四、等体积法及线面角

一、等体积法

1、求内切球半径

若一个多面体的各面都与一个球的球面相切， 则称这个多面体是这个球的外切多面体，这个球是这个多面体的内切球。

1）内切球球心到多面体各面的距离均相等，外接球球心到多面体各顶点的距离均相等。

2）正多面体的内切球和外接球的球心重合。

3）正棱锥的内切球和外接球球心都在高线上，但不重合。

4）基本方法：构造三角形利用相似比和勾股定理。

5）体积分割是求内切球半径的通用做法。

棱锥的内切球：将内切球的球心与棱锥的各个顶点相连，将棱锥分割为以原棱锥的面为底面，内切球的半径为高，根据分割前后的体积不变，列出关于R的方程，若棱锥的表面积为S,体积为V，则内切球的半径为$R=\frac{3V}{S}$

【例一】正四棱锥$S-ABCD$,底面边长为2，侧棱长为3.则内切球的半径为__________.

【答案】设内切球的半径为 r,则正四棱锥 $S-ABCD$,底面边长为 2 ,侧棱长为 3,高为 $\sqrt{7}$,斜高为 $2\sqrt{2}$

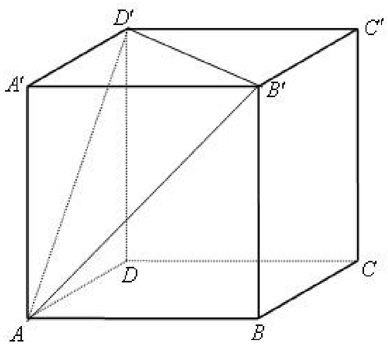
运用分割思想,可得即 $\frac{1}{3}\times\sqrt{7}\times 2^2=\frac{1}{3}r\left(4\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}+4\right)$,

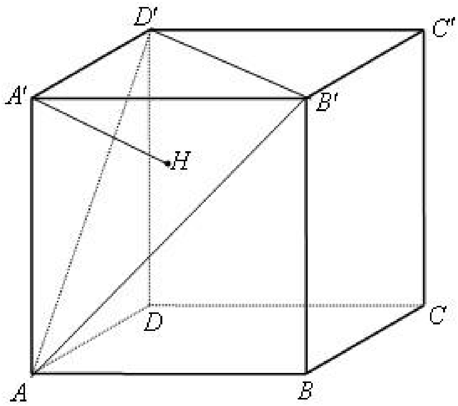
$\therefore r=\frac{4\sqrt{7}}{8\sqrt{2}+4}=\frac{2\sqrt{14}-\sqrt{7}}{7}$ ，　　　.

2、求点到面的距离

用等体积法求点到平面的距离主要是一个转换的思想，即要将所要求的垂线段置于一个四面体中，其中四面体的一个顶点为所给点，另外三点位于所给点射影平面上，这里不妨将射影平面上的三点构成的三角形称为底面三角形。先用简单的方法求出四面体的体积，然后计算出底面三角形的面积，再根据四面体体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$ 求出点到平面的距离 h 。

【例二】所示的正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 棱长为 a ，求点 A' 到平面 $AB'D'$ 的距离





【答案】(等体积法)：如图所示，作 $A'H$ 垂直于平面 $AB'D'$ 于点 H，则 $A'H$ 长度为所求。对于四面体 $A'AB'D'$，易见底面 $AB'D'$ 的高为 $A'H$，底面 $A'B'D'$ 的高为 AA'。对四面体 $A'AB'D'$ 的体积而言有：

$$V_{A-A'B'D'}=V_{A'-AB'D'}$$

即有：$\frac{1}{3}AA'\times S_{\Delta A'B'D'}=\frac{1}{3}A'H\times S_{\Delta AB'D'}$，也即：$A'H=\frac{AA'\times S_{\Delta A'B'D'}}{S_{\Delta AB'D'}}$

由 $AB'=B'D'=D'A=\sqrt{2}a$，从而 $\Delta AB'D'$ 为正三角形，$\angle AB'D'=60^0$，进而可求得

$$S_{\Delta AB'D'}=\frac{1}{2}AB'\times AD'\sin\angle AB'D'=\frac{1}{2}(\sqrt{2}a)^2\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

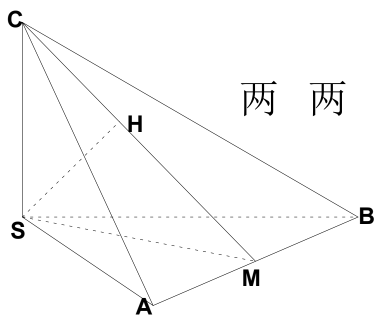
又易计算得到 $Rt\Delta A'B'D'$ 的面积为 $S_{\Delta A'B'D'}=\frac{1}{2}a^2$

所以 $A'H=\frac{AA'\times S_{\Delta A'B'D'}}{S_{\Delta AB'D'}}=\frac{a\times\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

二、线面角

1、直接法 ：平面的斜线与斜线在平面内的射影所成的角即为直线与平面所成的角。通常是解由斜线段，垂线段，斜线在平面内的射影所组成的直角三角形，垂线段是其中最重要的元素，它可以起到联系各线段的作用。

【例三】如图四面体 $S-ABC$ 中，SA,SB,SC 两 两 垂



直，$\angle SBA=45^\circ$，$\angle SBC=60^\circ$，M 为 AB 的中点，求：

（1）BC 与平面 SAB 所成的角

（2）SC 与平面 ABC 所成的角。

【答案】（1）$\because SC\perp SB, SC\perp SA$

$\therefore SC\perp$ 平面 SAB 故 SB 是斜线 BC 在平面 SAB 上的射影，

$\therefore \angle SBC$ 是直线 BC 与平面 SAB 所成的角为 60°。

（2）连结 SM, CM，则 $SM\perp AB$，

又 $\because SC\perp AB$，$\therefore$ $\therefore AB\perp$ 平面SCM，

$\therefore$ 面$ABC\perp$ 面SCM

过 S 作 $SH\perp CM$ 于 H，则 $SH\perp$ 平面ABC

$\therefore CH$ 即为 SC 在面 ABC 内的射影。

$\angle SCH$ 为 SC 与平面 ABC 所成的角。

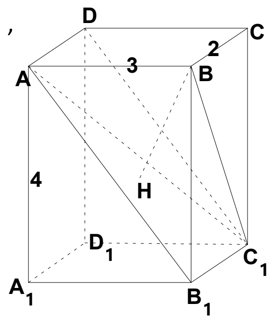
$\sin\angle SCH=\dfrac{SH}{SC}$

$\therefore SC$ 与平面 ABC 所成的角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

2. 利用公式 $\sin\theta=\dfrac{h}{l}$

其中 θ 是斜线与平面所成的角，h 是垂线段的长，l 是斜线段的长，其中求出垂线段的长（即斜线上的点到面的距离）既是关键又是难点，为此可用三棱锥的体积自等来求垂线段的长。

【例四】 如下图长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=3$，$BC=2$ $AA_1=4$，求 AB 与面 AB_1C_1D 所成的角的



正弦值。

解：设点 B 到 AB_1C_1D 的距离为 h，

因为三棱锥 ABB_1C_1 的体积是不变的 $\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle AB_1C_1}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle BB_1C_1}\cdot AB$，易得 $h=\frac{12}{5}$

设 AB 与 面 AB_1C_1D 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{h}{AB}=\frac{4}{5}$