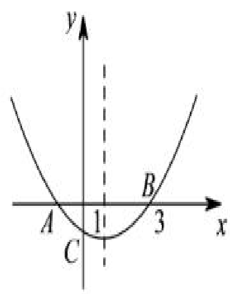
2017-12-8

如图，二次函数$y=ax^2+bx+c$图象的对称轴为直线$x=1$，图象过点$(3,0)$，若抛物线$y=ax^2+bx+c$的开口方向、开口大小与抛物线$y=\frac{1}{4}x^2$相同，抛物线与x轴交于A，B两点（点A在点B的左侧），与y轴的交点为C．



（1）求抛物线的解析式．

（2）设点P是抛物线对称轴上的一动点，求当$\triangle PAC$周长最小时点P的坐标．

（3）记抛物线的顶点坐标为D，在抛物线的对称轴上是否存在点M，使得$\triangle MBD$为等腰三角形？若存在，请求出符合条件的点M的坐标．若不存在，请说明理由．

（1）$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ ．

（2）$\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ ．

（2）由$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ 得$A(-1,0)$ ，$C(0,-\frac{3}{4})$ ．

点A与点B关于直线$x=1$对称，连接BC，则BC为$PA+PC$的最小值，

即当P为BC与对称轴交点时，$\triangle PAC$周长最小，此时点P的坐标为$\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ ．

（3）$D(1,-1)$ ，$B(3,0)$ ，

$\therefore BD=\sqrt{(3-1)^2+1^2}=\sqrt{5}$ ，

设$M(1,y)$ ，

当点D为等腰三角形顶点时，$MD=BD=\sqrt{5}$ ，

$\therefore |y+1|=\sqrt{5}$ ，

$\therefore y=\sqrt{5}-1$ 或$-\sqrt{5}-1$ ，

$\therefore M(1,\sqrt{5}-1)$ 或$(1,-\sqrt{5}-1)$ ．

当点B为顶点时，由对称性可得$M(1,1)$.

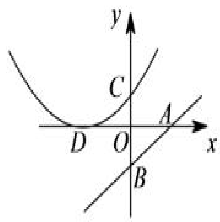
当点M为顶点时，$DM=BM$ ，

则$|y+1|=\sqrt{2^2+y^2}$ ，解得$y=\frac{3}{2}$ ，

$\therefore M(1,\frac{3}{2})$.

综上，$M(1,\sqrt{5}-1)$ ，$(1,-\sqrt{5}-1)$ ，$(1,1)$ ，$(1,\frac{3}{2})$.

如图，直线AB的函数表达式为$y=\frac{m}{4}x-m$（$m\neq 0$，m为常数），点A，B分别在x轴、y轴上，$\tan\angle OAB=\frac{3}{4}$，点$B$关于$x$轴的对称点为点$C$，以$D(-6,0)$为顶点的抛物线经过点$C$．



（1）求抛物线的解析式．

（2）在x轴上有点P，以点C，O，P为顶点的$\triangle COP$与$\triangle ABO$相似，请求出点P的坐标．

（3）动点Q在抛物线上，当点Q到直线AB的距离最小时，求出点Q的坐标及最小距离．

（1） $y=\frac{1}{12}+(x+6)^2$.

（2） $P\left(\frac{9}{4},0\right)$ ，$(4,0)$ ，$\left(-\frac{9}{4},0\right)$ ，$(-4,0)$.

（3） $Q(\frac{3}{2},\frac{27}{16})$ ，点Q到直线AB的最小距离为$\frac{93}{20}$.

（1）由直线AB：$y=\frac{m}{4}x-m$ ，

得$A(4,0)$ ，$B(0,-m)$ ，

$\therefore OA=4$ ，$OB=|m|$.

在$\mathrm{Rt}\triangle OAB$ 中，$\tan\angle OAB=\frac{3}{4}$ ，

$\therefore\frac{OB}{OA}=\frac{3}{4}$ ，则$OB=\frac{3}{4}\times4=3$ ，

$\therefore|m|=3$.

$\because$点B在y轴负半轴，

$\therefore m=3$ ，$B(0,-3)$ ，

$\therefore C(0,3)$ ，

设该抛物线$y=a(x+6)^2$ ，将$C(0,3)$代入，

得$36a=3$ ，解得$a=\frac{1}{12}$ ，

$\therefore$抛物线$y=\frac{1}{12}+(x+6)^2$.

（2）设$P(x,0)$ ，

①当$\triangle COP\backsim\triangle AOB$ 时，$\frac{OC}{OA}=\frac{OP}{OB}$ ，

则$\frac{3}{4}=\frac{|x|}{3}$ ，解得$x=\pm\frac{9}{4}$ ，

$\therefore P\left(\frac{9}{4},0\right)$或$\left(-\frac{9}{4},0\right)$.

① 当$\triangle POC\backsim\triangle AOB$ 时，$\frac{OP}{OA}=\frac{OC}{OB}$ ，

则$\frac{|x|}{4}=\frac{3}{3}$ ，$\therefore x=\pm4$ ，

$\therefore P(4,0)$或$(-4,0)$.

综上，$P\left(\frac{9}{4},0\right)$ ，$(4,0)$ ，$\left(-\frac{9}{4},0\right)$ ，$(-4,0)$.

（3）如图，抛物线上Q和C两点，

它们到AB的距离分别为QE，CF，

其中$QM//y$轴，

$\therefore \angle MQE=\angle BCF=90^\circ-\angle CBF=\angle BAO$，

在$\mathrm{Rt}\triangle ABO$中，

$\because OA=4$，$OB=3$，

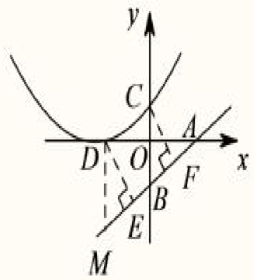
$\therefore AB=5$，

$\therefore \cos\angle BAO=\frac{OA}{AB}=\frac{4}{5}$，

$\therefore \cos\angle MQE=\frac{QE}{QM}=\frac{4}{5}$，

$\therefore QE=\frac{4}{5}QM$，

$\therefore$当QM达到最小时，QE有最小值．



设$Q(x,y)$，则$M\left(x,\frac{3}{4}x-3\right)$，

$\therefore QM=y-\left(\frac{3}{4}x-3\right)$

$=\frac{1}{12}(x+6)^2-\frac{3}{4}x+3$

$=\frac{1}{12}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{93}{16}$，

$\therefore$当$x=-\frac{3}{2}$时，$QM=$的值最小，

此时$Q(\frac{3}{2},\frac{27}{16})$，$QM$最小值为$\frac{93}{16}$，

$\therefore QE$的最小值为$\frac{93}{16}\times\frac{4}{5}=\frac{93}{20}$．