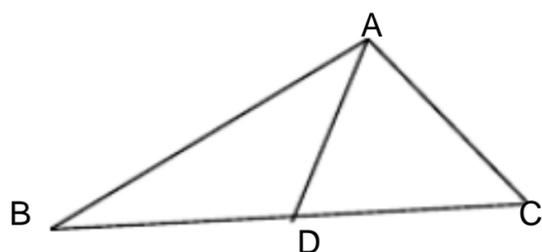


全等三角形证明经典 50 题(含答案)

1. 已知： $AB=4$, $AC=2$, D 是 BC 中点 , AD 是整数 , 求 AD



解：延长 AD 到 E , 使 $AD=DE$

D 是 BC 中点

$BD=DC$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BDE$ 中

$AD=DE$

$\angle CDE = \angle BDE$

$BD=DC$

$\triangle ACD \cong \triangle BDE$

$AC=BE=2$

在 $\triangle ABE$ 中

$AB-BE < AE < AB+BE$

$AB=4$

即 $4-2 < 2AD < 4+2$

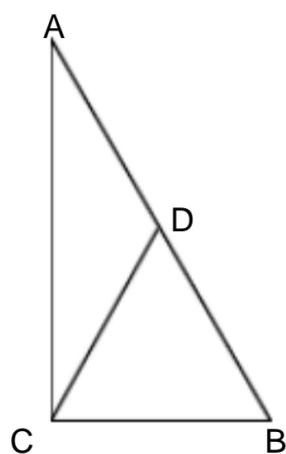
$1 < AD < 3$

$AD=2$



学而思 1对1

2. 已知： D 是 AB 中点 , $\angle ACB=90^\circ$, 求证： $CD = \frac{1}{2} AB$



延长 CD 与 P , 使 D 为 CP 中点。连接 AP, BP

$DP=DC, DA=DB$

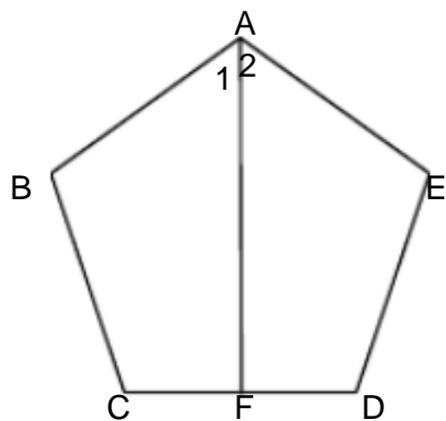
$ACBP$ 为平行四边形

又 $\angle ACB=90^\circ$

平行四边形 $ACBP$ 为矩形

$AB=CP=2CD$

3. 已知：BC=DE，∠B=∠E，∠C=∠D，F是CD中点，求证：∠1=∠2



证明：连接 BF 和 EF
 $BC=ED, CF=DF, \angle C=\angle D$
 三角形 BCF 全等于三角形 EDF(边角边)
 $BF=EF, \angle CBF=\angle DEF$

连接 BE

在三角形 BEF 中, $BF=EF$

$\angle EBF=\angle BEF$ 。

$\angle ABC=\angle AED$ 。

$\angle ABE=\angle AEB$ 。

$AB=AE$ 。

在三角形 ABF 和三角形 AEF 中

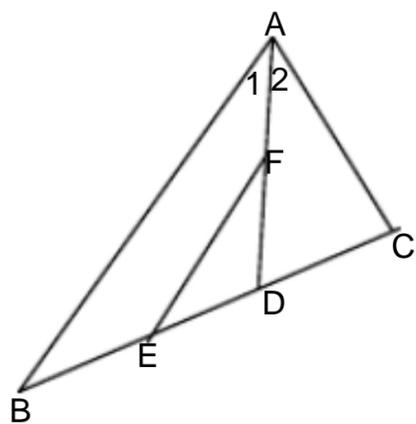
$AB=AE, BF=EF,$

$\angle ABF=\angle ABE+\angle EBF=\angle AEB+\angle BEF=\angle AEF$

三角形 ABF 和三角形 AEF 全等。

$\angle BAF=\angle EAF$ ($\angle 1=\angle 2$)。

4. 已知：∠1=∠2，CD=DE，EF//AB，求证：EF=AC



过 C 作 CG // EF 交 AD 的延长线于点 G

CG // EF, 可得, $\angle EFD=\angle CGD$

$DE=DC$

$\angle FDE=\angle GDC$ (对顶角)

$\angle EFD=\angle CGD$

$EF=CG$

$$\angle CGD = \angle EFD$$

又, $EF \parallel AB$

$$\therefore \angle EFD = \angle 1$$

$$\angle 1 = \angle 2$$

$$\angle CGD = \angle 2$$

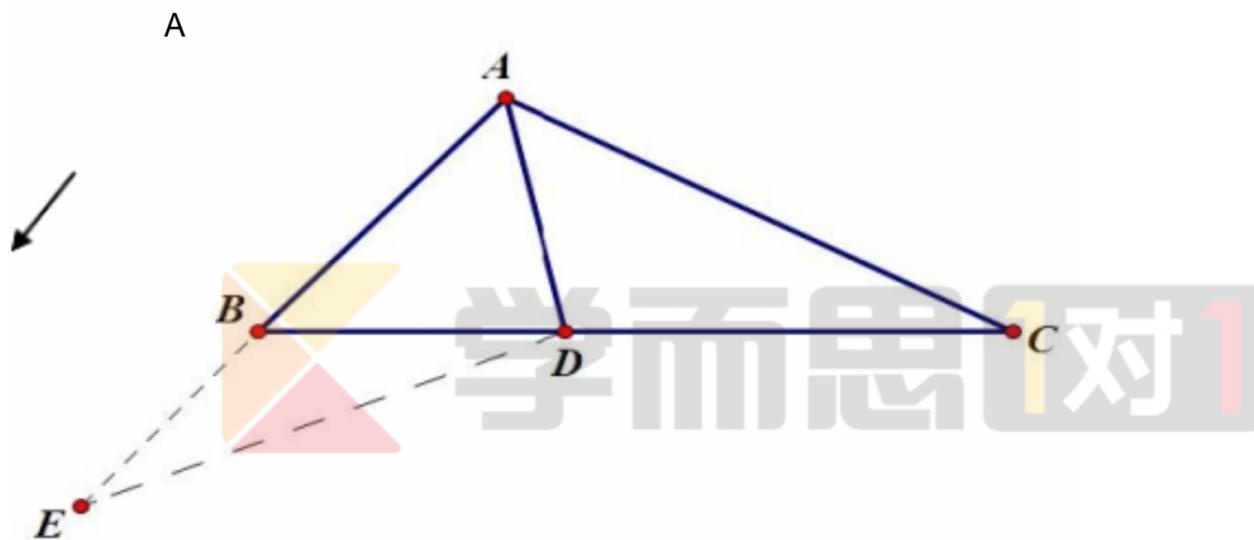
$\triangle AGC$ 为等腰三角形,

$$AC = CG$$

又 $EF = CG$

$$EF = AC$$

5. 已知: AD 平分 $\angle BAC$, $AC = AB + BD$, 求证: $\angle B = 2\angle C$



证明: 延长 AB 取点 E , 使 $AE = AC$, 连接 DE

AD 平分 $\angle BAC$

$$\angle EAD = \angle CAD$$

$$AE = AC, AD = AD$$

$$\triangle AED \cong \triangle ACD \quad (\text{SAS})$$

$$\angle E = \angle C$$

$$AC = AB + BD$$

$$AE = AB + BD$$

$$AE = AB + BE$$

$$BD = BE$$

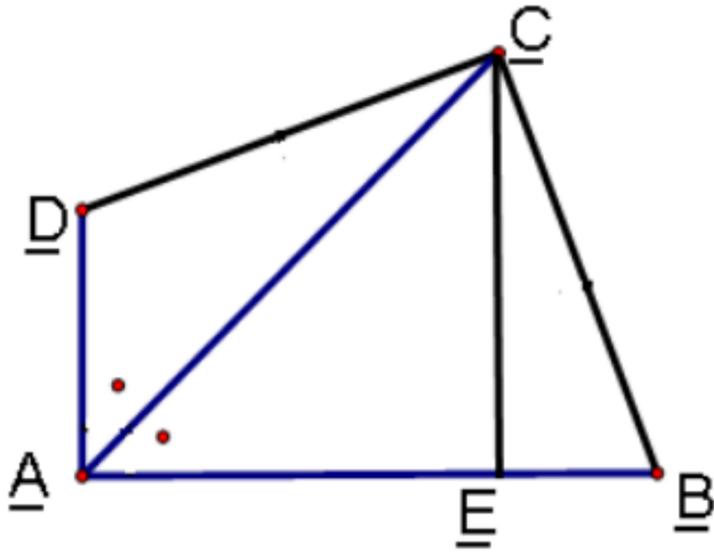
$$\angle BDE = \angle E$$

$$\angle ABC = \angle E + \angle BDE$$

$$\angle ABC = 2\angle E$$

$$\angle ABC = 2\angle C$$

6. 已知: AC 平分 $\angle BAD$, $CE \perp AB$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$, 求证: $AE = AD + BE$



证明：

在 AE 上取 F，使 EF = EB，连接 CF

CE ⊥ AB

$$\angle CEB = \angle CEF = 90^\circ$$

$$EB = EF, CE = CE,$$

$$\angle CEB = \angle CEF$$

$$\angle B = \angle CFE$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ, \quad \angle CFE + \angle CFA = 180^\circ$$

$$\angle D = \angle CFA$$

AC 平分 $\angle BAD$

$$\angle DAC = \angle FAC$$

$$AC = AC$$

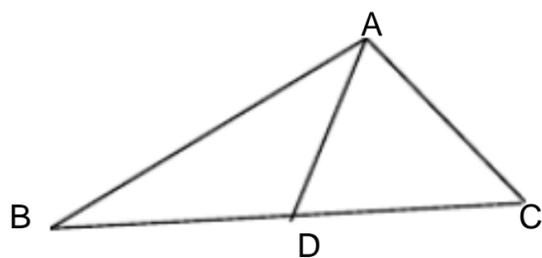
$$\angle ADC = \angle AFC \quad (\text{SAS})$$

$$AD = AF$$

$$AE = AF + FE = AD + BE$$

学而思 1对1

7. 已知：AB=4，AC=2，D 是 BC 中点，AD 是整数，求 AD



解：延长 AD 到 E，使 AD=DE

D 是 BC 中点

$$BD=DC$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BDE$ 中

$$AD=DE$$

$$\angle BDE = \angle ADC$$

$$BD=DC$$

ACD BDE

$$AC=BE=2$$

在 ABE 中

$$AB-BE < AE < AB+BE$$

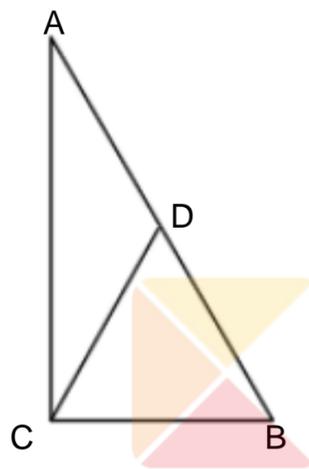
$$AB=4$$

$$\text{即 } 4-2 < 2AD < 4+2$$

$$1 < AD < 3$$

$$AD=2$$

8. 已知：D 是 AB 中点， $\angle ACB=90^\circ$ ，求证： $CD = \frac{1}{2} AB$



学而思 1对1

解：延长 AD 到 E, 使 AD=DE

D 是 BC 中点

$$BD=DC$$

在 ACD 和 BDE 中

$$AD=DE$$

$$\angle BDE = \angle ADC$$

$$BD=DC$$

ACD BDE

$$AC=BE=2$$

在 ABE 中

$$AB-BE < AE < AB+BE$$

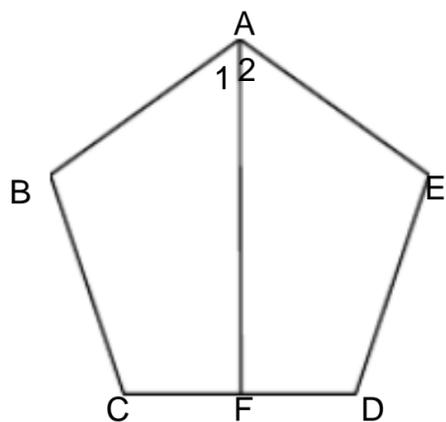
$$AB=4$$

$$\text{即 } 4-2 < 2AD < 4+2$$

$$1 < AD < 3$$

$$AD=2$$

9. 已知：BC=DE， $\angle B = \angle E$ ， $\angle C = \angle D$ ，F 是 CD 中点，求证： $BF = EF$



证明：连接 BF 和 EF。

$BC=ED, CF=DF, \angle BCF= \angle EDF$ 。

三角形 BCF 全等于三角形 EDF(边角边)。

$BF=EF, \angle CBF= \angle DEF$ 。

连接 BE。

在三角形 BEF 中, $BF=EF$ 。

$\angle EBF= \angle BEF$ 。

又 $\angle ABC= \angle AED$ 。

$\angle ABE= \angle AEB$ 。

$AB=AE$ 。

在三角形 ABF 和三角形 AEF 中，

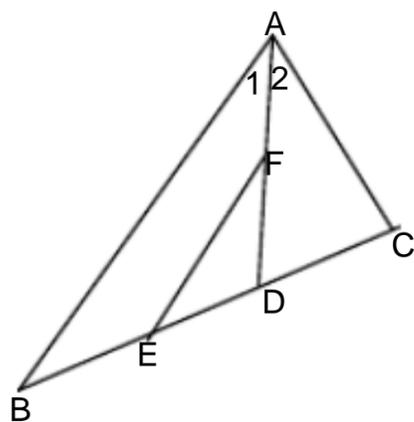
$AB=AE, BF=EF$,

$\angle ABF= \angle ABE+ \angle EBF= \angle AEB+ \angle BEF= \angle AEF$ 。

三角形 ABF 和三角形 AEF 全等。

$\angle BAF= \angle EAF$ ($\angle 1= \angle 2$)。

10. 已知： $\angle 1= \angle 2, CD=DE, EF \parallel AB$ ，求证： $EF=AC$



过 C 作 CG \parallel EF 交 AD 的延长线于点 G

$CG \parallel EF$ ，可得， $\angle EFD = \angle CGD$

$DE = DC$

$\angle FDE = \angle GDC$ (对顶角)

$\angle EFD = \angle CGD$

$EF = CG$

$$\angle CGD = \angle EFD$$

又 $EF \parallel AB$

$$\angle EFD = \angle 1$$

$$\angle 1 = \angle 2$$

$$\angle CGD = \angle 2$$

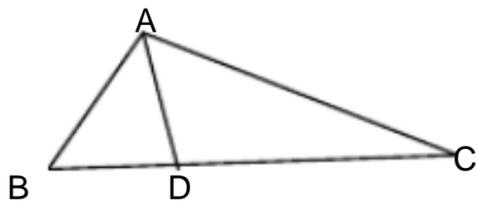
$\triangle AGC$ 为等腰三角形，

$$AC = CG$$

又 $EF = CG$

$$EF = AC$$

11. 已知：AD 平分 $\angle BAC$ ， $AC = AB + BD$ ，求证： $\angle B = 2\angle C$



证明：延长 AB 取点 E，使 $AE = AC$ ，连接 DE

AD 平分 $\angle BAC$

$$\angle EAD = \angle CAD$$

$$AE = AC, AD = AD$$

$$\triangle AED \cong \triangle ACD \quad (\text{SAS})$$

$$\angle E = \angle C$$

$$AC = AB + BD$$

$$AE = AB + BD$$

$$AE = AB + BE$$

$$BD = BE$$

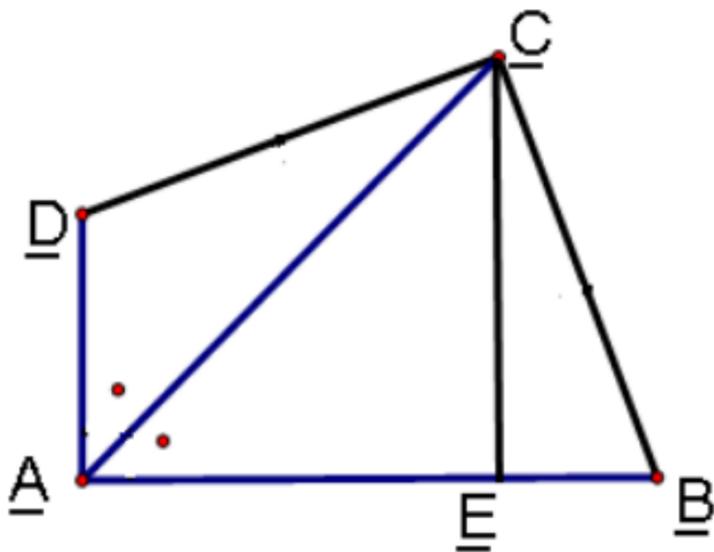
$$\angle BDE = \angle E$$

$$\angle ABC = \angle E + \angle BDE$$

$$\angle ABC = 2\angle E$$

$$\angle ABC = 2\angle C$$

12. 已知：AC 平分 $\angle BAD$ ， $CE \perp AB$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ，求证： $AE = AD + BE$



在 AE 上取 F, 使 EF = EB, 连接 CF

CE ⊥ AB

$$\angle CEB = \angle CEF = 90^\circ$$

$$EB = EF, CE = CE,$$

$$\angle CEB = \angle CEF$$

$$\angle B = \angle CFE$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ, \quad \angle CFE + \angle CFA = 180^\circ$$

$$\angle D = \angle CFA$$

AC 平分 ∠BAD

$$\angle DAC = \angle FAC$$

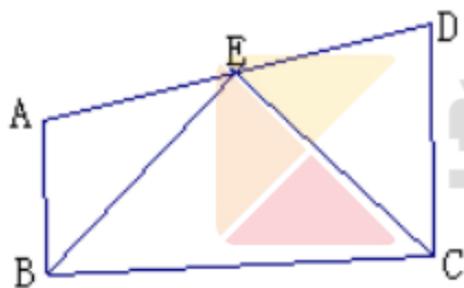
又 AC = AC

$$\triangle ADC \cong \triangle AFC \text{ (SAS)}$$

$$AD = AF$$

$$AE = AF + FE = AD + BE$$

12. 如图, 四边形 ABCD 中, AB ∥ DC, BE、CE 分别平分 ∠ABC、∠BCD, 且点 E 在 AD 上。求证: BC = AB + DC。



在 BC 上截取 BF = AB, 连接 EF

BE 平分 ∠ABC

$$\angle ABE = \angle FBE$$

又 BE = BE

$$\triangle ABE \cong \triangle FBE \text{ (SAS)}$$

$$\angle A = \angle BFE$$

AB ∥ CD

$$\angle A + \angle D = 180^\circ$$

$$\angle BFE + \angle CFE = 180^\circ$$

$$\angle D = \angle CFE$$

又 ∠DCE = ∠FCE

CE 平分 ∠BCD

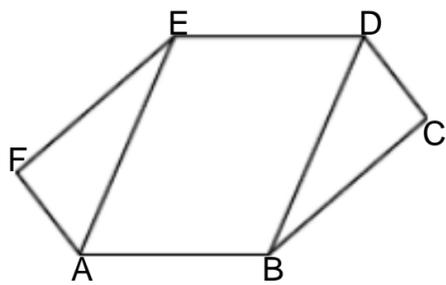
$$CE = CE$$

$$\triangle DCE \cong \triangle FCE \text{ (AAS)}$$

$$CD = CF$$

$$BC = BF + CF = AB + CD$$

13. 已知： $AB \parallel ED$, $\angle EAB = \angle BDE$, $AF = CD$, $EF = BC$, 求证： $\angle F = \angle C$



$AB \parallel ED$, 得： $\angle EAB + \angle AED = \angle BDE + \angle ABD = 180^\circ$ 度 ,

$\angle EAB = \angle BDE$,

$\angle AED = \angle ABD$,

四边形 $ABDE$ 是平行四边形。

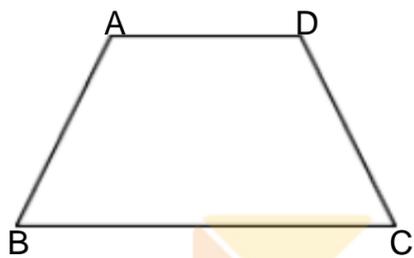
得： $AE = BD$,

$AF = CD, EF = BC$,

三角形 AEF 全等于三角形 DBC ,

$\angle F = \angle C$ 。

14. 已知： $AB = CD$, $\angle A = \angle D$, 求证： $\angle B = \angle C$



证明：设线段 AB, CD 所在的直线交于 E , (当 $AD < BC$ 时 , E 点是射线 BA, CD 的交点 , 当 $AD > BC$ 时 , E 点是射线 AB, DC 的交点)。则：

$\triangle AED$ 是等腰三角形。

$AE = DE$

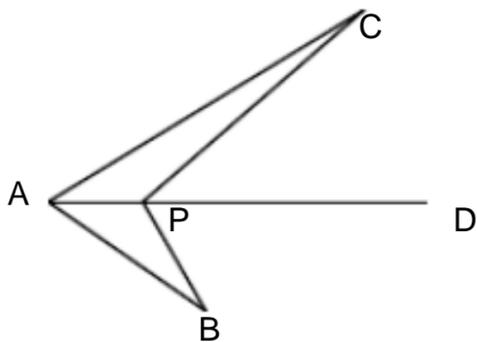
而 $AB = CD$

$BE = CE$ (等量加等量 , 或等量减等量)

$\triangle BEC$ 是等腰三角形

$\angle B = \angle C$ 。

15. P 是 $\angle BAC$ 平分线 AD 上一点 , $AC > AB$, 求证： $PC - PB < AC - AB$



在 AC 上取点 E ,

使 $AE = AB$ 。

$$AE = AB$$

$$AP = AP$$

$$\angle EAP = \angle BAE,$$

$$\angle EAP = \angle BAP$$

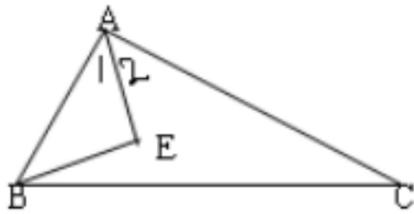
$$PE = PB。$$

$$PC < EC + PE$$

$$PC < (AC - AE) + PB$$

$$PC - PB < AC - AB。$$

16. 已知 $\angle ABC = 3\angle C$, $\angle 1 = \angle 2$, $BE \perp AE$, 求证: $AC - AB = 2BE$



证明:

在 AC 上取一点 D, 使得 $\angle DBC = \angle C$

$$\angle ABC = 3\angle C$$

$$\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 3\angle C - \angle C = 2\angle C;$$

$$\angle ADB = \angle C + \angle DBC = 2\angle C;$$

$$AB = AD$$

$$AC - AB = AC - AD = CD = BD$$

在等腰三角形 ABD 中, AE 是角 BAD 的角平分线,

AE 垂直 BD

BE = AE

点 E 一定在直线 BD 上,

在等腰三角形 ABD 中, $AB = AD$, AE 垂直 BD

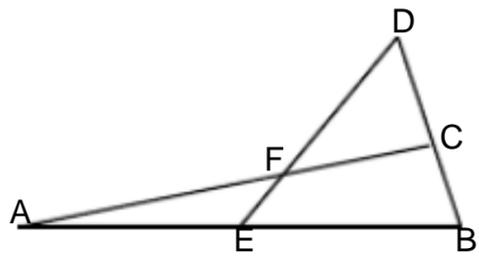
点 E 也是 BD 的中点

$$BD = 2BE$$

$$BD = CD = AC - AB$$

$$AC - AB = 2BE$$

17. 已知, E 是 AB 中点, $AF = BD$, $BD = 5$, $AC = 7$, 求 DC



作 $AG \perp BD$ 交 DE 延长线于 G

$\triangle AGE \cong \triangle BDE$

$AG = BD = 5$

$\triangle AGF \cong \triangle CDF$

$AF = AG = 5$

$DC = CF = 2$

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BD = DC$, $\angle 1 = \angle 2$, 求证: $AD \perp BC$.

解: 延长 AD 至 BC 于点 E ,

$BD = DC$ $\triangle BDC$ 是等腰三角形

$\angle DBC = \angle DCB$

又 $\angle 1 = \angle 2$ $\angle DBC + \angle 1 = \angle DCB + \angle 2$

即 $\angle ABC = \angle ACB$

$\triangle ABC$ 是等腰三角形

$AB = AC$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中

$\begin{cases} AB = AC \\ \angle 1 = \angle 2 \\ BD = DC \end{cases}$

$\angle 1 = \angle 2$

$BD = DC$

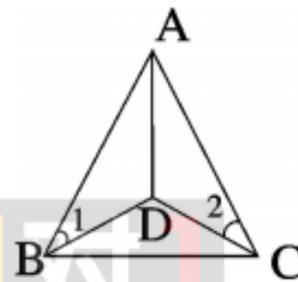
$\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 是全等三角形 (边角边)

$\angle BAD = \angle CAD$

AE 是 $\triangle ABC$ 的中垂线

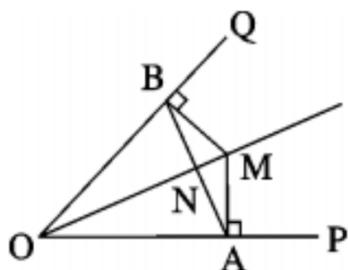
$AE \perp BC$

$AD \perp BC$



19. 如图, OM 平分 $\angle POQ$, $MA \perp OP$, $MB \perp OQ$, A 、 B 为垂足, AB 交 OM 于点 N .

求证: $\angle OAB = \angle OBA$



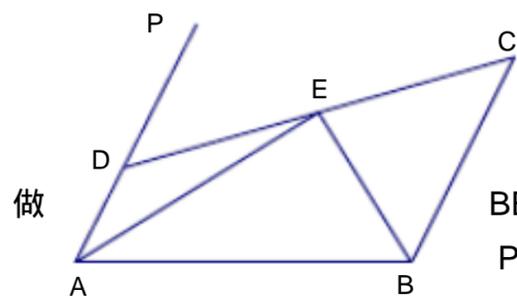
证明:

OM 平分 $\angle POQ$

$\angle POM = \angle QOM$

$MA \perp OP, MB \perp OQ$
 $\angle MAO = \angle MBO = 90^\circ$
 $OM = OM$
 $\triangle AOM \cong \triangle BOM$ (AAS)
 $OA = OB$
 $ON = ON$
 $\triangle AON \cong \triangle BON$ (SAS)
 $\angle OAB = \angle OBA, \angle ONA = \angle ONB$
 $\angle ONA + \angle ONB = 180^\circ$
 $\angle ONA = \angle ONB = 90^\circ$
 $OM \perp AB$

20. (5分) 如图, 已知 $AD \parallel BC$, $\angle PAB$ 的平分线与 $\angle CBA$ 的平分线相交于 E , CE 的连线交 AP 于 D . 求证: $AD+BC=AB$.



做

BE 的延长线, 与 AP 相交于 F 点,
 $PA \parallel BC$

$\angle PAB + \angle CBA = 180^\circ$, 又 AE, BE 均为 $\angle PAB$ 和 $\angle CBA$

的角平分线

$\angle EAB + \angle EBA = 90^\circ, \angle AEB = 90^\circ$, $\triangle AEB$ 为直角三角形
 在 $\triangle ABF$ 中, $AE \perp BF$, 且 AE 为 $\angle FAB$ 的角平分线

$\triangle FAB$ 为等腰三角形, $AB=AF, BE=EF$

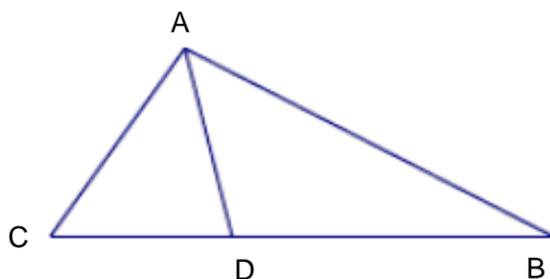
在 $\triangle DEF$ 与 $\triangle BEC$ 中,

$\angle EBC = \angle DFE$, 且 $BE=EF, \angle DEF = \angle CEB$,

$\triangle DEF$ 与 $\triangle BEC$ 为全等三角形, $DF=BC$

$AB=AF=AD+DF=AD+BC$

21. 如图, $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle CAB$ 的平分线, 且 $AB=AC+CD$, 求证: $\angle C=2\angle B$



延长 AC 到 E

$AB=AC+CD$

$CD=CE$

可得 $\angle B = \angle E$

$\triangle CDE$ 为等腰

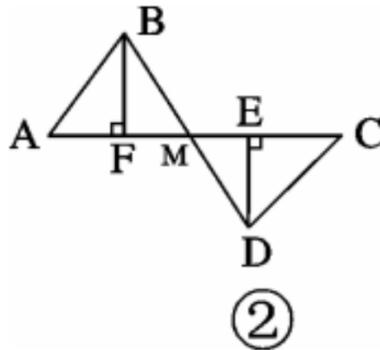
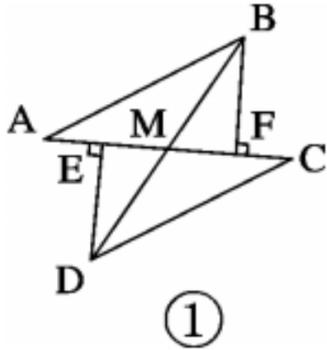
$\angle ACB = 2\angle B$

使 $AE=AC$ 连接 ED

22. (6分) 如图，E、F分别为线段AC上的两个动点，且DE⊥AC于E，BF⊥AC于F，若AB=CD，AF=CE，BD交AC于点M。

(1) 求证：MB=MD，ME=MF

(2) 当E、F两点移动到如图②的位置时，其余条件不变，上述结论能否成立？若成立请给予证明；若不成立请说明理由。



(1) 连接 BE，DF。

DE⊥AC于E，BF⊥AC于F，

∠DEC=∠BFA=90°，DE∥BF，

在Rt△DEC和Rt△BFA中，

AF=CE，AB=CD，

Rt△DEC≌Rt△BFA(HL)，

DE=BF。

四边形BEDF是平行四边形。

MB=MD，ME=MF；

(2) 连接 BE，DF。

DE⊥AC于E，BF⊥AC于F，

∠DEC=∠BFA=90°，DE∥BF，

在Rt△DEC和Rt△BFA中，

AF=CE，AB=CD，

Rt△DEC≌Rt△BFA(HL)，

DE=BF。

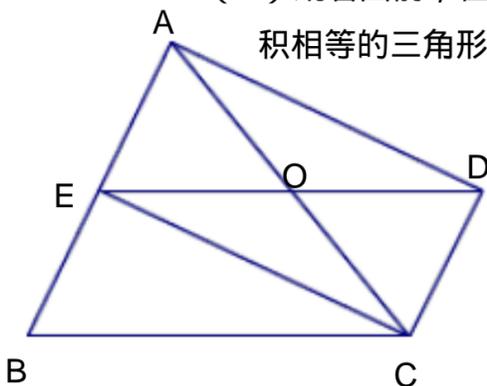
四边形BEDF是平行四边形。

MB=MD，ME=MF。

23. 已知：如图，DC∥AB，且DC=AE，E为AB的中点，

(1) 求证：△AED≌△EBC。

(2) 观看图前，在不添辅助线的情况下，除△EBC外，请再写出两个与△AED的面积相等的三角形。(直接写出结果，不要求证明)：



证明：

$DC = AB$

$\angle CDE = \angle AED$

$DE = DE, DC = AE$

$\triangle AED \cong \triangle EDC$

E 为 AB 中点

$AE = BE$

$BE = DC$

$DC = AB$

$\angle DCE = \angle BEC$

$CE = CE$

$\triangle EBC \cong \triangle EDC$

$\triangle AED \cong \triangle EBC$

24. (7分) 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，BD 是 $\triangle ABC$ 的平分线，BD 的延长线垂直于过 C 点的直线于 E，直线 CE 交 BA 的延长线于 F。

求证： $BD = 2CE$ 。

证明：

$\angle CEB = \angle CAB = 90^\circ$

ABCE 四点共圆

$\angle ABE = \angle CBE$

$AE = CE$

$\angle ECA = \angle EAC$

取线段 BD 的中点 G，连接 AG，则： $AG = BG = DG$

$\angle GAB = \angle ABG$

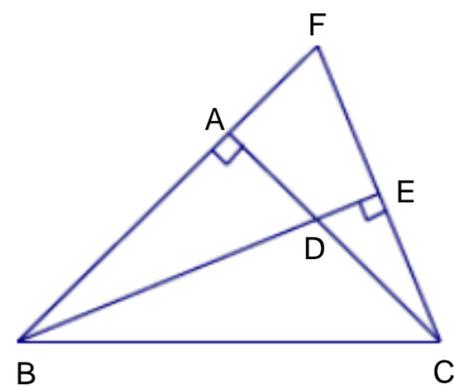
而： $\angle ECA = \angle GBA$ (同弧上的圆周角相等)

$\angle ECA = \angle EAC = \angle GBA = \angle GAB$

而： $AC = AB$

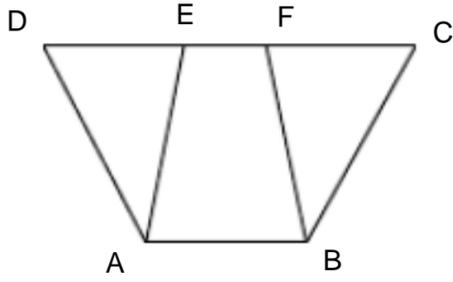
$\triangle AEC \cong \triangle AGB$

$EC = BG = DG$



$$BE=2CE$$

25、如图：DF=CE, AD=BC, $\angle D = \angle C$ 。求证： $\triangle AED \cong \triangle BFC$ 。



证明：DF=CE，

$$DF-EF=CE-EF，$$

即 DE=CF，

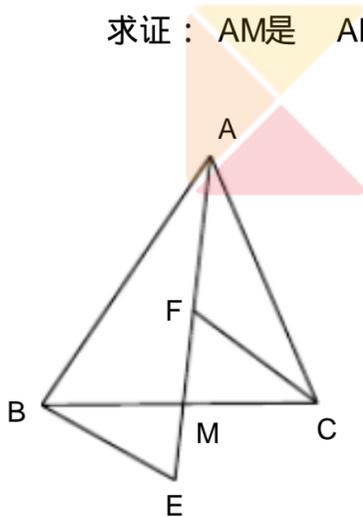
在 $\triangle AED$ 和 $\triangle BFC$ 中，

$$\begin{cases} AD=BC, & \angle D = \angle C, & DE=CF \end{cases}$$

$$\triangle AED \cong \triangle BFC \text{ (SAS)}$$

26、(10分)如图：AE、BC交于点M, F点在AM上, BE=CF, BE=CF

求证：AM是 $\triangle ABC$ 的中线。



证明：

$$BE = CF$$

$$\angle E = \angle CFM, \quad \angle EBM = \angle FCM$$

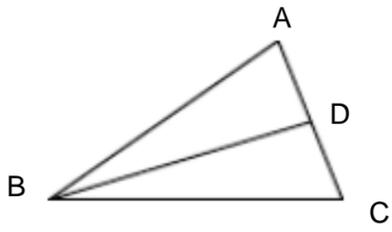
$$BE = CF$$

$$\triangle BEM \cong \triangle CFM$$

$$BM = CM$$

AM是 $\triangle ABC$ 的中线。

27、(10分)如图：在 $\triangle ABC$ 中，BA=BC, D是AC的中点。求证：BD \perp AC。



ABD和 BCD的三条边都相等

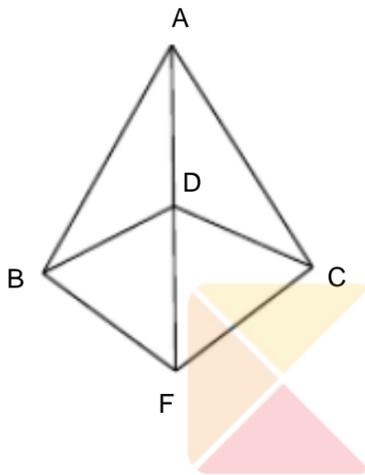
$$AB=BC$$

$$AD=DC$$

$$\angle ADB=\angle CDB=90^\circ$$

$$BD=BD$$

28、(10分) $AB=AC$, $DB=DC$, F 是 AD 的延长线上的一点。求证: $BF=CF$



在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中

$$AB=AC$$

$$DB=DC$$

$$AD=AD$$

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD$$

$$\angle ADB=\angle ADC$$

$$\angle BDF=\angle FDC$$

在 $\triangle BDF$ 与 $\triangle FDC$ 中

$$DB=DC$$

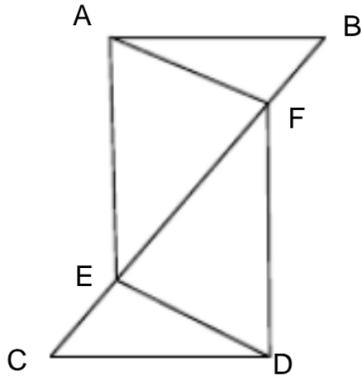
$$\angle BDF=\angle FDC$$

$$DF=DF$$

$$\triangle BDF \cong \triangle FDC$$

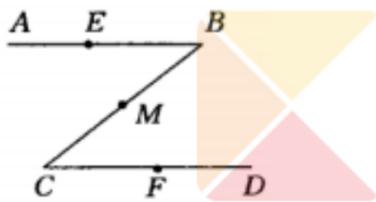
$$BF=FC$$

29、(12分) 如图: $AB=CD$, $AE=DF$, $CE=FB$ 求证: $AF=DE$



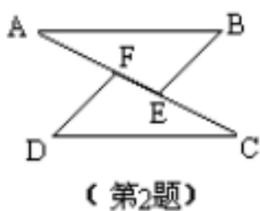
$AB=DC$
 $AE=DF,$
 $CE=FB$
 $CE+EF=EF+FB$
 $\angle ABE= \angle CDF$
 $\angle DCB= \angle ABF$
 $AB=DC \quad BF=CE$
 $\angle ABF= \angle CDE$
 $AF=DE$

30. 公园里有一条“Z”字形道路 ABCD，如图所示，其中 AB \parallel CD，在 AB，CD，BC 三段路旁各有一只小石凳 E，F，M，且 BE = CF，M 在 BC 的中点，试说明三只石凳 E，F，M 恰好一条直线上。



证明：连接 EF
 $AB \parallel CD$
 $\angle B = \angle C$
 M 是 BC 中点
 $BM=CM$
 在 $\triangle BEM$ 和 $\triangle CFM$ 中
 $BE=CF$
 $\angle B = \angle C$
 $BM=CM$
 $\triangle BEM \cong \triangle CFM$ (SAS)
 $CF=BE$

31. 已知：点 A、F、E、C 在同一条直线上， $AF = CE$ ， $BE \parallel DF$ ， $BE = DF$ 。求证： $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ 。



$AF=CE, FE=EF.$

$$AE=CF.$$

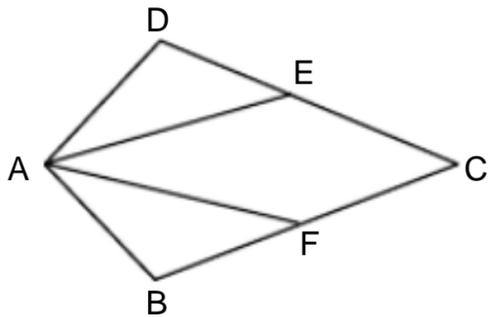
$$DF//BE,$$

$$\angle AEB = \angle CFD \text{ (两直线平行, 内错角相等)}$$

$$BE=DF$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF \text{ (SAS)}$$

32. 已知：如图所示， $AB = AD$ ， $BC = DC$ ， E 、 F 分别是 DC 、 BC 的中点，求证： $AE = AF$ 。



连接 BD ；

$$AB=AD \quad BC=DC$$

$$\angle ADB = \angle ABD \quad \angle CDB = \angle CBD; \text{两角相加, } \angle ADC = \angle ABC;$$

$$BC=DC \quad E, F \text{ 是中点}$$

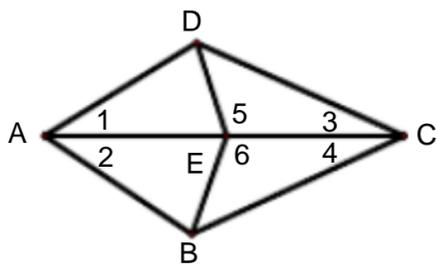
$$DE=BF;$$

$$AB=AD \quad DE=BF$$

$$\angle ADC = \angle ABC$$

$$AE=AF.$$

33. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， E 是 AC 上的一点， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，求证： $\angle 5 = \angle 6$ 。



证明：

在 $\triangle ADC$, $\triangle ABC$ 中

$$AC=AC, \quad \angle BAC = \angle DAC, \quad \angle BCA = \angle DCA$$

$$\triangle ADC \cong \triangle ABC \text{ (两角夹一边)}$$

$$AB=AD, \quad BC=CD$$

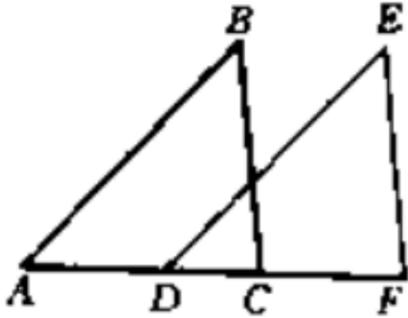
在 $\triangle DEC$ 与 $\triangle BEC$ 中

$$\angle BCA = \angle DCA, CE = CE, BC = CD$$

$\triangle DEC \cong \triangle BEC$ (两边夹一角)

$$\angle DEC = \angle BEC$$

34. 已知 $AB \parallel DE, BC \parallel EF, D, C$ 在 AF 上, 且 $AD = CF$, 求证: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



$$AD = CF$$

$$AC = DF$$

$$AB \parallel DE$$

$$\angle A = \angle EDF$$

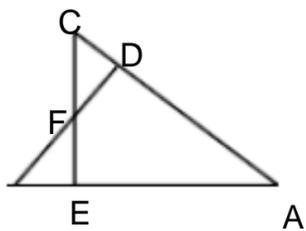
又 $BC \parallel EF$

$$\angle F = \angle BCA$$

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ (ASA)}$$

学而思 1对1

35. 已知: 如图, $AB = AC, BD \perp AC, CE \perp AB$, 垂足分别为 D, E , BD, CE 相交于点 F , 求证: $BE = CD$.



证明:

$$BD \perp AC$$

$$\angle BDC = 90^\circ$$

$$CE \perp AB$$

$$\angle BEC = 90^\circ$$

$$\angle BDC = \angle BEC = 90^\circ$$

$$AB = AC$$

$$\angle DCB = \angle ECB$$

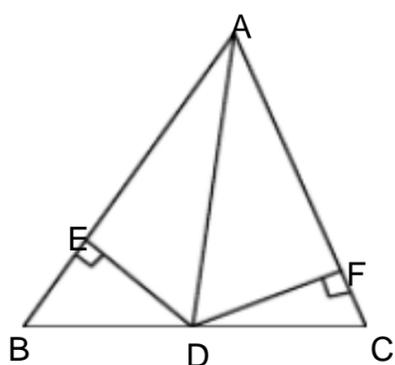
$$BC = BC$$

$$\text{Rt } \triangle BDC \cong \text{Rt } \triangle BEC \text{ (AAS)}$$

$$BE = CD$$

36、如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 为 $\angle BAC$ 的平分线，DE \perp AB 于 E，DF \perp AC 于 F。

求证：DE = DF。



证明：

AD 是 $\angle BAC$ 的平分线

$$\angle EAD = \angle FAD$$

DE \perp AB，DF \perp AC

$$\angle BED = \angle CFD = 90^\circ$$

$$\angle AED = \angle AFD = 90^\circ$$

在 $\triangle AED$ 与 $\triangle AFD$ 中

$$\angle EAD = \angle FAD$$

$$AD = AD$$

$$\angle AED = \angle AFD$$

$$\triangle AED \cong \triangle AFD \text{ (AAS)}$$

$$AE = AF$$

在 $\triangle AEO$ 与 $\triangle AFO$ 中

$$\angle EAO = \angle FAO$$

$$AO = AO$$

$$AE = AF$$

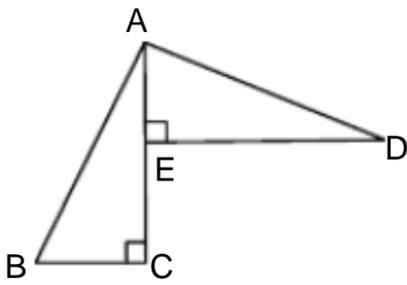
学而思 1对1

$\triangle AEO \cong \triangle AFO$ (SAS)

$\angle AOE = \angle AOF = 90^\circ$

$AD \perp EF$

37. 已知：如图， $AC \perp BC$ 于 C ， $DE \perp AC$ 于 E ， $AD \perp AB$ 于 A ， $BC = AE$ 。若 $AB = 5$ ，求 AD 的长？



$AD \perp AB$

$\angle BAC = \angle ADE$

又 $AC \perp BC$ 于 C ， $DE \perp AC$ 于 E

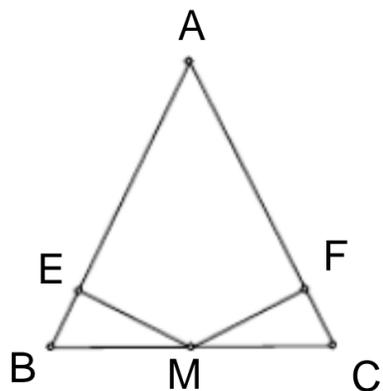
根据三角形内角和等于 180°

$\angle ABC = \angle DAE$

$BC = AE$ ， $\triangle ABC \cong \triangle DAE$ (ASA)

$AD = AB = 5$

38. 如图： $AB = AC$ ， $ME \perp AB$ ， $MF \perp AC$ ，垂足分别为 E 、 F ， $ME = MF$ 。求证： $MB = MC$



证明：

$AB = AC$

$\angle B = \angle C$

$ME \perp AB$ ， $MF \perp AC$

$$\angle BEM = \angle CFM = 90^\circ$$

在 $\triangle BME$ 和 $\triangle CMF$ 中

$$\angle B = \angle C \quad \angle BEM = \angle CFM = 90^\circ \quad ME = MF$$

$$\triangle BME \cong \triangle CMF \quad (\text{AAS})$$

$$MB = MC$$

39. 如图，给出五个等量关系： $AD = BC$ $AC = BD$ $CE = DE$ $\angle D = \angle C$

$\angle DAB = \angle CBA$. 请你以其中两个为条件，另三个中的一个为结论，推出一个正确的结

论（只需写出一种情况），并加以证明 .

已知： $AD = BC$, $\angle DAB = \angle CBA$

求证： $\angle D = \angle C$

证明： $AD = BC$, $\angle DAB = \angle CBA$

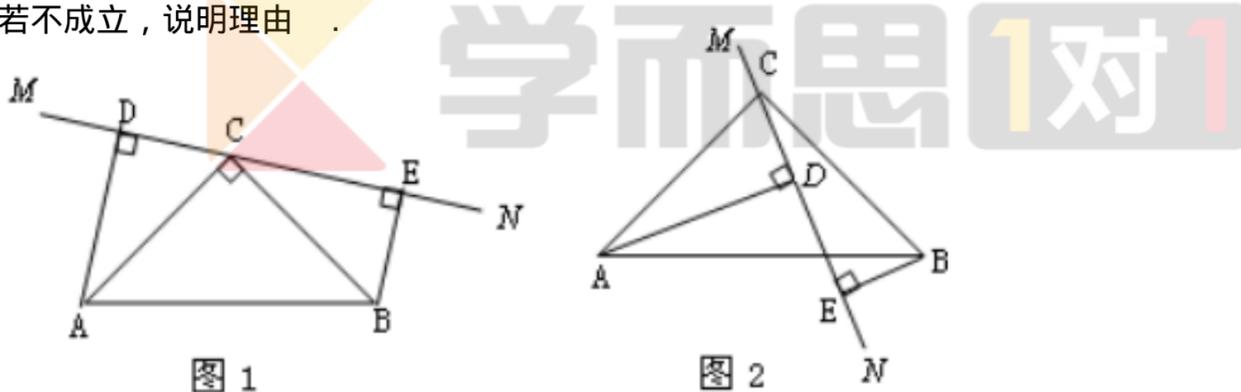
又 $AB = AB$

$$\triangle DAB \cong \triangle CBA$$

40. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 直线 MN 经过点 C , 且 $AD \perp MN$ 于 D , $BE \perp MN$ 于 E . (1) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图 1 的位置时，求证： $\triangle ADC \cong \triangle CEB$;

$$DE = AD + BE ;$$

(2) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图 2 的位置时，(1) 中的结论还成立吗？若成立，请给出证明；若不成立，说明理由 .



(1)

$$\angle ADC = \angle ACB = \angle BEC = 90^\circ ,$$

$$\angle CAD + \angle ACD = 90^\circ , \quad \angle BCE + \angle CBE = 90^\circ , \quad \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ .$$

$$\angle CAD = \angle BCE .$$

$$AC = BC ,$$

$$\triangle ADC \cong \triangle CEB .$$

$$\triangle ADC \cong \triangle CEB ,$$

$$CE = AD , \quad CD = BE$$

$$DE = CE + CD = AD + BE$$

(2) $\angle ADC = \angle CEB = \angle ACB = 90^\circ ,$

$$\angle ACD = \angle CBE .$$

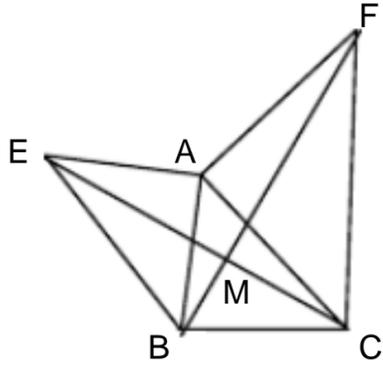
又 $AC = BC$

$$\triangle ACD \cong \triangle CBE .$$

$$CE = AD , \quad CD = BE$$

$$DE=CE-CD=AD-BE$$

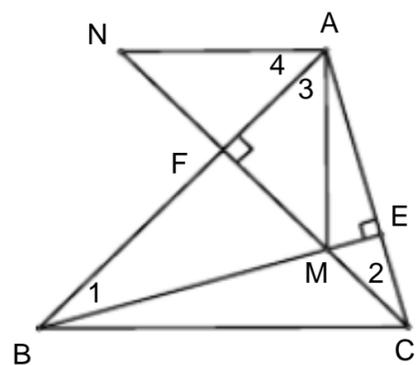
41. 如图所示, 已知 $\angle AEB = \angle AFC$, $AE=AB$, $AF=AC$. 求证: (1) $EC=BF$; (2) $EC \perp BF$



(1) $\angle AEB = \angle AFC$,
 $\angle AEB = \angle AFC = 90^\circ$,
 $\angle AEB + \angle BAC = \angle AFC + \angle BAC$,
 即 $\angle EAC = \angle BAF$,
 在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle AEC$ 中,
 $AE=AB$, $\angle EAC = \angle BAF$, $AF=AC$,
 $\triangle ABF \cong \triangle AEC$ (SAS),
 $EC=BF$;

(2) 如图, 根据 (1), $\triangle ABF \cong \triangle AEC$,
 $\angle AEC = \angle ABF$,
 $AE = AB$,
 $\angle AEB = 90^\circ$,
 $\angle AEC + \angle ADE = 90^\circ$,
 $\angle ADE = \angle BDM$ (对顶角相等),
 $\angle ABF + \angle BDM = 90^\circ$,
 在 $\triangle BDM$ 中, $\angle BMD = 180^\circ - \angle ABF - \angle BDM = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$,
 $EC \perp BF$.

42. 如图: $BE \perp AC$, $CF \perp AB$, $BM=AC$, $CN=AB$. 求证: (1) $AM=AN$; (2) $AM \perp AN$.



证明：

(1)

$BE \perp AC, CF \perp AB$

$\angle ABM + \angle BAC = 90^\circ, \angle ACN + \angle BAC = 90^\circ$

$\angle ABM = \angle ACN$

$BM = AC, CN = AB$

$\triangle ABM \cong \triangle NAC$

$AM = AN$

(2)

$\triangle ABM \cong \triangle NAC$

$\angle BAM = \angle N$

$\angle N + \angle BAN = 90^\circ$

$\angle BAM + \angle BAN = 90^\circ$

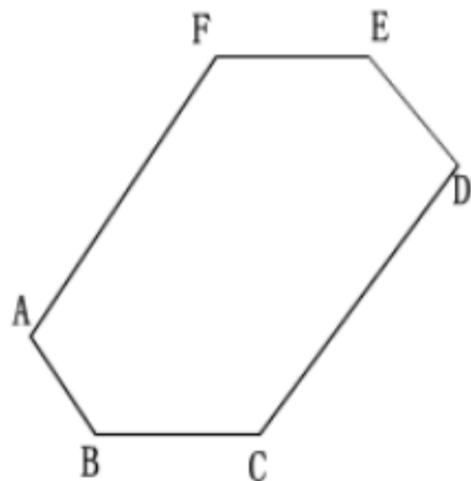
即 $\angle MAN = 90^\circ$

$AM = AN$



学而思 1对1

43. 如图,已知 $\angle A = \angle D, AB = DE, AF = CD, BC = EF$. 求证: $BC \parallel EF$



在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CDE$ 中

$AB = DE$

$\angle A = \angle D$

$AF = CD$

$\triangle ABF \cong \triangle CDE$ (边角边)

$FB=CE$

在四边形 $BCEF$ 中

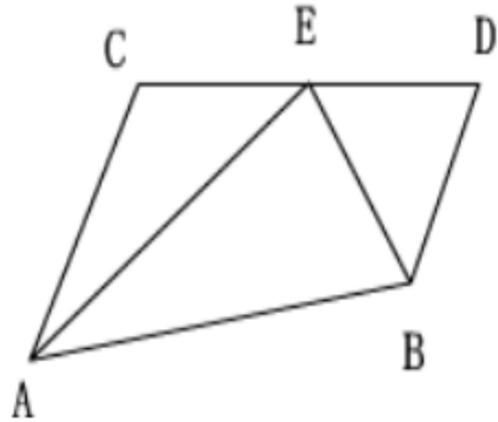
$FB=CE$

$BC=EF$

四边形 $BCEF$ 是平行四边形

$BC \parallel EF$

44. 如图,已知 $AC \parallel BD$, EA 、 EB 分别平分 $\angle CAB$ 和 $\angle DBA$, CD 过点 E , 则 AB 与 $AC+BD$ 相等吗? 请说明理由



在 AB 上取点 N , 使得 $AN=AC$

$\angle CAE = \angle EAN$

AE 为公共边,

$\triangle CAE \cong \triangle EAN$

$\angle ANE = \angle ACE$

又 $AC \parallel BD$

$\angle ACE + \angle BDE = 180^\circ$

而 $\angle ANE + \angle ENB = 180^\circ$

$\angle ENB = \angle BDE$

$\angle NBE = \angle EBN$

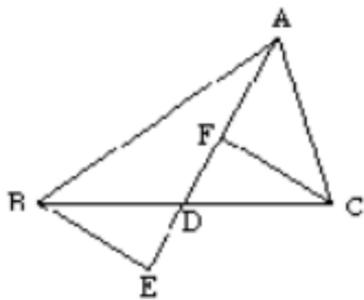
BE 为公共边

$\triangle EBN \cong \triangle EBD$

$BD=BN$

$AB=AN+BN=AC+BD$

45. (10分) 如图,已知: AD 是 BC 上的中线, 且 $DF=DE$. 求证: $BE \parallel CF$.



证明:

AD 是 $\triangle ABC$ 的中线

$BD=CD$

$DF=DE$ (已知)

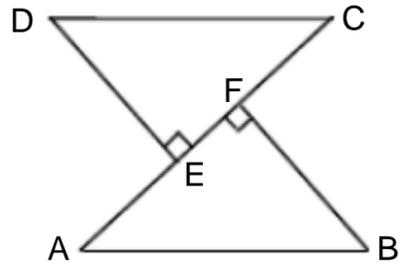
$$\angle BDE = \angle FDC$$

$$\angle BDE = \angle FDC$$

$$\text{则 } \angle EBD = \angle FCD$$

BE // CF (内错角相等, 两直线平行)。

46. (10分) 已知: 如图, $AB = CD$, $DE \perp AC$, $BF \perp AC$, E, F 是垂足, $DE = BF$.
求证: $AB \parallel CD$.



证明:

$$DE \perp AC, BF \perp AC$$

$$\angle CED = \angle AFB = 90^\circ$$

又 $AB = CD, BF = DE$

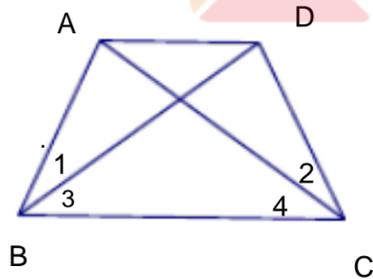
$$\text{Rt } \triangle ABF \cong \text{Rt } \triangle CDE \text{ (HL)}$$

$$AF = CE$$

$$\angle BAF = \angle DCE$$

$$AB \parallel CD$$

47. (10分) 如图, 已知 $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$, 求证: $AB = CD$



$$\angle 3 = \angle 4$$

$$OB = OC$$

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle DOC$ 中

$$\angle 1 = \angle 2$$

$$OB = OC$$

$$\angle AOB = \angle DOC$$

$$\triangle AOB \cong \triangle DOC$$

$$AO = DO$$

$$AO + OC = DO + OB$$

$$AC = DB$$

在 $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCB$ 中

$$AC = DB$$

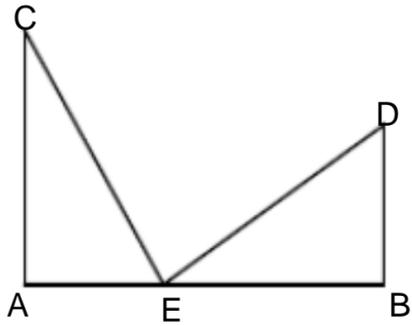
$$\angle 3 = \angle 4$$

$$BC = CB$$

$$\triangle ACB \cong \triangle DCB$$

$$AB=CD$$

48、(10分)如图,已知 $AC \perp AB$, $DB \perp AB$, $AC = BE$, $AE = BD$, 试猜想线段 CE 与 DE 的大小与位置关系, 并证明你的结论.



$CE > DE$ 。当 $\angle AEB$ 越小, 则 DE 越小。

证明:

过 D 作 AE 平行线与 AC 交于 F , 连接 FB

由已知条件知 $AFDE$ 为平行四边形, $ABEC$ 为矩形, 且 DFB 为等腰三角形。

在 $\triangle AEB$ 中, $\angle AEB$ 为锐角, 即 $\angle AEB < 90^\circ$

$$DF \parallel AE \quad \angle FDB = \angle AEB < 90^\circ$$

$$\text{在 } \triangle DFB \text{ 中 } \angle DFB = \angle DBF = (180^\circ - \angle FDB) / 2 > 45^\circ$$

在 $\triangle AFB$ 中, $\angle FBA = 90^\circ - \angle DBF < 45^\circ$

$$\angle AFB = 90^\circ - \angle FBA > 45^\circ$$

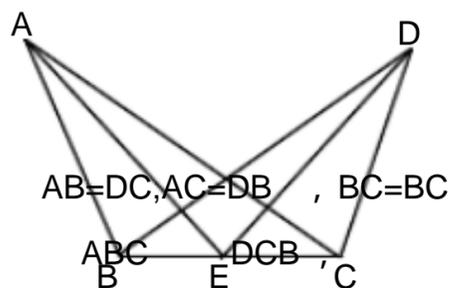
$$AB > AF$$

$$AB = CE \quad AF = DE$$

$$CE > DE$$



49、(10分)如图, 已知 $AB = DC$, $AC = DB$, $BE = CE$, 求证: $AE = DE$.



$$AB=DC, AC=DB, BC=BC$$

$$\triangle ABC \cong \triangle DCB$$

$$\angle ABC = \angle DCB$$

又 $BE=CE$, $AB=DC$

$$\triangle ABE \cong \triangle DCE$$

$$AE=DE$$

50. 如图 9 所示, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, AD 是 BC 边上的中线, 过 C 作 AD 的垂线, 交 AB 于点 E , 交 AD 于点 F , 求证: $\angle ADC = \angle BDE$.

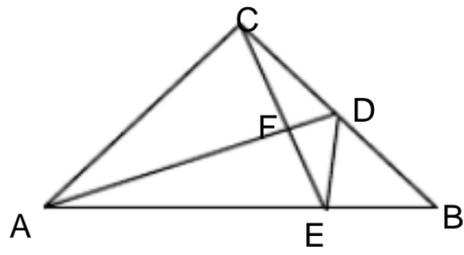


图 9

作 $CG \perp AB$, 交 AD 于 H ,

则 $\angle ACH = 45^\circ$ $\angle BCH = 45^\circ$

$\angle CAH = 90^\circ - \angle CDA$, $\angle BCE = 90^\circ - \angle CDA$ $\angle CAH = \angle BCE$

又 $AC = CB$, $\angle ACH = \angle B = 45^\circ$

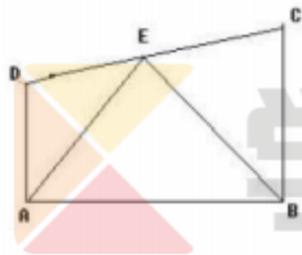
$\triangle ACH \cong \triangle CBE$, $CH = BE$

又 $\angle DCH = \angle B = 45^\circ$ $CD = DB$

$\triangle CFD \cong \triangle BED$

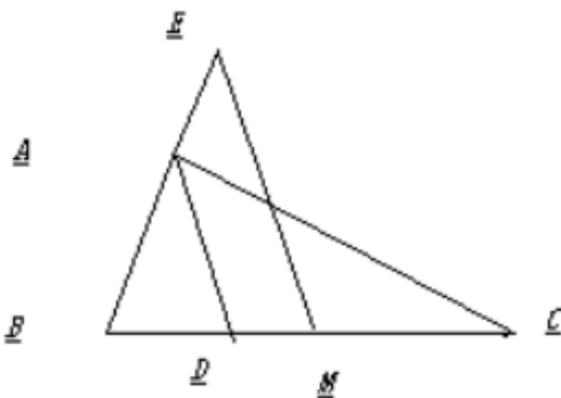
$AD = BE$

51. $AD \parallel BC$, AE 为角平分线平分 $\angle DAB$ 和 $\angle CBA$, 求证: $AB = AD + BC$, 要有两种解法。

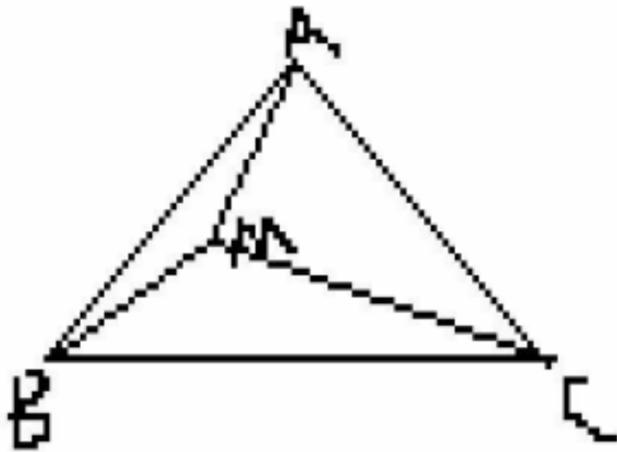


学而思 1对1

52. 在 $\triangle ABC$ 中 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线 M 是 BC 中点 过 M 作 $ME \parallel DA$, 与 BA, CA 延长线交于 E, F
求: $BE = CF$

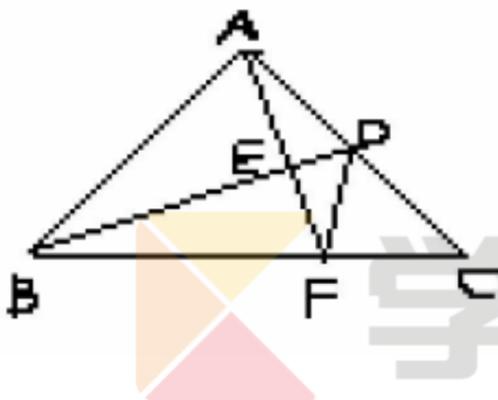


1. 已知等边三角形 ABC 内一点 M , 求证 AM, BM, CM 能构成个三角形 .(附图



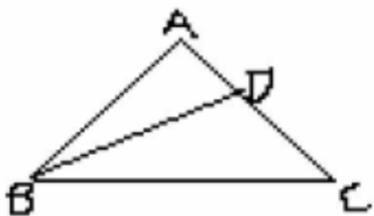
1) (附 1) (图不为准, 画图上画的, 但是是等边三角形)

2. 已知在等腰三角形 ABC 中, 角 BAC 是直角, D 是 AC 上一点, $AE \perp BD$, AE 的延长线交 BC 与 F , 若角 $ADB =$ 角 FDC , 求证: D 是 AC 的中点 .(附图 2)



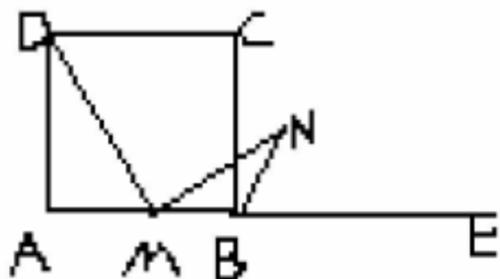
(附图 2)(图不为准, 画图画的)

3. 已知 ABC 中, $AB=AC$, $A=100^\circ$, B 的平分线交 AC 于 D , 求证: $AD+BD=BC$ (用截余法作辅助线)(附图 3).



(附图 3)(不为准)

4. 如图所示在 $ABCD$ 中, M 是 AB 的中点, $MN \perp MD$, BN 平分 $\angle CBE$, 求证: $MD=MN$.(附图 4)



图不为准, 附图 4, *BE 为 AB 的延长线 "

第一题 将 BMC 顺时针旋转 60° 使 BC 与 AC 重合 M 旋转至 M_1 的位置 链接 MM_1

易证 $MC=MM$ (因为 $\triangle MM_1$ 为正三角形) 且 $AM_1=BM$ 而 $\triangle AMM$ 为三角形 所以 AM, BM, CM 能构成三角形

补充回答：第二题 过 A 做 $AG \perp BC$ 于 G 交 BD 于 H 易证 $\angle GAF = \angle BDC$ 所以 $\angle ABD = \angle FAC$ 可得 $\triangle ABH \cong \triangle CAF$ 所以 $AH=CF$ 易证 $\triangle HAD \cong \triangle FCD$ 可得出结论

补充回答：第三题 在 BC 上截取 $BE=AB, BF=BD$ 连接 DE、DF

可证 $\triangle ABD \cong \triangle EBD$ 且 $\angle DFB = \angle FDB = 80^\circ, \angle C = 40^\circ = \angle CDF, \angle CFD = 100^\circ = \angle DEB$

所以 $\angle DFE = \angle DEF$ 且 $CF=DF$ 可得 $CF=DE=AD$ 得出结论

补充回答：问下 第四题 ABCD 为正方形么？

继续追问：第一题麻烦画作辅助线后的图啊！

补充回答：我不会画图 ...这样 你先以 CM 为一边 向 CM 上方做一个角等于 60° 在作出的那条边上 截取 $CM_1=CM$ 连接 AM_1 就作好了

继续追问：... b 汗,最后一道呢？

补充回答：第四题 初二学相似了么？

继续追问：没！

补充回答：没有啊 ...用相似很简单 ...我再想想吧

继续追问：努力啊！速度快点,我没时间了！

补充回答：设 MD=MN 过 N 作 $NP \perp AE$ 于 P

则 $\triangle DAM$ 不全等于 $\triangle MPN$

可得 B 不为 ME 中点

得出 $\angle NMB = \angle ADM$ 所以 $\angle NME$ 与 $\angle DMA$ 不互余 所以 $\angle DMN \neq 90^\circ$

与原题不符 所以假设不成立 所以 $MD \neq MN$

继续追问：第三题哪有 E 啊

补充回答：因为若 $\angle NMB = \angle ADM$ 那么 $NP=BP=1/2MP$ 则 B 就为 ME 中点了 而 B 不为 ME 中点 所以 $\angle NMB \neq \angle ADM$

补充回答：第三题 E 是作出来的 ...F 也是

