全等三角形

一. 选择题

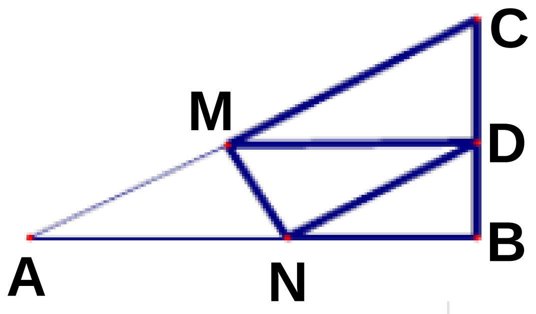
1.（2015 · 湖南岳阳 · 调研）下列命题中，真命题是（　　）

A. 周长相等的锐角三角形都全等；　B. 周长相等的直角三角形都全等；

C. 周长相等的钝角三角形都全等；　D. 周长相等的等腰直角三角形都全等；

答案：D

2.（2015 · 江苏江阴夏港中学 · 期中）如图，Rt△ABC中，AB=9，BC=6，∠B=90^0，将△ABC折叠，使 A点与 BC的中点 D重合，折痕为 MN，则线段 BN的长为（　　）



第 1 题图

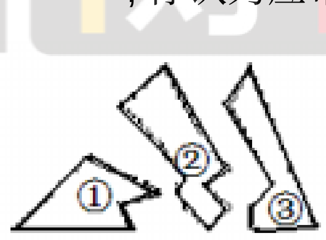
A．$\frac{5}{3}$　B．$\frac{5}{2}$　C．4　D．5

答案：C

3.（2015 · 福建漳州 · 一模）小明不小心把一块三角形形状的玻璃打碎成了三块，如图①②③，他想要到玻璃店去配一块大小形状完全一样的玻璃，你认为应带（　　）去．

A. ①　B．②

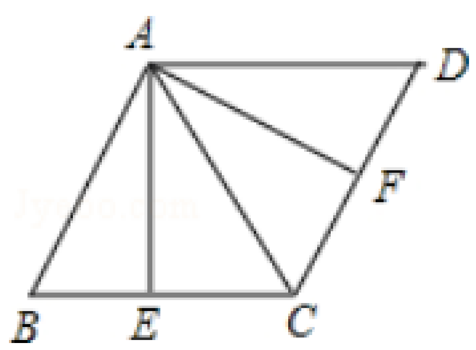
C. ③　D．①和②



答案：C

4.（2015 · 辽宁东港市黑沟学校一模，3 分）如图，在菱形 ABCD中，∠BAD=2∠B，E，F 分别为 BC，CD的中点，连接 AE，AC，AF，则图中与△ABE全等的三角形（△ABE除外）有（　　）

A. 1 个　B．2 个　C．3 个　D．4 个



答案：C

5.（2015 · 山东省东营区实验学校一模）已知△$A_1B_1C_1$，△$A_2B_2C_2$的周长相等，现有两个判断：① 若 $A_1B_1 = A_2B_2$，$A_1C_1 = A_2C_2$，则△$A_1B_1C_1$≌△$A_2B_2C_2$；② 若∠A_1 = ∠A_2，∠B_1 = ∠B_2，则

$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$. 对于上述的两个判断，下列说法正确的是　　(　　　)

A．①正确，②错误　　　　　　B．①错误，②正确

C. ①②都错误　　　　　D．①②都正确

答案： D

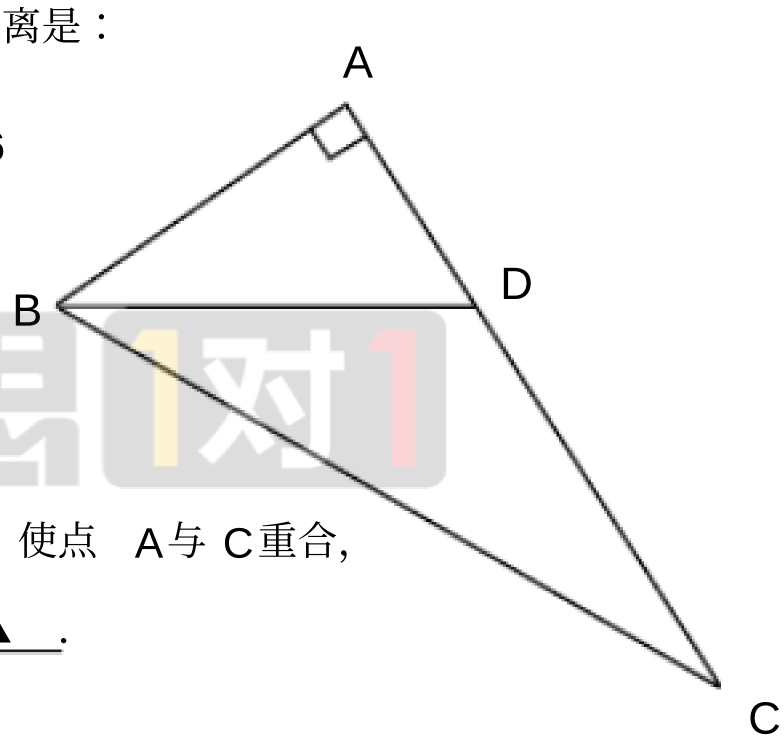
6. (2015 ?山东东营 ?一模) 已知$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$ 的周长相等，现有两个判断：①若 $A_1B_1 = A_2B_2$，$A_1C_1 = A_2C_2$，则$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$；②若$\angle A_1 = \angle A_2$，$\angle B_1 = \angle B_2$，则$\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$.对于上述的两个判断，下列说法正确的是　　(　　)

A．①正确，②错误　　　　　　B．①错误，②正确

C．①②都错误　　　　　　D．①②都正确

答案： D

7. (2015 ?山东青岛 ?一模) 如图 2 所示，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle A = 90°$，BD 平分$\angle ABC$，交 AC 于点 D，且 $AB = 4, BD = 5$，则点 D 到 BC 的距离是：

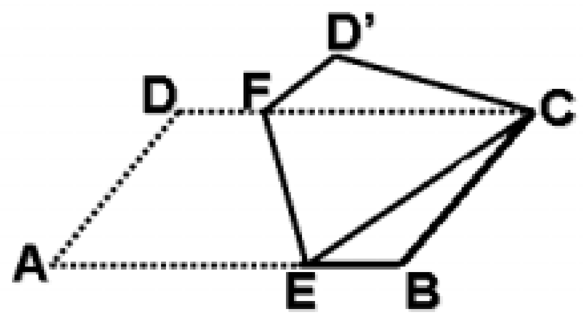


（A） 3　　　（B） 4　　　（C） 5　　　（D） 6

答案： A

二. 填空题

1. (2015 · 江苏南菁中学 · 期中) 如图，将 □ABCD 折叠，使点 A 与 C 重合，折痕为 EF. 若∠A=60°，AD=4，AB=6，则 AE的长为 ▲ .

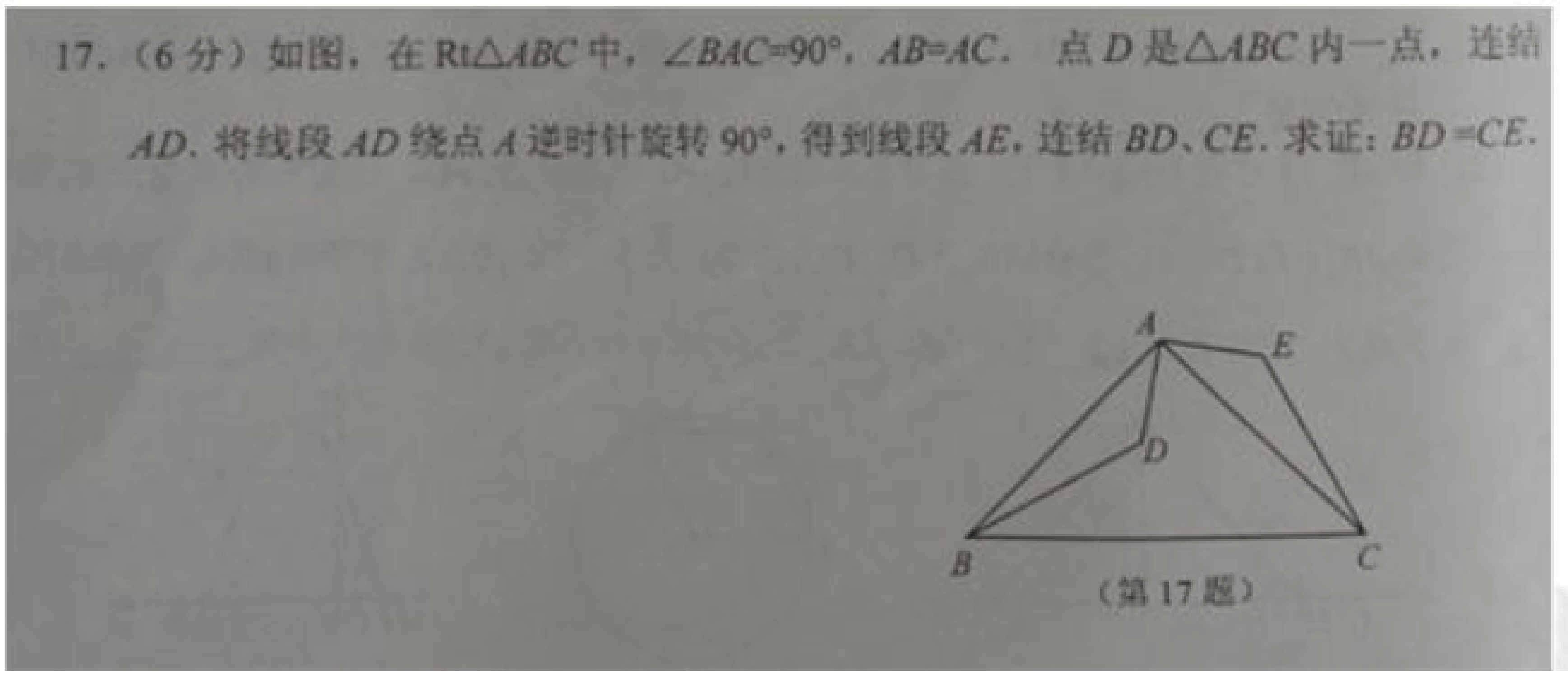


第 1 题图

答案： $\frac{19}{4}$

三. 解答题

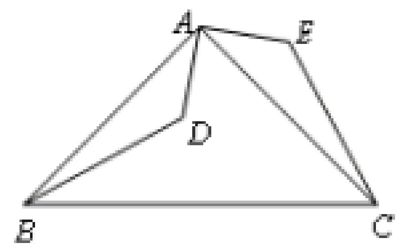
1. （2015 · 吉林长春 · 二模）



17.（6分）如图，在Rt△ABC中，∠BAC=90°，AB=AC．点D是△ABC内一点，连结AD．将线段AD绕点A逆时针旋转90°，得到线段AE，连结BD、CE．求证：BD=CE．

（第17题）

答案：由旋转可知，∠DAE=90°，AD=AE



∵∠BAC=90°，

∴∠BAC=∠DAE

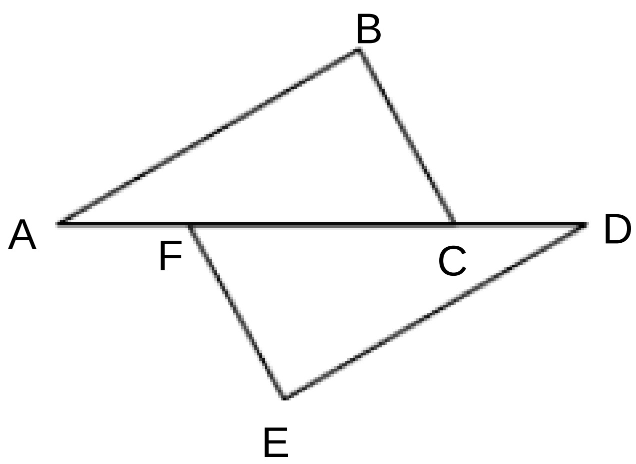
∴∠BAC-∠DAC=∠DAE-∠DAC，

即∠BAD=∠CAE　　　　（4分）

∵AB=AC，

∴△ABD≌△ACE ∴BD=CE　　　　（6分）

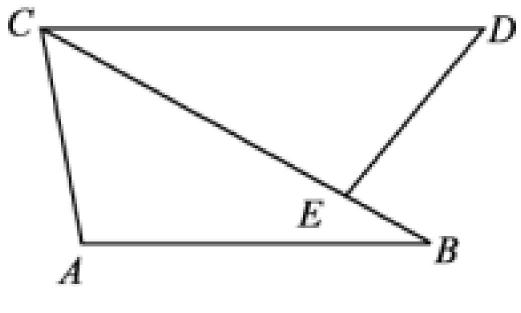
2. （2015·江苏江阴·3月月考）如图，点A、F、C、D在同一直线上，点B和点E分别在直线AD的两侧，且AB=DE，∠A=∠D，AF=DC．求证：BC∥EF．



答案：解：通过证△ABC≌△DEF，得∠ACB=∠DFE，说明BC∥EF．

3. (2015·北京市朝阳区·一模) 已知：如图，E是BC上一点，AB=EC，AB∥CD，BC=CD．

求证：AC=ED．



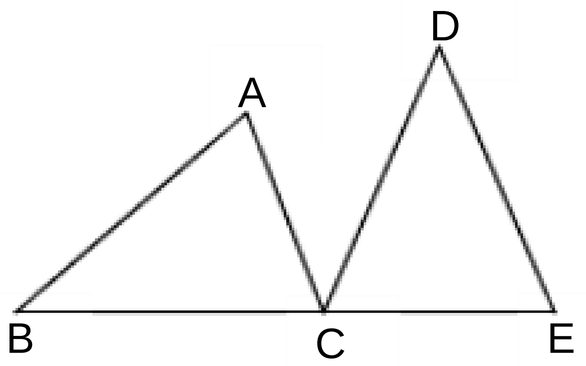
答案：证明：∵ AB∥CD,

∴∠B=∠DCE ··· 1 分

在△ABC和△ECD中,

4.（2015 · 广东潮州 · 期中） 已知：如图, B、C、E三点在同一条直线上, AC∥DE, AC=CE, ∠ACD=∠B.

求证：△ABC≌△CDE



（第 20 题图）

证明：∵ AC∥DE, ∴∠ACD=∠D, ∠BCA=∠E ····················· 2 分

又∵∠ACD=∠B, ∴∠B=∠D ························· 4 分

又∵ AC=CE, ∴△ABC≌△CDE ························· 7 分

5.（2015?山东滕州羊庄中学？ 4 月模拟） 已知：如图 1，D 是△ABC 的边 AB 上一点， CN∥AB, DN 交 AC 于点 M，MA=MC．

（1）求证： CD=AN；

（2）若∠AMD=2∠MCD，

试判断四边形 ADCN 的形状，并说明理由.

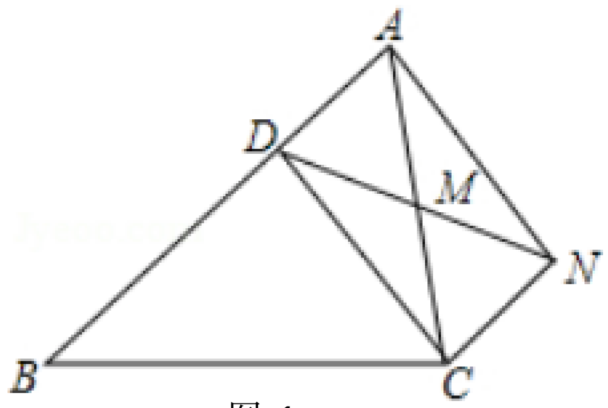


图 1

答案：（本题满分 10 分）

证明：① ∵CN∥AB，∴∠DAC=∠NCA，

∵在△AMD 和△CMN 中，$\begin{cases}\angle DAC=\angle NCA\\ MA=MC\\ \angle AMD=\angle CMN\end{cases}$，∴△AMD≌△CMN（ASA）······（2 分）

∴AD=CN， 又∵AD∥CN， ∴四边形 ADCN 是平行四边形， ·········（4 分）

∴CD=AN ·········（5 分）

② 四边形 ADCN 是矩形. ·········（1 分）

理由如下 ∵∠AMD=2∠MCD，∠AMD=∠MCD+∠MDC，

∴∠MCD＝∠MDC　　∴MD＝MC，　………　（2 分）

由①知四边形 ADCN 是平行四边形，∴ MD＝MN＝MA＝MC，　∴AC=DN，………（4 分）

∴四边形 ADCN 是矩形．………（5 分）

6.（2015?山东潍坊?第二学期期中）　已知：如图 2 在正方形 ABCD中，点 E、F 分别在 BC 和 CD上，AE＝AF.

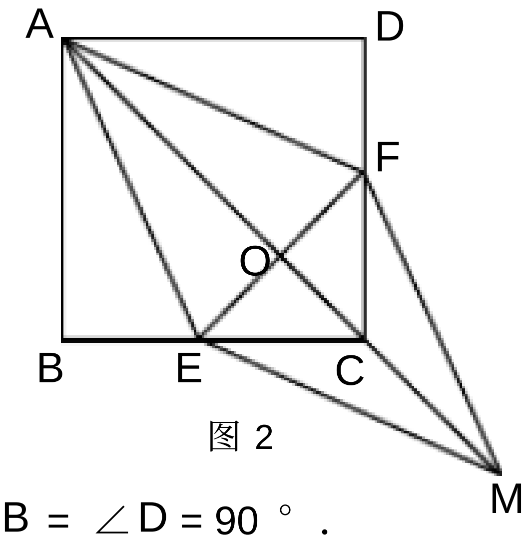


图 2

（1）求证：BE＝DF；

（2）连接 AC交 EF于点 O，延长 OC至点 M，使 OM＝OA，连接 EM，FM．判断四边形 AEMF是什么特殊四边形？并证明你的结论．

答案：（8 分）证明：（1）∵四边形 ABCD是正方形，∴ AB＝AD，∠B＝∠D＝90°．

∵AE＝AF，∴ Rt△ABE≌Rt△ADF．∴BE＝DF．（4 分）

（2）四边形 AEMF是菱形．∵四边形 ABCD是正方形，∴∠BCA＝∠DCA＝45°，BC＝DC．

∵BE＝DF，∴BC－BE＝DC－DF．即 CE＝CF．∴OE＝OF．∵OM＝OA，∴四边形 AEMF是平行四边形．∵AE＝AF，∴平行四边形 AEMF是菱形．（8 分）

7.（2015?山东潍坊广文中学、文华国际学校?一模）如图 3，现有边长为 4 的正方形纸片 ABCD，点 P 为 AD 边上的一点（不与点 A、点 D 重合），将正方形纸片折叠，使点 B 落在 P 处，点 C 落在 G 处，PG 交 DC 于 H，折痕为 EF，联结 BP、BH．

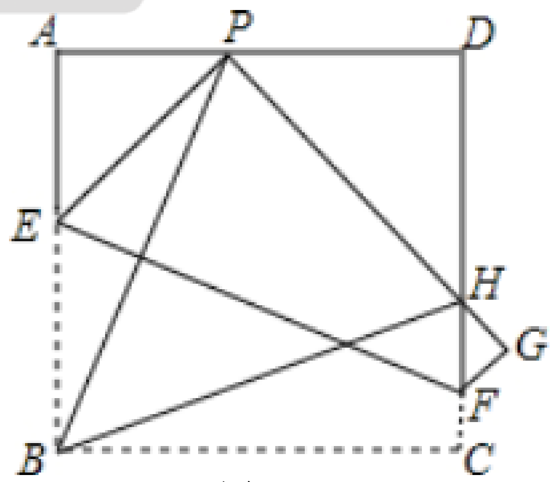


图 3

（1）求证：∠APB=∠BPH；

（2）求证：AP+HC=PH；

（3）当 AP=1 时，求 PH 的长．

答案：（1）证明：∵PE=BE，∴∠EPB=∠EBP，

又∵∠EPH=∠EBC=90°，∴∠EPH－∠EPB=∠EBC－∠EBP．

即∠BPH=∠PBC．又∵四边形 ABCD为正方形

∴AD∥BC，∴∠APB=∠PBC．

∴∠APB=∠BPH ----------------------4 分

（2）证明：如图 4，过 B 作 BQ⊥PH，垂足为 Q，

由（1）知，∠APB=∠BPH，

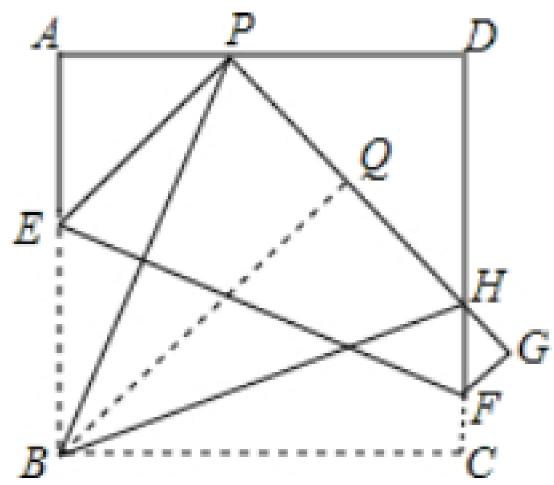


图 4

在△ABP与△QBP中，$\begin{cases}\angle A=\angle BQP=90^\circ \\ \angle APB=\angle BPH \\ BP=BP\end{cases}$，

∴△ABP≌△QBP（AAS），

∴AP=QP，BA=BQ．又∵AB=BC，∴BC=BQ．又∵∠C=∠BQH=90°，∴△BCH和△BQH是直角三角形，在 Rt△BCH与 Rt△BQH中，

$\begin{cases}\angle BC = BQ \\ BH = BH\end{cases}$，∴ Rt△BCH≌Rt△BQH（HL），∴ CH=QH，

∴ AP+HC=PH. --------------------------8 分

（3）解：由（2）知，AP=PQ=1，∴ PD=3．设 QH=HC=x，则 DH=4- x．

在 Rt△PDH中，$PD^2+DH^2=PH^2$，

即 $3^2+(4-x)^2=(x+1)^2$，解得 x=2.4，∴ PH=3.4． --------------------------12 分

8.（2015·江西省·中等学校招生考试数学模拟） 如图 1，我们定义：在四边形 ABCD中，若 AD = BC，且 $\angle ADB+\angle BCA=180°$，则把四边形 ABCD叫做互补等对边四边形.

（1）如图 2，在等腰 ΔABE 中，四边形 ABCD是互补等对边四边形，求证：$\angle ABD=\angle BAC=\frac{1}{2}\angle AEB$；

（2）如图 3，在非等腰 ΔABE 中，若四边形 ABCD仍是互补等对边四边形，试问 $\angle ABD=\angle BAC=\frac{1}{2}\angle AEB$ 是否仍然成立，若成立，请加以证明；若不成立，请说明理由.

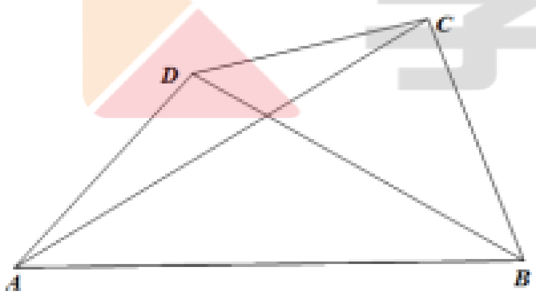


图 1

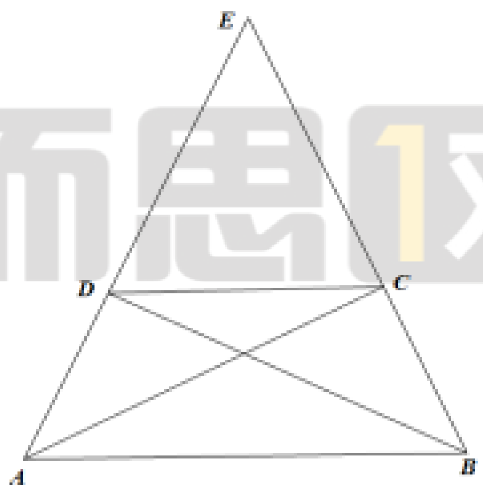


图 2 第 1 题

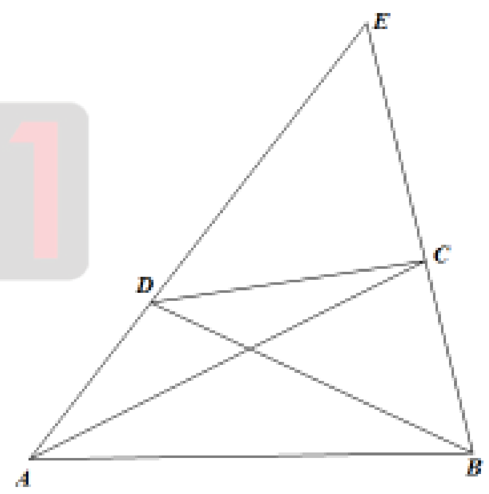


图 3

解：（1）∵ ΔABE是等腰三角形，∴ AE = BE，∴ $\angle EAB=\angle EBA$，

又四边形 ABCD是互补等对边四边形，∴ AD = BC，

∵ AB= BA，∴ $\Delta ABD\cong\Delta BAC$（SAS），∴ $\angle ADB=\angle BCA$，

又∵ $\angle ADB+\angle BCA=180°$，∴ $\angle ADB=\angle BCA=90°$，

在 ΔABE中，∵ $\angle EAB=\angle EBA=\frac{180°-\angle AEB}{2}=90°-\frac{1}{2}\angle AEB$，

∴ $\angle ABD=90°-\angle EAB=90°-(90°-\frac{1}{2}\angle AEB)=\frac{1}{2}\angle AEB$， 同理：

$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle AEB$，

$\therefore \angle ABD = \angle BAC = \frac{1}{2}\angle AEB$；

（2）如图，过点 A、B 分别作 BD 的延长线与 AC 的垂线于点 G、F，

$\because$ 四边形 ABCD 是互补等对边四边形，$\therefore AD = BC$，$\angle ADB + \angle BCA = 180°$，

又 $\angle ADB + \angle ADG = 180°$，$\therefore \angle BCA = \angle ADG$，

又 $\because AG \perp BD, BF \perp AC$，$\therefore \angle AGD = \angle BFC = 90°$，

$\therefore \Delta AGD \cong \Delta BFC\ (AAS)$，

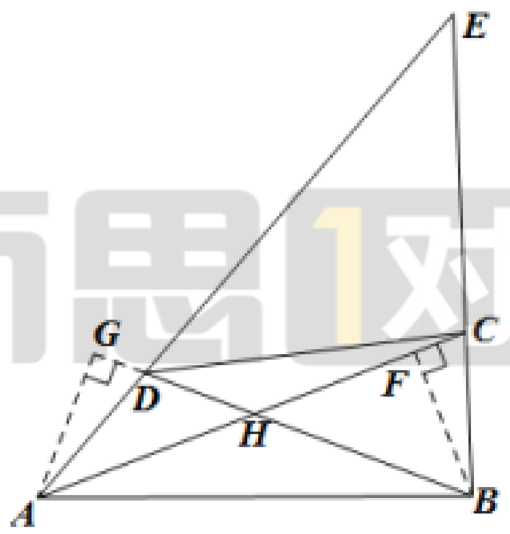
$\therefore AG = BF$，又 $AB = BA$，$\therefore \Delta ABG \cong \Delta BAF\ (HL)$，

$\therefore \angle ABD = \angle BAC$，$\because \angle ADB + \angle BCA = 180°$，

$\therefore \angle EDB + \angle ECA = 180°$，$\therefore \angle AEB + \angle DHC = 180°$，

$\because \angle DHC + \angle BHC = 180°$，$\therefore \angle AEB = \angle BHC$，

又 $\because \angle BHC = \angle BAC + \angle ABD$，$\angle ABD = \angle BAC$，



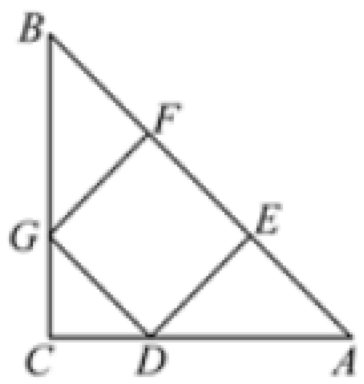
$\therefore \angle ABD = \angle BAC = \frac{1}{2}\angle AEB$．

命题思路：通过数学新定义考查等腰三角形的性质、三角形内角和与外角和、三角形全等等知识，增强推理论证能力，渗透特殊到一般、变中不变的数学思想．

9.（2015·山东省枣庄市齐村中学二模）（满分 8 分）如图，在等腰 Rt△ABC 中，∠C=90°，正方形 DEFG 的顶点 D 在边 AC 上，点 E，F 在边 AB 上，点 G 在边 BC 上．

（1）求证：△ADE≌△BGF；

（2）若正方形 DEFG 的面积为 16，求 AC 的长．



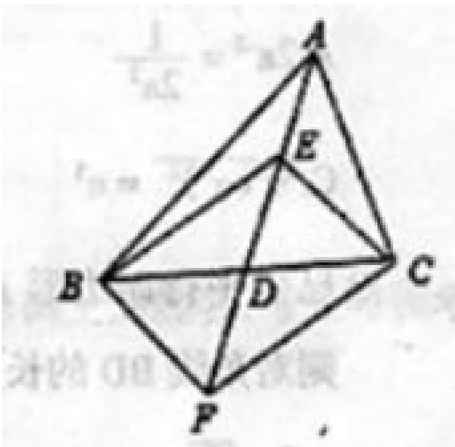
证明：略 ································ 4 分

（2）$AC=6\sqrt{2}$ ································ 4 分

10. （2015 · 呼和浩特市初三年级质量普查调研）（7 分）在△ ABC 中，D 是 BC 边的中点，EF 分别在 AD 及其延长线上，CE∥BF，连接 BE、CF.

（1）求证：△ BDF≌△ CDE

（2）若 $DE=\frac{1}{2}BC$，试判断四边形 BFCE 的形状，无需说明理由 .



答案：（1）证明：∵ CE∥BF，

∴∠CED＝∠BFD，............2 分

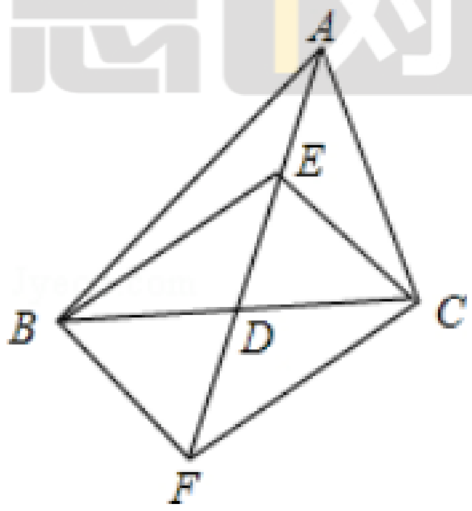
∵D 是 BC 边的中点，

∴BD＝DC，........................3 分

在△BDF 和△CDE 中

$$\begin{cases}\angle BFD=\angle CED\\ \angle BDF=\angle CDE,\\ BD=DC\end{cases}$$

∴△BDF≌△CDE（AAS）；.................5 分

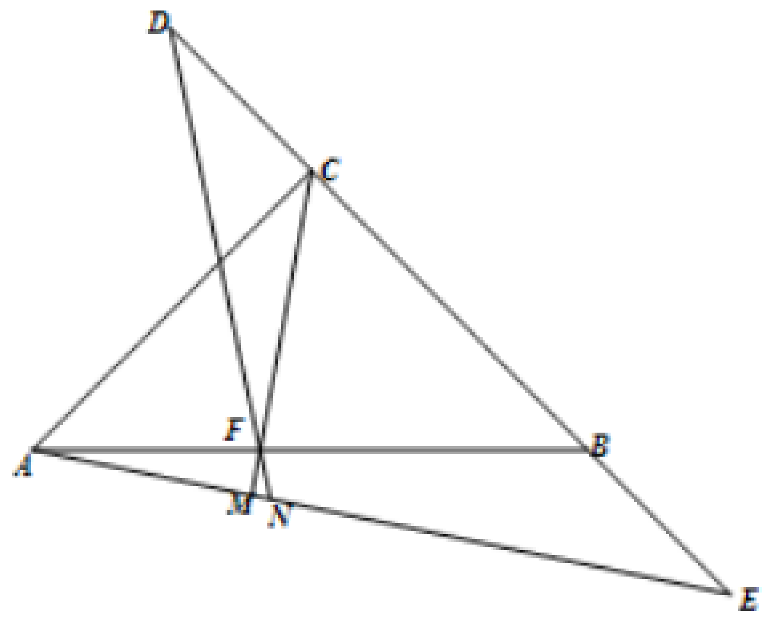


（2）四边形 BFCE 是矩形 ....7 分

11. （2015 · 山东枣庄 · 二模）如图，在等腰三角形 ABC 中，CA＝CB，∠ACB＝90°，点 D、E 是直线 BC 上两点且 CD＝BE，过点 C 作 CM⊥AE 交 AE 于点 M，交 AB 于点 F，连接 DF 并延长交 AE 于点 N.

（1）若 AC＝2，CD＝1，求 CM 的值；

（2）求证：∠D＝∠E.



答案：解：（ 1）∵ CD=BE,CD=1 ∴ BE=1

又∵ AC=CB=2 ∴ CE=CB+BE=3

在 Rt△ ACE中

$$AE=\sqrt{AC^2+EC^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

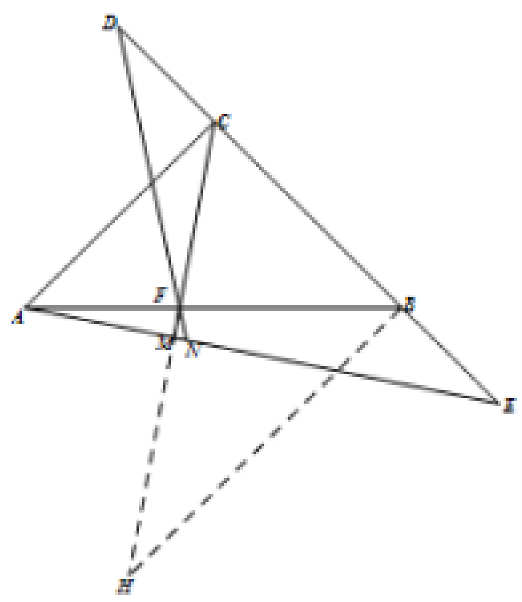
又∵ CE⊥ AE

$$\therefore S_{\triangle ACB}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CE=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot CM$$

$$\therefore \frac{1}{2}\times 2\times 3=\frac{1}{2}\times\sqrt{13}\times CM$$

$$\therefore CM=\frac{6}{\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$$ 4 分

（2） 过点 B 作 BH ⊥ CB 交 CM 的延长线于点 H



$\therefore \angle ABC=\angle CMA=90°$， $\therefore \angle CAM+\angle ACM=90°$， $\therefore \angle ACM+\angle ECM=90°$

$\therefore \angle CAM=\angle ECM$

又∵ BH⊥ CB∴ $\angle CBH=90^0$

在△ ACE 和△ CBH 中 $\begin{cases}\angle CAE=\angle BCH\\ AC=BC\\ \angle ACE=\angle CBH\end{cases}$

∴△ ACE≌△ CBH（ASA)

$\therefore$ CE $=$ BH，$\angle$E $=\angle$H 7 分

又∵△ ABC为等腰直角三角形 $\therefore \angle CBF=45^0$

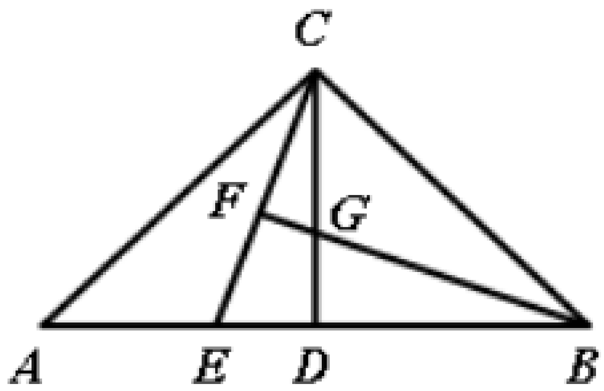
又∵ $\angle CBH=90^0$°，$\therefore \angle FBH=45$° $\therefore \angle FBH=\angle CBF$

在△ DBF 和△ HBF 中 $\begin{cases} DB=HB \\ \angle DBF=\angle HBF \\ BF=BF \end{cases}$

$\therefore$ △DBF ≌△ HBF (SAS)

$\therefore \angle D=\angle H=\angle E$ 10 分

12. （2015 山东 · 枣庄一摸）如图，在△ ABC中，AC= BC，∠ ACB= 90°，点 D是 AB的中点，点 E是 AB边上一点．直线 BF垂直于直线 CE于点 F，交 CD于点 G．求证：AE= CG．



答案：证明：∵点 D是 AB中点，AC= BC，∠ ACB= 90°，

∴ CD⊥ AB，∠ ACD= ∠ BCD= 45°，

∴∠ CAD= ∠ CBD= 45°，

∴∠ CAE= ∠ BCG，

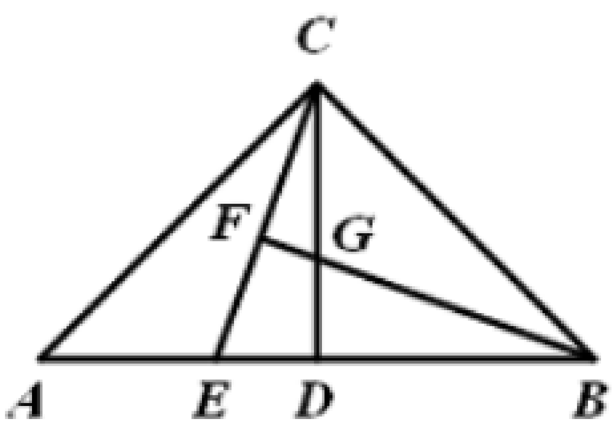
又∵ BF⊥ CE，∴∠ CBG+ ∠ BCF= 90°，

又∵∠ ACE+ ∠ BCF= 90°，

∴∠ ACE= ∠ CBG，

在△ AEC和△ CGB中，∠ CAE= ∠ BCG，AC= BC，∠ ACE= ∠ CBG，

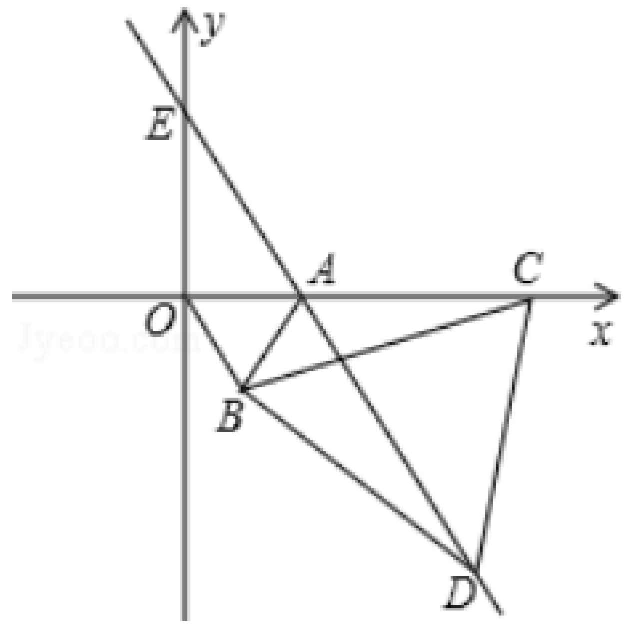
∴ △ AEC≌ △ CGB（ASA），



∴ AE= CG．

13.(2015?山东济南 ?一模)如图，直角坐标系中，点 A 的坐标为（ 1，0），以线段 OA 为边在第四象限内作等边△ AOB，点 C 为 x 正半轴上一动点（ OC＞1），连接 BC，以线段 BC 为边在第四象限内作等边△ CBD，直线 DA 交 y 轴于点 E．①△OBC 与△ABD 全等吗？判断并证明你的结论；

②随着点 C 位置的变化，点 E 的位置是否会发生变化？若没有变化，求出点 E 的坐标；若有变化，请说明理由.



①判断△ OBC与△ ABD全等，由等边△ AOB和等边△ CBD得到全等，△ OBC≌△ ABD，

理由：∵△ AOB和△ CBD是等边三角形，∴ OB=AB，∠OBA=∠OAB=60°，BC=BD，∠CBD=60°，

∴∠ OBA+∠ABC=∠ CBD+∠ABC，即∠ OBC=∠ ABD，

在△ OBC和△ ABD中，{ OB=AB∠ OBC=∠ ABDBC=BD，

∴△ OBC≌△ ABD（SAS） ……5 分

②根据（ 1）容易得到∠ OAE=60°，然后在中根据直角三角形 30°，所对的直角边等于斜边的一半可以得到 AE=2，从而得到 E 的坐标是固定的

∵△ OBC≌△ ABD，∴∠ BAD=∠BOC=60°，

又∵∠ OAB=60°，∴∠ OAE=180° - ∠OAB∠ BAD=60°，

∴Rt△OEA中，AE=2OA=2，∴ OE=√3，

∴点 E的位置不会发生变化，E的坐标为 E（0，√3）. …… 7 分

14．(2015 · 江苏南菁中学 · 期中)(本题满分 8 分) 如图，在所给方格纸中，每个小正方形边长都是 1，标号为①，②，③的三个三角形均为格点三角形（顶点在方格顶点处）．请按要求将图甲中的正方形 ABCD，图乙中的平行四边形 ABCD分别各自分割成三个三角形，使它们与标号为①，②，③的三个三角形分别对应全等 .

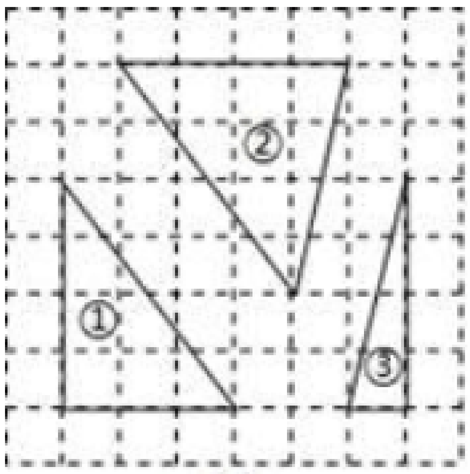


图1

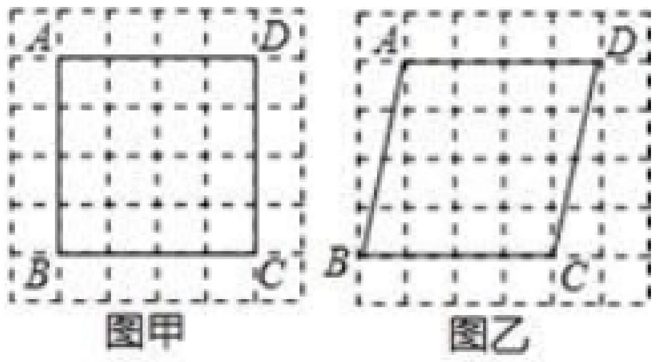


图2

注：图甲、图乙在答题卡上，分割线画成实线 .

答案：(本题满分 8 分)

略(每张图各 4 分)