABE=90^\circ$.
 在 $\text{Rt} \triangle ABE$ 和 $\text{Rt} \triangle CBF$ 中,
 $AE=CF$, $AB=BC$, $\text{Rt} \triangle ABE \cong \text{Rt} \triangle CBF$ (HL) [来源: Zxxk.Com]
 (2) $AB=BC$, $\angle ABC=90^\circ$, $\angle CAB=\angle ACB=45^\circ$.
 $\angle BAE=\angle CAB-\angle CAE=45^\circ-30^\circ=15^\circ$.
 由 (1) 知 $\text{Rt} \triangle ABE \cong \text{Rt} \triangle CBF$, $\angle BCF=\angle BAE=15^\circ$,
 $\angle ACF=\angle BCF+\angle ACB=45^\circ+15^\circ=60^\circ$.

9. (2011 福建福州, 17(1), 8分) 如图 6, $AB \perp BD$ 于点 B , $ED \perp BD$ 于点 D , AE 交 BD
 于点 C , 且 $BC=DC$.

求证 $AB=ED$.

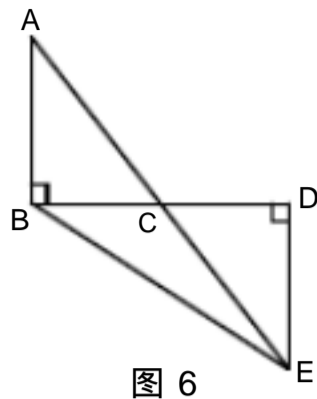


图 6

【答案】 (1) 证明： $AB \perp BD$, $ED \perp BD$

$$\angle ABC = \angle D = 90^\circ$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 中

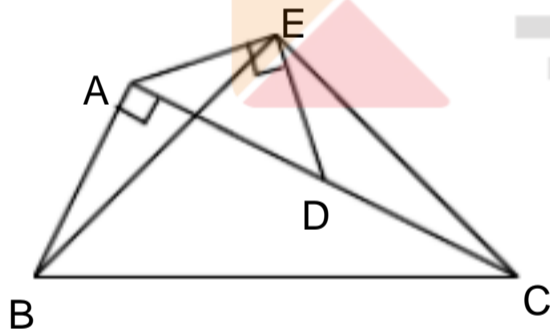
$$\begin{cases} \angle ABC = \angle D \\ BC = DC \\ \angle ACB = \angle ECD \end{cases}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle EDC$$

$$AB = ED$$

10. (2011 四川内江, 18, 9分) 如图, 在 $Rt \triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AC = 2AB$, 点 D 是 AC 的中点, 将一块锐角为 45° 的直角三角板如图放置, 使三角板斜边的两个端点分别与 A 、 D 重合, 连结 BE 、 EC .

试猜想线段 BE 和 EC 的数量及位置关系, 并证明你的猜想.



【答案】 $BE = EC$, $BE \perp EC$

$AC = 2AB$, 点 D 是 AC 的中点

$$AB = AD = CD$$

$$\angle EAD = \angle EDA = 45^\circ$$

$$\angle EAB = \angle EDC = 135^\circ$$

$$EA = ED$$

$$\angle EAB = \angle EDC$$

$$\angle AEB = \angle DEC, EB = EC$$

$$\angle BEC = \angle AED = 90^\circ$$

$$BE = EC, BE \perp EC$$

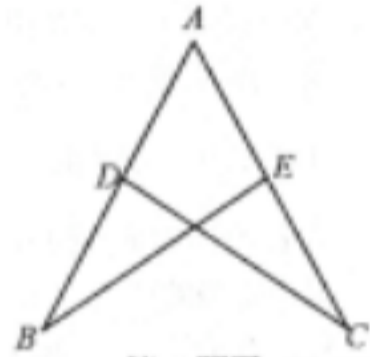
11. (2011 广东省, 13, 6分) 已知: 如图, E, F 在 AC 上, $AD \parallel CB$ 且 $AD = CB$, $D = B$. 求证: $AE = CF$



【答案】 $AD = CB$
 $\angle A = \angle C$
 又 $AD = CB$, $\angle D = \angle B$
 $\triangle ADF \cong \triangle CBE$
 $AF = CE$
 $AF + EF = CE + EF$

即 $AE = CF$

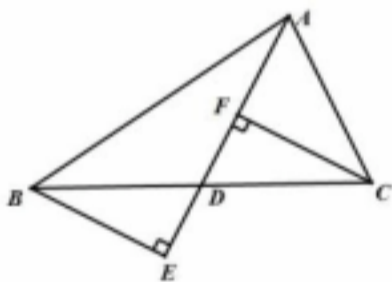
12. (2011 湖北武汉市, 19, 6 分)(本题满分 6 分)如图, D, E, 分别是 AB, AC 上的点, 且 $AB = AC$, $AD = AE$ 求证 $\angle B = \angle C$.



第19题图

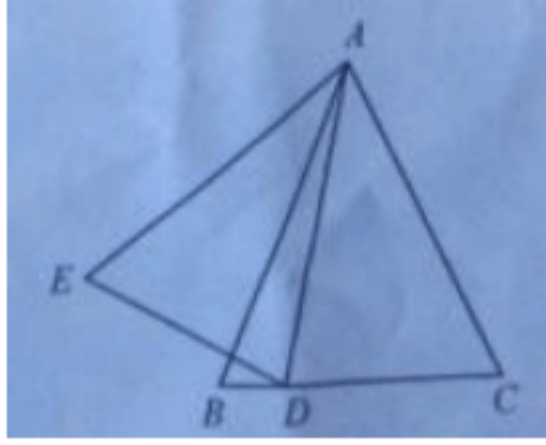
【答案】证明：在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACD$ 中，
 $AB = AC$, $\angle A = \angle A$, $AE = AD$
 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$
 $\angle B = \angle C$

13. (2011 湖南衡阳, 21, 6 分)如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是中线, 分别过点 B, C 作 AD 及其延长线的垂线 BE, CF, 垂足分别为点 E, F. 求证: $BE = CF$.



【证明】在 $\triangle ABC$ 中, AD 是中线,
 $BD = CD$, $CF \perp AD$, $BE \perp AD$, $\angle CFD = \angle BED = 90^\circ$, 在 $\triangle BED$ 与 $\triangle CFD$ 中, $\angle BED = \angle CFD$, $\angle BDE = \angle CDF$, $BD = CD$, $\triangle BED \cong \triangle CFD$, $BE = CF$.

14. (2011 江苏镇江, 22, 5 分)已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 上的一点, AD 平分 $\angle EDC$, 且 $\angle E = \angle B$, $ED = DC$.



求证 : $AB=AC$

【答案】证明 AD 平分 $\angle EDC$, $\angle ADE = \angle ADC$, 又 $DE=DC, AD=AD$,

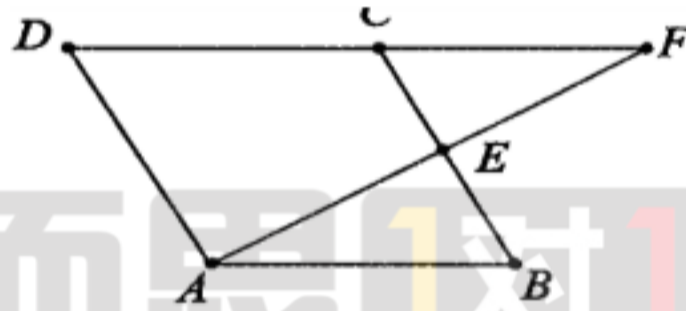
$\triangle ADE \cong \triangle ADC$, $\angle E = \angle C$,

又 $\angle E = \angle B$, $\angle B = \angle C$, $AB=AC$.

15. (2011 湖北宜昌, 18, 7 分) 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 为 BC 中点, AE 的延长线与 DC 的延长线相交于点 F .

(1) 证明: $\angle DFA = \angle FAB$;

(2) 证明: $\triangle ABE \cong \triangle FCE$.



(第 18 题图)

【答案】证明: (1) AB 与 CD 是平行四边形 $ABCD$ 的对边, $AB \parallel CD$, (1 分) $\angle F = \angle FAB$. (3 分) (2) 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FCE$ 中, $\angle FAB = \angle F$ (4 分) $\angle AEB = \angle FEC$ (5 分) $BE = CE$ (6 分) $\triangle ABE \cong \triangle FCE$. (7 分)

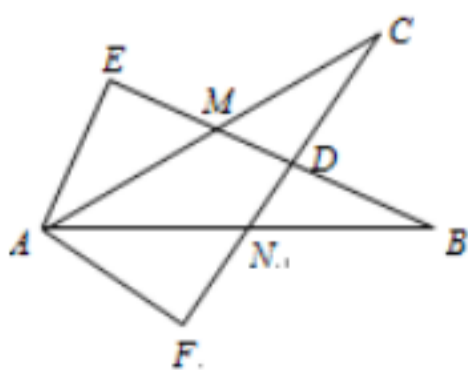
2010 年全国各地中考数学真题分类汇编

第 22 章 全等三角形 (

一、选择题

1. (2010 四川凉山) 如图所示, $\angle E = \angle F = 90^\circ$, $\angle B = \angle C$, $AE = AF$, 结论:

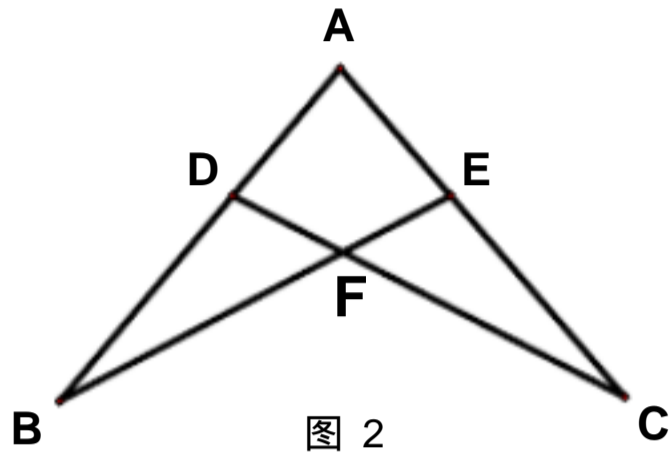
$EM = FN$; $CD = DN$; $\angle FAN = \angle EAM$; $\triangle ACN \cong \triangle ABM$. 其中正确的有



- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】 C

2. (2010 四川 巴中) 如图 2 所示, $AB = AC$, 要说明 $\triangle ADC \cong \triangle AEB$, 需添加的条件不能是 ()

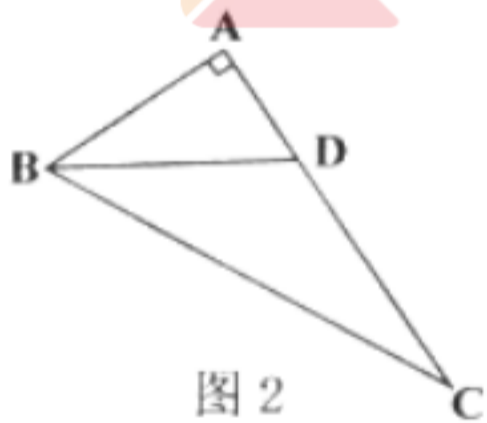


- A. $\angle B = \angle C$ B. $AD = AE$
 C. $\angle ADC = \angle AEB$ D. $DC = BE$

【答案】 D

3. (2010 广西南宁) 如图 2 所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$, 交 AC 于点 D , 且 $AB = 4$, $BD = 5$, 则点 D 到 BC 的距离是:

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6



【答案】 A

4. (2010 广西柳州) 如图 3, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC$ 的平分线 BD 交 AC 于 D , 若 $CD = 3\text{cm}$, 则点 D 到 AB 的距离 DE 是

- A. 5cm B. 4cm C. 3cm D. 2cm

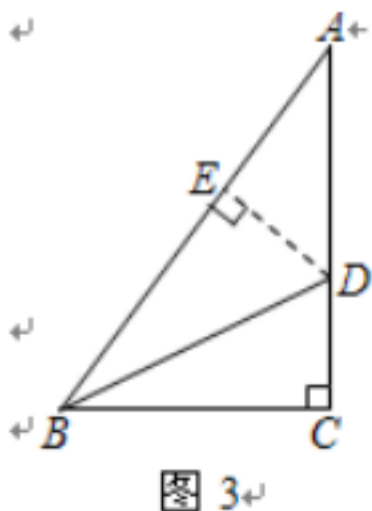
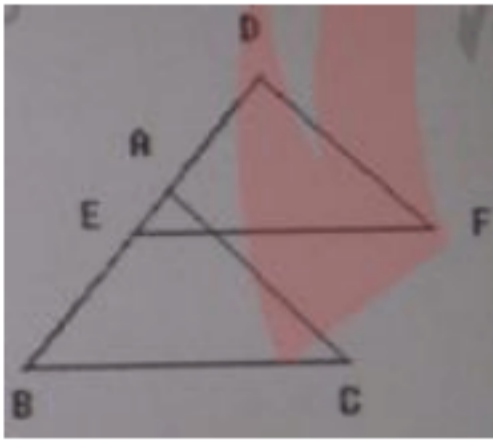


图 3

【答案】 C

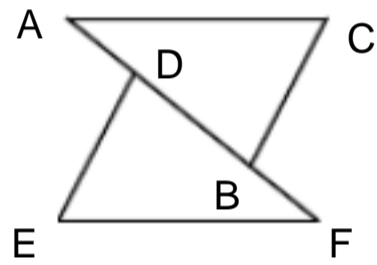
5. (2010 贵州铜仁) 如图, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $BE=4$, $AE=1$, 则 DE 的长是 ()
 A. 5 B. 4 C. 3 D. 2



【答案】 A

二、填空题

1. (2010 天津) 如图, 已知 $AC = FE$, $BC = DE$, 点 A, D, B, F 在一条直线上, 要使 $\triangle ABC \cong \triangle FDE$, 还需添加一个条件, 这个条件可以是 _____.



第(13)题

- 【答案】 $\angle C = \angle E$ (答案不惟一, 也可以是 $AB = FD$ 或 $AD = FB$) 2. (2010 广西钦州市) 如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAD$ 中, $BC = AD$, 请你再补充一个条件, 使 $\triangle ABC \cong \triangle BAD$. 你补充的条件是 _____ (只填一个).

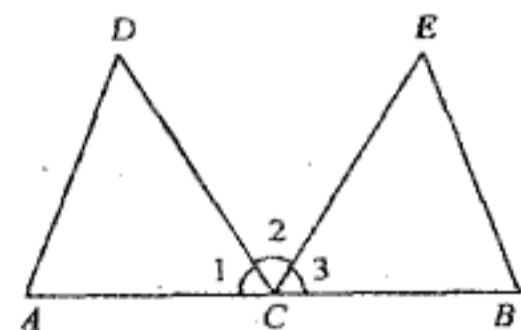


第8题

【答案】 $AC = BD$ 或 $\angle CBA = \angle DAB$

三、解答题

1. (2010 江苏苏州) (本题满分 6 分) 如图, C 是线段 AB 的中点, CD 平分 $\angle ACE$, CE 平分 $\angle BCD$, $CD = CE$.
 (1) 求证: $\triangle ACD \cong \triangle BCE$;
 (2) 若 $\angle D = 50^\circ$, 求 $\angle B$ 的度数.



(第23题)

【答案】

证明：(1) \because 点 C 是线段 AB 的中点，
 $\therefore AC = BC$.
 又 $\because CD$ 平分 $\angle ACE$ ， CE 平分 $\angle BCD$ ，
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 2 = \angle 3$ ，
 $\therefore \angle 1 = \angle 3$.
 在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases} CD = CE, \\ \angle 1 = \angle 3, \\ AC = BC. \end{cases}$$
 $\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$.
 (2) 解： $\because \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ ，
 $\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 60^\circ$.
 $\because \triangle ACD \cong \triangle BCE$ ，
 $\therefore \angle E = \angle D = 50^\circ$.

2. (2010 江苏南通) (本小题满分 8 分)

如图，已知：点 B 、 F 、 C 、 E 在一条直线上， $FB = CE$ ， $AC = DF$.

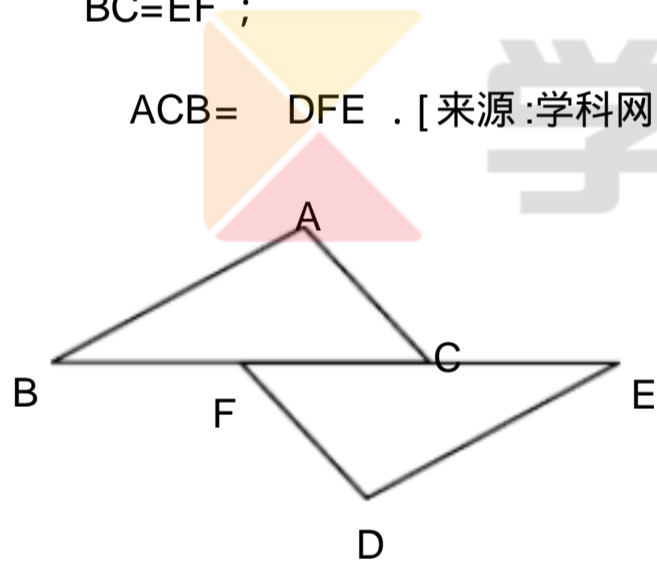
能否由上面的已知条件证明 $AB \parallel ED$ ？如果能，请给出证明；如果不能，请从下列三个条件中选择一个合适的条件，添加到已知条件中，使 $AB \parallel ED$ 成立，并给出证明.

供选择的三个条件（请从其中选择一个）：

$AB = ED$ ；

$BC = EF$ ；

$\angle ACB = \angle DFE$. [来源：学科网 ZXXK]



(第 25 题)

【答案】解：由上面两条件不能证明 $AB \parallel ED$. 有两种添加方法.

第一种： $FB = CE$ ， $AC = DF$ 添加 $AB = ED$

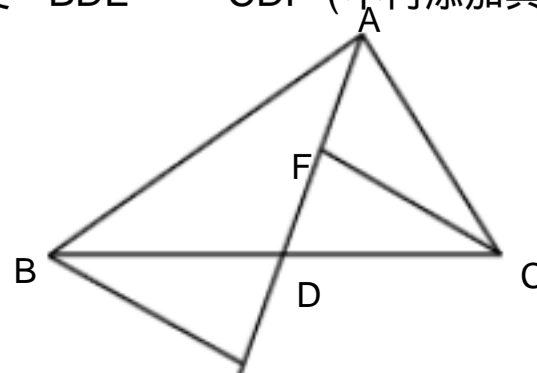
证明：因为 $FB = CE$ ，所以 $BC = EF$ ，又 $AC = DF$ ， $AB = ED$ ，所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

所以 $\angle ABC = \angle DEF$ 所以 $AB \parallel ED$

第二种： $FB = CE$ ， $AC = DF$ 添加 $\angle ACB = \angle DFE$

证明：因为 $FB = CE$ ，所以 $BC = EF$ ，又 $\angle ACB = \angle DFE$ ， $AC = DF$ ，所以 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
 所以 $\angle ABC = \angle DEF$ 所以 $AB \parallel ED$

3. (2010 浙江金华) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 BC 边上的点（不与 B ， C 重合）， F ， E 分别是 AD 及其延长线上的点， $CF \parallel BE$. 请你添加一个条件，使 $\triangle BDE \cong \triangle CDF$ （不再添加其它线段，



不再标注或使用其他字母) , 并给出证明 .

(1) 你添加的条件是 : _____ ;

(2) 证明 :

【答案】 解 : (1) $BD = DC$ (或点 D 是线段 BC 的中点) , $FD = ED$, $CF = BE$ 中
任选一个即可 .

(2) 以 $BD = DC$ 为例进行证明 :

$CF = BE$,

$\angle FCD = \angle EBD$.

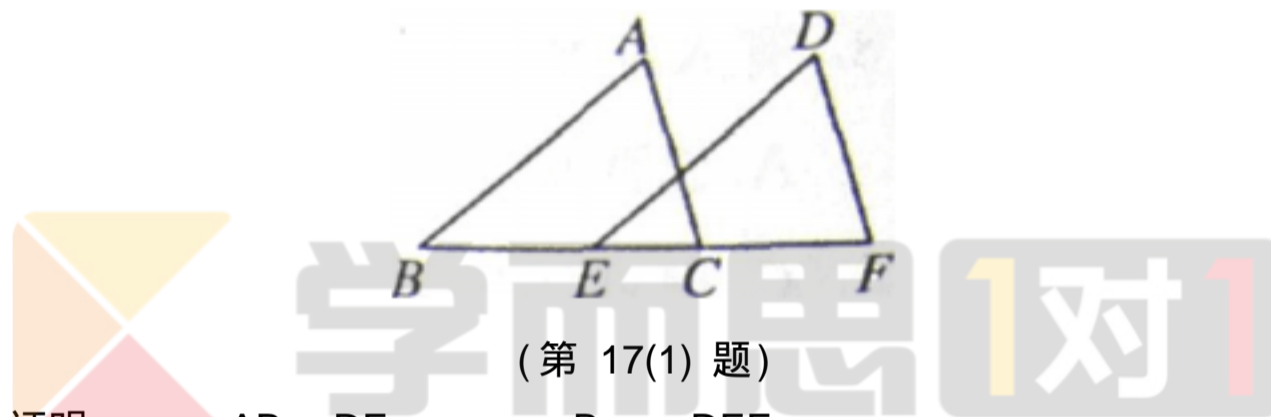
又 $BD = DC$, $\angle FDC = \angle EDB$,

$\triangle BDE \cong \triangle CDF$.

4 . (2010 福建福州) (每小题 7 分 , 共 14 分)

(1) 如图 , 点 B 、 E 、 C 、 F 在一条直线上 , $BC = EF$, $AB \parallel DE$, $\angle A = \angle D$.

求证 : $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



【答案】证明 : $\because AB \parallel DE$. $\therefore \angle B = \angle DEF$.

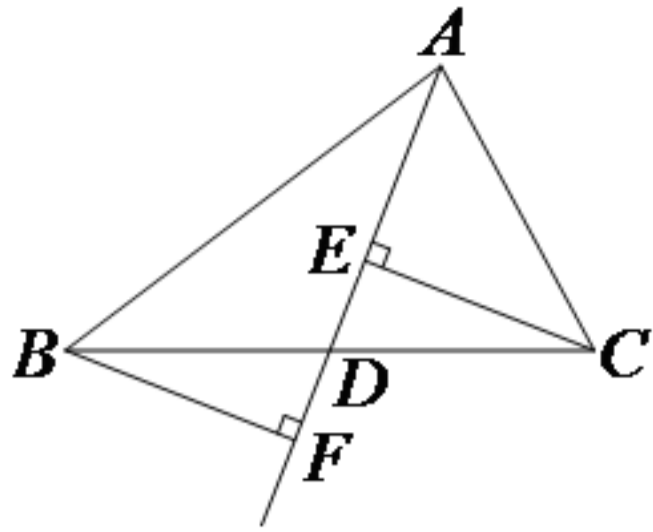
在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中 ,

$\begin{cases} \angle B = \angle DEF , \\ \angle A = \angle D , \\ BC = EF . \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$.

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

5 . (2010 四川宜宾 , 13(3) , 5 分) 如图 , 分别过点 C 、 B 作 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线 AD
及其延长线的垂线 , 垂足分
别为 E 、 F . 求证 : $BF = CE$.

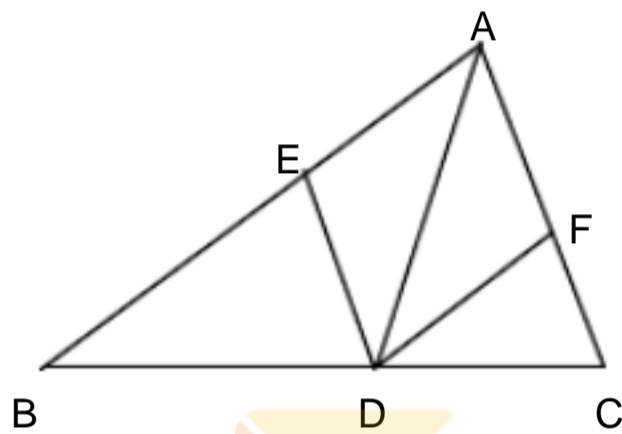


【答案】 $CE \perp AF, BF \perp AF, \angle DEC = \angle DFB = 90^\circ$

又 AD 为 BC 边上的中线, $BD = CD$, 且 $\angle EDC = \angle FDB$ (对顶角相等)

所以 $\triangle BFD \cong \triangle CDE$ (AAS), $BF = CE$.

6. (2010福建宁德) 如图, 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 在不添加任何辅助线的前提下, 要使 $\triangle AED \cong \triangle AFD$, 需添加一个条件是: _____, 并给予证明.



全品中考网

学而思 1对1

【答案】解法一: 添加条件: $AE = AF$,

证明: 在 $\triangle AED$ 与 $\triangle AFD$ 中,

$$AE = AF, \angle EAD = \angle FAD, AD = AD,$$

$$\triangle AED \cong \triangle AFD \text{ (SAS)}.$$

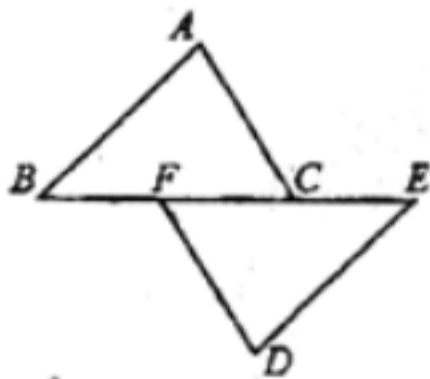
解法二: 添加条件: $\angle EDA = \angle FDA$,

证明: 在 $\triangle AED$ 与 $\triangle AFD$ 中,

$$\angle EAD = \angle FAD, AD = AD, \angle EDA = \angle FDA$$

$$\triangle AED \cong \triangle AFD \text{ (ASA)}.$$

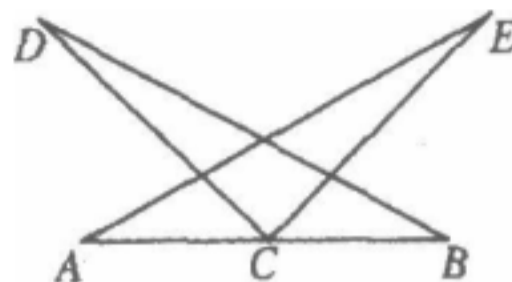
7. (2010湖北武汉) 如图, B, F, C, E 在同一条直线上, 点 A, D 在直线 BE 的两侧, $AB \parallel DE, AC \parallel DF, BF = CE$. 求证: $AC = DF$



【答案】证明: $AB \parallel DE, \angle ABC = \angle DEF$

$$\begin{aligned} AC &= DF, & \angle ABC &= \angle DEF \\ BF &= CE, & BC &= EF \\ \triangle ABC &\cong \triangle DEF \\ AC &= DF \end{aligned}$$

8. (2010 江苏淮安) 已知：如图，点 C 是线段 AB 的中点，CE=CD， $\angle ACD = \angle BCE$ ，
求证：AE=BD.



题 20 图

【答案】证明：

点 C 是线段 AB 的中点，

$$AC = BC,$$

$$\angle ACD = \angle BCE,$$

$$\angle ACD + \angle DCE = \angle BCE + \angle DCE,$$

即 $\angle ACE = \angle BCD$,

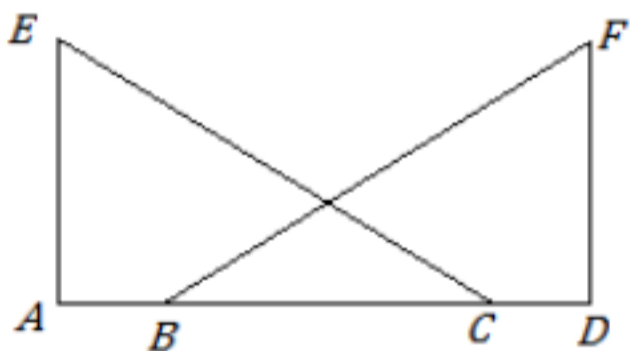
在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中，

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACE = \angle BCD, \\ CE = CD \end{cases}$$

$\triangle ACE \cong \triangle BCD$ (SAS),
 $AE = BD$.

9. (2010 北京) 已知：如图，点 A、B、C、D 在同一条直线上， $EA \perp AD$ ， $FD \perp AD$ ， $AE = DF$ ，
 $AB = DC$.

求证： $\triangle ACE \cong \triangle DBF$.



【答案】证明： $AB = DC$

$$AC = DB$$

$$EA \perp AD, FD \perp AD$$

$$\angle A = \angle D = 90^\circ$$

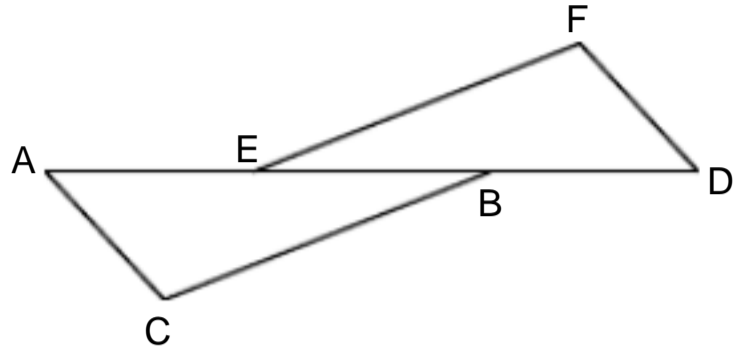
在 $\triangle EAC$ 与 $\triangle FDB$ 中

$$\begin{cases} EA = FD \\ \angle A = \angle D \\ AC = DB \end{cases}$$

$\angle EAC = \angle FDB$

$\angle ACE = \angle DBF$.

10. (2010 云南楚雄) 如图, 点 A、E、B、D 在同一条直线上, $AE = DB$, $AC = DF$, $\angle AC = \angle DF$. 请探索 BC 与 EF 有怎样的位置关系? 并说明理由.

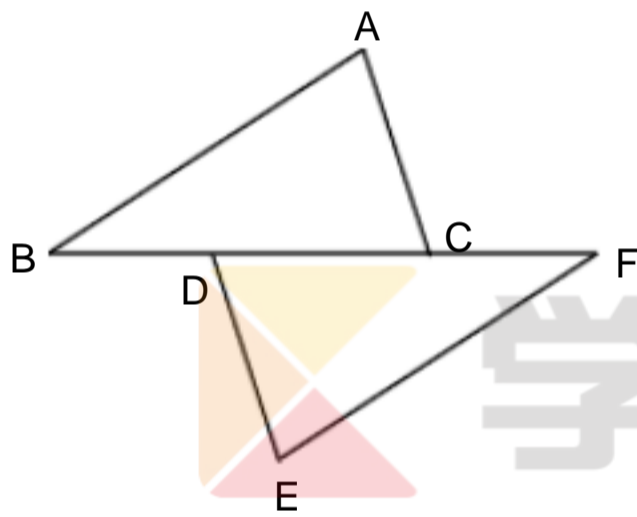


【答案】解: $BC \parallel EF$. 理由如下: $AE = DB$, $AE + BE = DB + BE$, $AD = DE$. $\angle AC = \angle DF$, $\angle A = \angle D$, $AC = DF$, $\angle ACB = \angle DFE$, $\angle FED = \angle CBA$, $BC \parallel EF$.

11. (2010 云南昆明) 如图, 点 B、D、C、F 在一条直线上, 且 $BC = FD$, $AB = EF$.

(1) 请你只添加一个条件 (不再加辅助线), 使 $\triangle ABC \cong \triangle EFD$, 你添加的条件是 _____;

(2) 添加了条件后, 证明 $\triangle ABC \cong \triangle EFD$.



【答案】(1) $\angle B = \angle F$ 或 $AB \parallel EF$ 或 $AC = ED$.

(2) 证明: 当 $\angle B = \angle F$ 时

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EFD$ 中

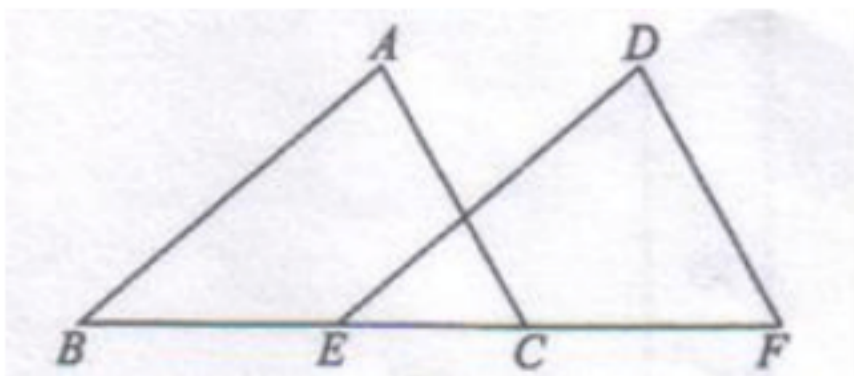
$$\begin{cases} AB = EF \\ \angle B = \angle F \\ BC = FD \end{cases}$$

$\triangle ABC \cong \triangle EFD$ (SAS)

12. (2010 四川 泸州) 如图 4, 已知 $AC \parallel DF$, 且 $BE = CF$.

(1) 请你只添加一个条件, 使 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, 你添加的条件是 _____;

(2) 添加条件后, 证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



【答案】(1) 添加的条件是 $AC = DF$ (或 $AB \parallel DE$ 、 $\angle B = \angle DEF$ 、 $\angle A = \angle D$) (有一

个即可)

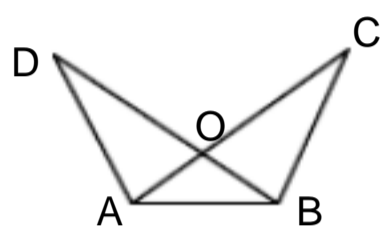
(2) 证明: $AC \parallel DF$, $\angle ACB = \angle F$, $BE=CF$, $BC = EF$, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} BC = EF \\ \angle ACB = \angle F \\ AC = DF \end{cases}, \triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

13. (2010 甘肃) (8分) 如图, $\angle BAC = \angle ABD$.

(1) 要使 $OC = OD$, 可以添加的条件为: _____ 或 _____; (写出 2 个符合题意的条件即可)

(2) 请选择 (1) 中所添加的一个条件, 证明 $OC = OD$.



【答案】 解: (1) 答案不唯一. 如

$\angle C = \angle D$, 或 $\angle ABC = \angle BAD$, 或 $\angle OAD = \angle OBC$, 或 $AC = BD$. .. 4分

说明: 2空全填对者, 给 4分; 只填 1空且对者, 给 2分.

(2) 答案不唯一. 如选 $AC = BD$ 证明 $OC=OD$.

证明: $\angle BAC = \angle ABD$,

$OA=OB$.

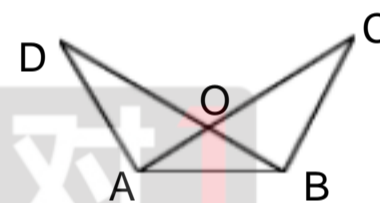
6分

又 $AC = BD$,

$AC-OA=BD-OB$, 或 $AO+OC=BO+OD$.

$OC = OD$.

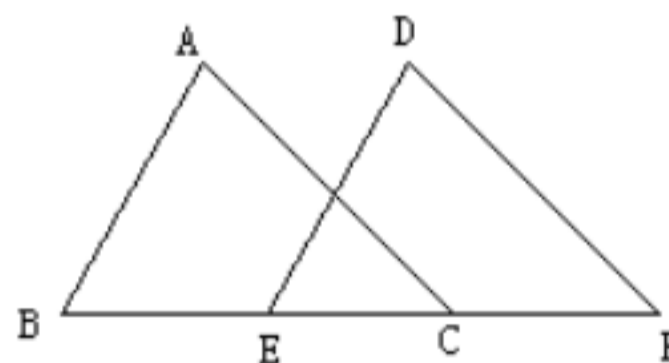
8分



14. (2010 重庆江津) 已知: 点 B、E、C、F 在同一直线上, $AB = DE$, $\angle A = \angle D$, $AC \parallel DF$.

求证: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$;

$BE = CF$.



(第23题)

【答案】 证明: (1) $AC \parallel DF$

$\angle ACB = \angle F$

2分

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 中

$$\begin{cases} \angle ACB = \angle F \\ \angle A = \angle D \\ AB = DE \end{cases}$$

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

6分

(2) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

$BC=EF$

$BC-EC=EF-EC$

即 $BE=CF$

10分

15. (2010 福建泉州南安) 如图, 已知点 E, C 在线段 BF 上, $BE = CF$, 请在下列四个等式中,

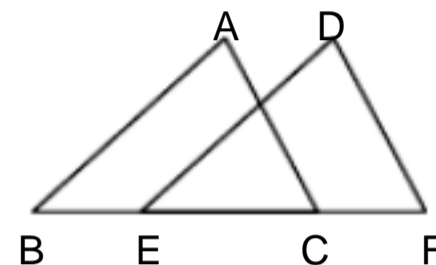
$AB = DE, \angle ACB = \angle F, \angle A = \angle D, AC = DF$. 选出两个, 作为条件, 推出

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$. 并予以证明. (写出一种即可)

已知: _____, _____.

求证: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

证明:

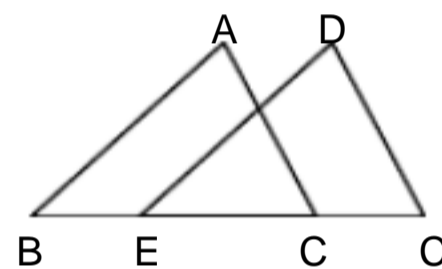


【答案】 解: 已知: (或 $\angle A = \angle D$ 、或 $AC = DF$) 3分

证明: 若选

$BE = CF$

$BE + EC = CF + EC$, 即 $BC = EF$ 5分

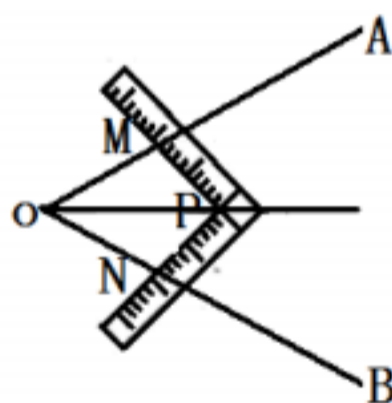


在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中

$AB = DE, BC = EF, AC = DF$ 8分

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 9分

16. (2010 青海西宁) 八(1)班同学上数学活动课, 利用角尺平分一个角(如图) . 设计了如下方案:



() $\angle AOB$ 是一个任意角, 将角尺的直角顶点 P 介于射线 OA, OB 之间, 移动角尺使角尺两边相同的刻度与 M, N 重合, 即 $PM=PN$ 过角尺顶点 P 的射线 OP 就是 $\angle AOB$ 的平分线.

() $\angle AOB$ 是一个任意角, 在边 OA, OB 上分别取 $OM=ON$ 将角尺的直角顶点 P 介于射线 OA, OB 之间, 移动角尺使角尺两边相同的刻度与 M, N 重合, 即 $PM=PN$ 过角尺顶点 P 的射线 OP 就是 $\angle AOB$ 的平分线.

(1) 方案()、方案() 是否可行? 若可行, 请证明; 若不可行, 请说明理由 .

(2) 在方案() $PM=PN$ 的情况下, 继续移动角尺, 同时使 $PM \perp OA, PN \perp OB$ 此方案是否可行? 请说明理由 .

【答案】 解: (1) 方案() 不可行. 缺少证明三角形全等的条件

2分 [来源: 学 & 科 & 网 Z&X&X&K]

(2) 方案 () 可行 . , , , , , , , , , ,

3 分

证明：在 $\triangle OPM$ 和 $\triangle OPN$ 中

$$\begin{cases} OM = ON \\ PM = PN \\ OP = OP \end{cases}$$

$\triangle OPM \cong \triangle OPN$ (SSS)

$\angle AOP = \angle BOP$ (全等三角形对应角相等) . , , , , , , , , , ,

5 分

(3) 当 $\angle AOB$ 是直角时，此方案可行 . , , , , , , , , , ,

6 分

四边形内角和为 360° ，又若 $PM \perp OA, PN \perp OB$ ， $\angle OMP = \angle ONP = 90^\circ$ ， $\angle MPN = 90^\circ$ ， $\angle AOB = 90^\circ$

若 $PM \perp OA, PN \perp OB$ ，

且 $PM = PN$

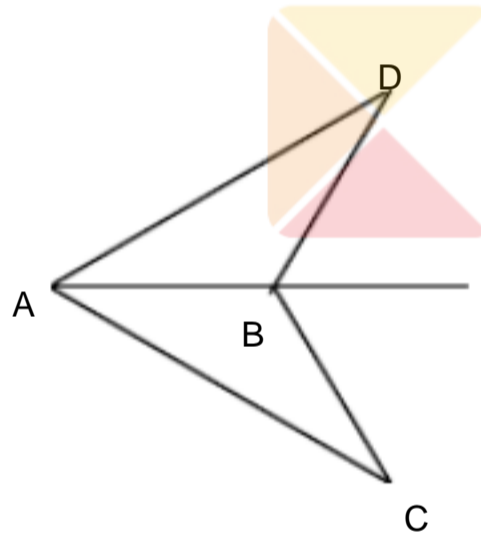
OP 为 $\angle AOB$ 的平分线 . (到角两边距离相等的点在这个角的角平分线上)

当 $\angle AOB$ 不为直角时，此方案不可行 . , , , , , , , , , ,

8 分

17. (2010 广西梧州) 如图， AB 是 $\angle DAC$ 的平分线，且 $AD = AC$ 。

求证： $BD = BC$



学而思 1对1

全品中考网

【答案】证明： AB 是 $\angle DAC$ 的平分线

$$\angle DAB = \angle CAB$$

在 $\triangle DAB$ 和 $\triangle CAB$ 中

$$\begin{cases} AD = AC \\ \angle DAB = \angle CAB \\ AB = AB \end{cases}$$

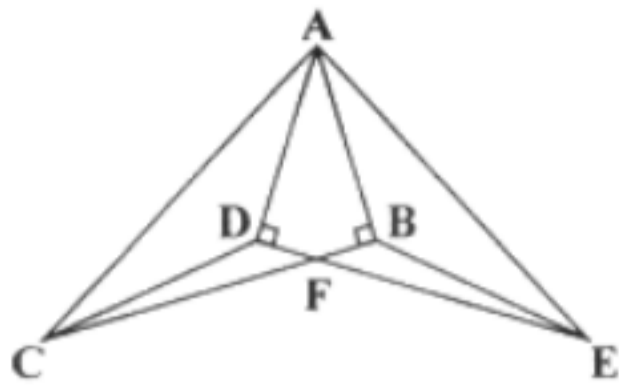
$$\triangle DAB \cong \triangle CAB$$

$$BD = BC$$

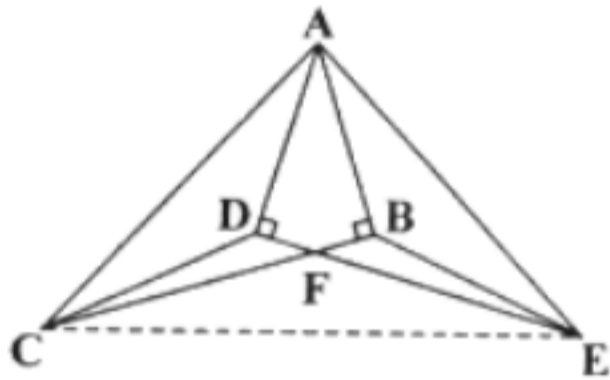
18. (2010 广西南宁) 如图 10，已知 $Rt\triangle ABC \cong Rt\triangle ADE$ ， $\angle ABC = \angle ADE = 90^\circ$ ，

BC 与 DE 相交于点 F ，连接 CD, EB 。

(1) 图中还有几对全等三角形，请你一一列举； (2) 求证： $CF = EF$ 。



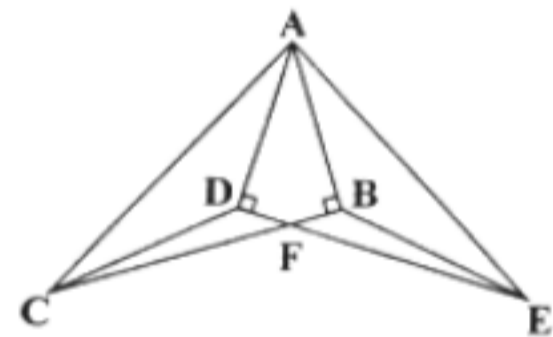
【答案】(1) $\triangle ADC \cong \triangle ABE$, $\triangle CDF \cong \triangle EBF$ 2分
 (2) 证法一：连接 CE 3分

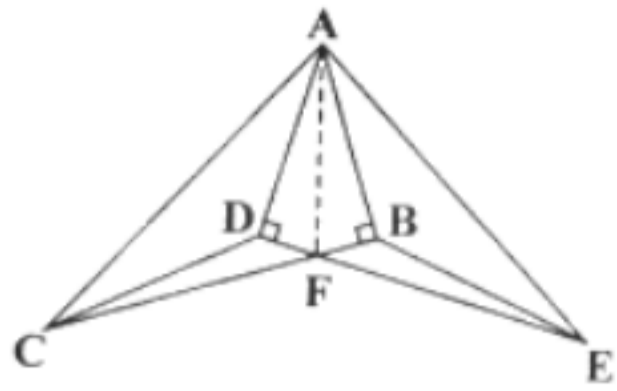


Rt $\triangle ABC \cong$ Rt $\triangle ADE$
 $AC = AE$ 4分
 $\angle ACE = \angle AEC$ 5分
 又 Rt $\triangle ABC \cong$ Rt $\triangle ADE$
 $\angle ACB = \angle AED$ 6分
 $\angle ACE - \angle ACB = \angle AEC - \angle AED$
 即 $\angle BCE = \angle DEC$ 7分
 $CF = EF$ 8分

证法二： Rt $\triangle ABC \cong$ Rt $\triangle ADE$

$AC = AE$, $AD = AB$, $\angle CAB = \angle EAD$,
 $\angle CAB - \angle DAB = \angle EAD - \angle DAB$
 即 $\angle CAD = \angle EAB$ 3分
 $\triangle ACD \cong \triangle AEB$ (SAS) 4分
 $CD = EB$, $\angle ADC = \angle ABE$ 5分
 又 $\angle ADE = \angle ABC$
 $\angle CDF = \angle EBF$ 6分
 又 $\angle DFC = \angle BFE$
 $\angle CDF \cong \angle EBF$ (AAS) 7分
 $CF = EF$ 8分
 证法三：连接 AF 3分





$$\text{Rt } \triangle ABC \cong \text{Rt } \triangle ADE$$

$$AB = AD, BC = DE, \angle ABC = \angle ADE = 90^\circ$$

$$\text{又 } AF = AF$$

$$\text{Rt } \triangle ABF \cong \text{Rt } \triangle ADF \text{ (HL) } \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

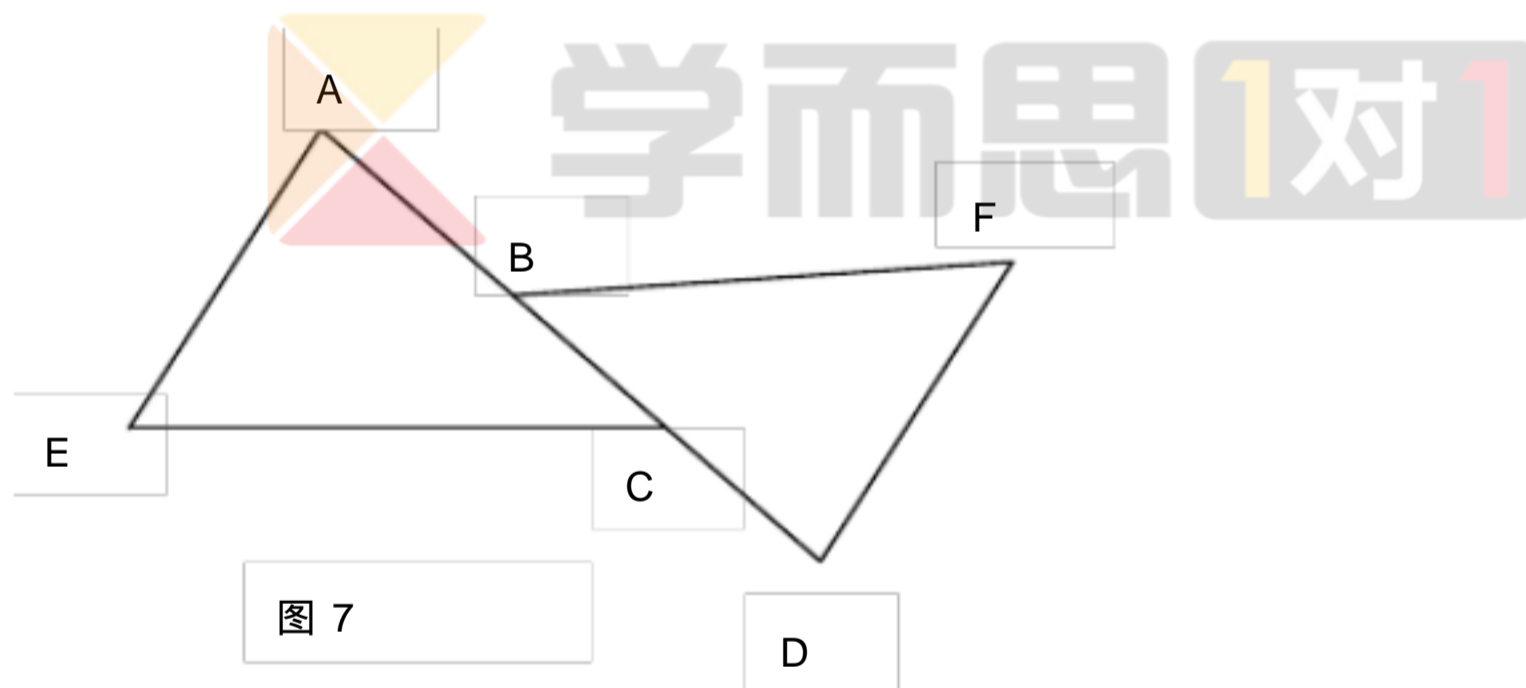
$$BF = DF \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{又 } BC = DE$$

$$BC - BF = DE - DF \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{即 } CF = EF \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

19. (2010 辽宁大连) 如图 7, 点 A、B、C、D 在同一条直线上, $AB=DC$, $AE \parallel DF$, $AE=DF$, 求证: $EC=FB$



【答案】

证明: $\because AB=DC$
 $\therefore AB+BC=DC+BC$
 即 $AC=DB$
 $\because AE \parallel DF$
 $\therefore \angle A = \angle D$
 在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle DFB$ 中

$$\begin{cases} AE = DF \\ \angle A = \angle D \\ AC = DB \end{cases}$$

 $\therefore \triangle AEC \cong \triangle DFB$
 $\therefore EC = FB$

20. (2010 广西柳州) 如图 9, 在 8×8 的正方形网格中, ABC 的顶点和线段 EF 的端点都在边长为 1 的小正方形的顶点上.

(1) 填空： $\angle ABC = \underline{\hspace{2cm}}$, $BC = \underline{\hspace{2cm}}$; [来源:Z. xx. k.Com]

(2) 请在图中找出一一点 D , 再连接 DE 、 DF , 使以 D 、 E 、 F 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 全等, 并加以证明.

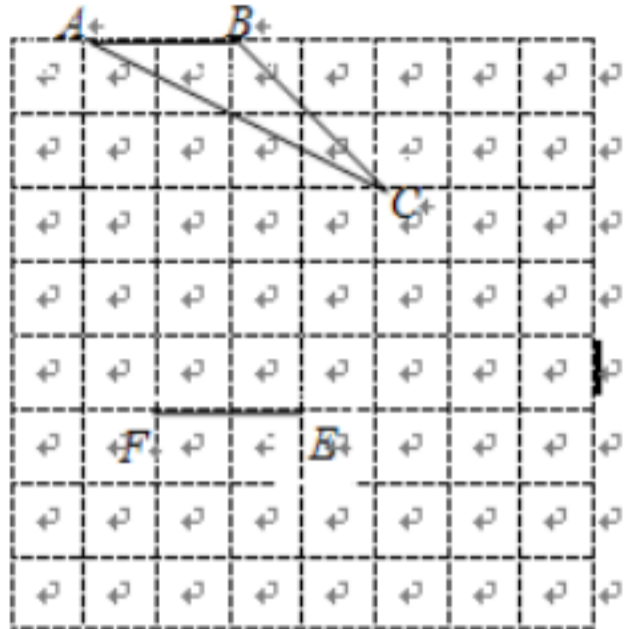
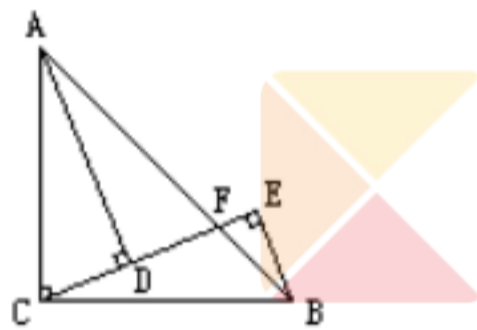


图 9

【答案】

21. (2010 吉林) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, $CE \perp BE$, CE 与 AB 相交于点 F , $AD \perp CF$ 于点 D , 且 AD 平分 $\angle FAC$, 请写出图中两对全等三角形, 并选择其中一对加以证明.



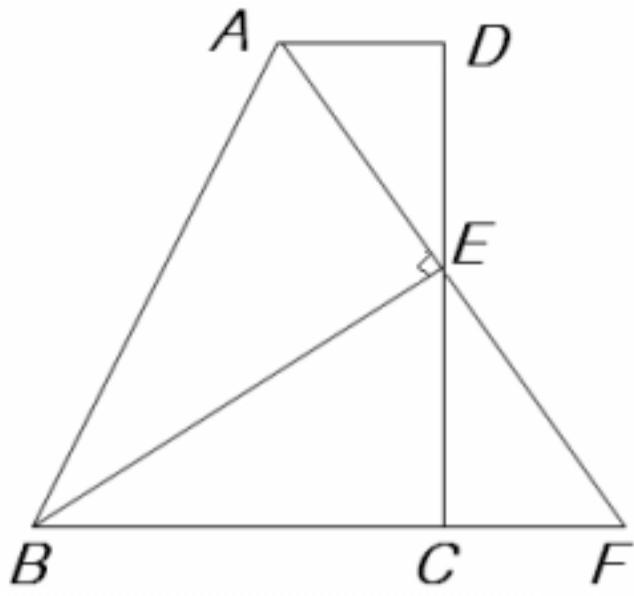
(第21题)

【答案】

解: $\triangle ADC \cong \triangle ADF$ 、 $\triangle ADC \cong \triangle CEB$ 、 $\triangle ADF \cong \triangle CEB$ (写出其中两对即可)
 证法 1: 若选择 $\triangle ADC \cong \triangle ADF$, 证明如下:
 $\because AD$ 平分 $\angle FAC$, $\therefore \angle CAD = \angle FAD$.
 $\because AD \perp CF$, $\therefore \angle ADC = \angle ADF = 90^\circ$.
 又 $\because AD = AD$, $\therefore \triangle ADC \cong \triangle ADF$.
 证法 2: 若选择 $\triangle ADC \cong \triangle CEB$, 证明如下:
 $\because AD \perp CE$, $BE \perp CE$, $\therefore \angle ADC = \angle CEB = 90^\circ$.
 $\because \angle ACB = 90^\circ$, $\therefore \angle ACD + \angle ECB = 90^\circ$.
 又 $\because \angle ACD + \angle DAC = 90^\circ$, $\therefore \angle DAC = \angle ECB$.
 又 $\because AC = CB$, $\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEB$.

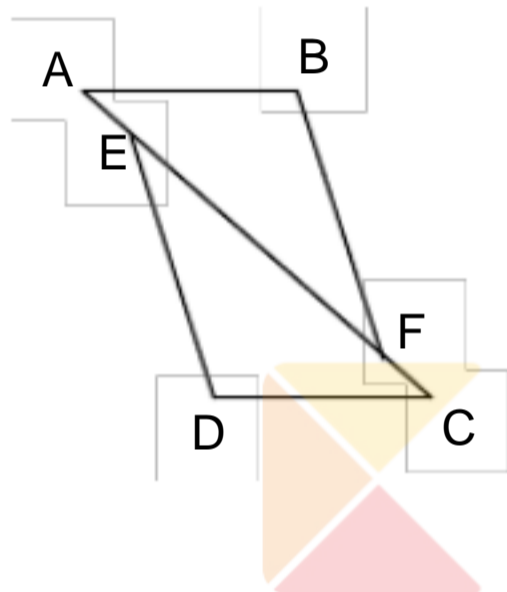
22. (2010 湖南娄底) 如图 10, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, E 为 CD 的中点, 连接 AE 、 BE , $BE \perp AE$, 延长 AE 交 BC 的延长线于点 F .

- 求证: (1) $FC = AD$;
 (2) $AB = BC + AD$



【答案】解：(1) 因为 E 是 CD 的中点，所以 $DE=CE$ 。因为 $AB\parallel CD$ ，所以 $\angle ADE=\angle FCE$ ， $\angle DAE=\angle CFE$ 。所以 $\triangle ADE\cong\triangle FCE$ 。所以 $FC=AD$ 。(2) 因为 $\triangle ADE\cong\triangle FCE$ ，所以 $AE=FE$ 。又因为 $BE\perp AE$ ，所以 BE 是线段 AF 的垂直平分线，所以 $AB=FB$ 。因为 $FB=BC+FC=BC+AD$ ，所以 $AB=BC+AD$ 。

23. (2010 内蒙呼和浩特) 如图，点 A、E、F、C 在同一条直线上， $AD\parallel BC$ ， $AD=CB$ ， $AE=CF$ ，求证： $BE=DF$ 。



学而思 1对1

【答案】 18. 证明： $AD\parallel BC$

$\angle A = \angle C$ 1 分

$AE = FC$

$AF = CE$ 2 分

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle CBE$ 中

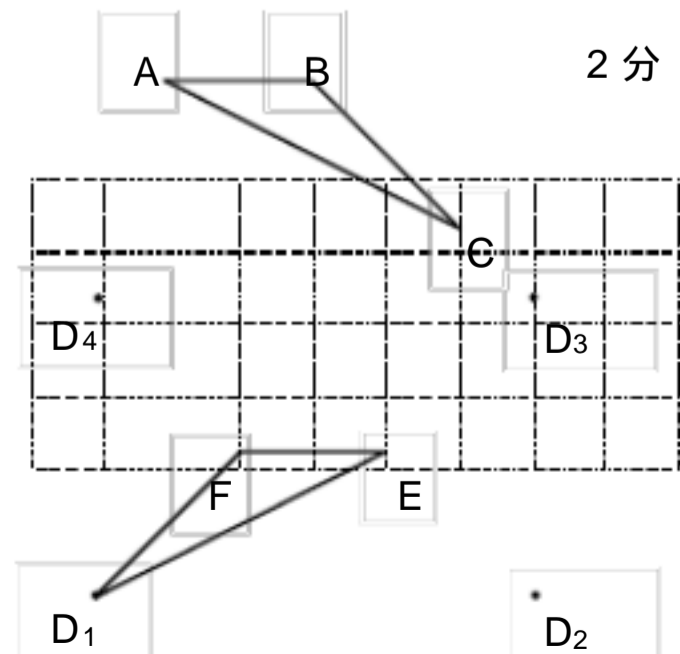
$$\begin{cases} AD = CB \\ \angle A = \angle C \\ AF = CE \end{cases}$$

$\triangle ADF \cong \triangle CBE$ 5 分

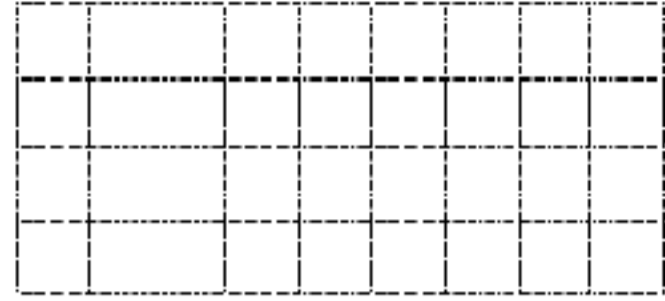
分

$BE = DF$ 6 分

(1) $\angle ABC = 135^\circ$ ， $BC = 2\sqrt{2}$ ，..... 2 分



(2) (说明: D 的位置有四处, 分别是图中的 D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4 . 此处画出 D 在 D_1 处的位置及证明, D 在其余位置的画法及证明参照此法给分)



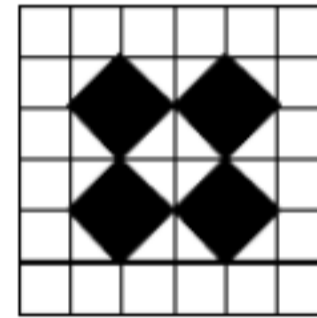
解: EFD 的位置如图所示. ,,,,,, 3 分

证明: $FD=BC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,,,, 4 分

$\angle EFD = \angle ABC = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$, 5 分

$EF=AB=2$

$\triangle EFD \cong \triangle ABC$,,,,,, 6 分



学而思 1对1