一、立体几何之体积求解

1. 规则空间几何体的体积

（1）柱体（棱柱，圆柱）体积公式：$V_{柱体}=Sh$，其中S为底面积，h为高；

（2）棱体（棱锥，圆锥）的体积公式：$V_{棱体}=\frac{1}{3}Sh$，其中S为底面积，h为高；

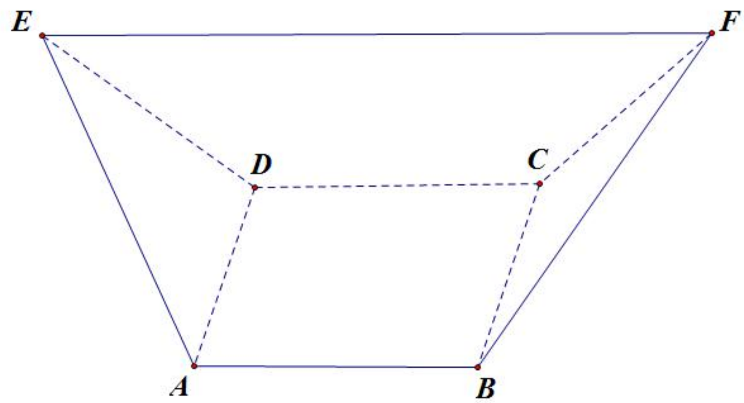
（3）台体（棱台，圆台）的体积公式：$V_{台体}=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S')$，其中$S',S$分别是台体上，下底面的面积，$h$为台体的高；

（4）球的体积：$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$，R为球的半径.

2. **不规则空间几何体**：若所给几何体的体积不能直接利用公式得出，则常用等积法、分割法、补形法进行求解.

（1）分割法

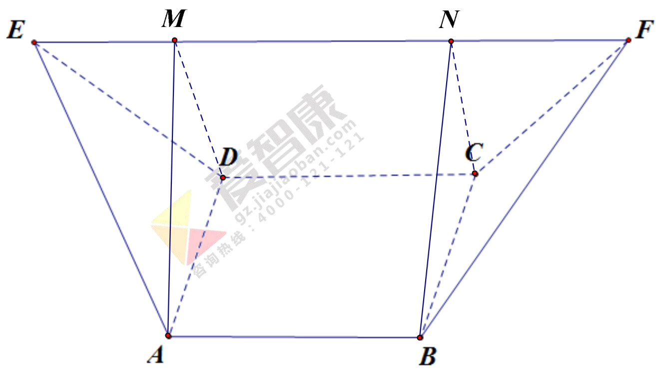
【例题 1】　如右图，多面体$ABCDEF$中，已知$ABCD$是边长为 1 的正方形，且三角形ADE，BCF均为等边三角形，$EF /\!/ AB$，$EF=2$，则该多面体的体积.



【解析】

过 AD 做底面 $ABCD$ 垂直的平面交 EF 于 M 点，过 BC 做底面 $ABCD$ 垂直的平面交 EF 于 N 点

则对面体 $ABCDEF$ 被分为三棱锥 $E-ADM$,三棱柱 $ADM-BCN$，三棱锥 $F-BCN$ 三个部分。



由题意可知：

$EM=NF=\frac{1}{2}$，$MN=1$

在等腰三角形 AMD 中，

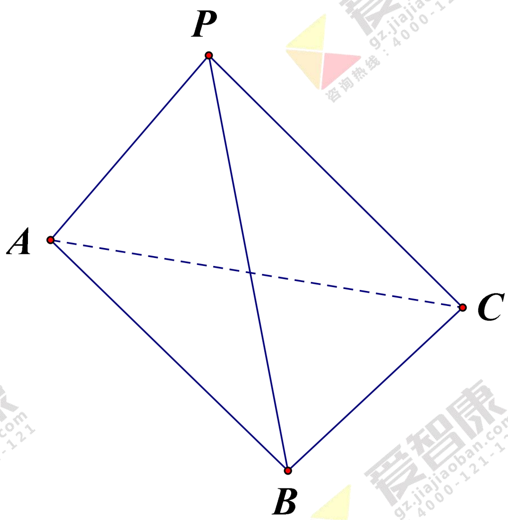
$AM=DM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AD=1$，易得 $S_{\triangle ADM}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$V_{E-ADM}=\frac{1}{3}S_{\triangle ADM}\bullet EM=\frac{\sqrt{2}}{24}$，$V_{ADM-BCN}=S_{\triangle ADM}\bullet MN=\frac{\sqrt{2}}{4}$

所以 $V_{ABCDEF}=V_{E-ADM}+V_{ADM-BCN}+V_{F-BCN}=\frac{\sqrt{2}}{24}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{24}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

（2）补形法

【例题 2】　已知三棱锥 $P-ABC$，$PA=BC=5$，$PB=AC=\sqrt{34}$，$PC=AB=\sqrt{41}$，求三棱锥 $P-ABC$ 的体积



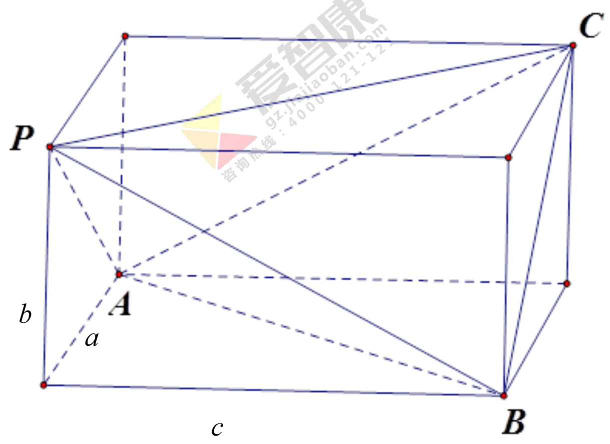
【解析】

由于三棱锥$P-ABC$的相对棱长相等，可将$P-ABC$补形成如图所示的长方体

则$\begin{cases} a^2+b^2=25 \\ a^2+c^2=34 \\ c^2+b^2=41 \end{cases}$，解得$a=3,b=4,c=5$

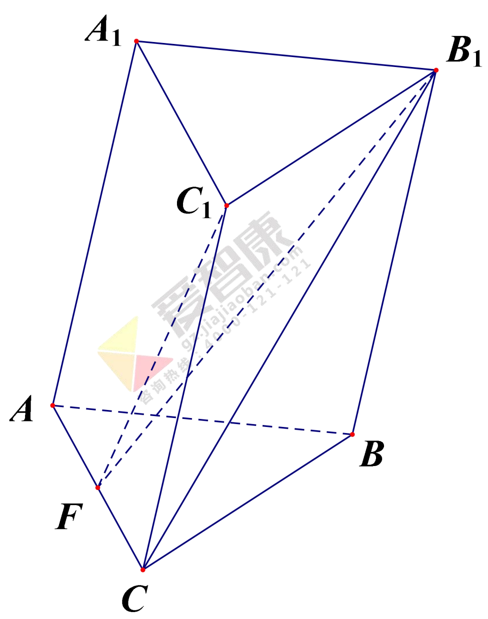
则

$V_{P-ABC}=V_{长方体}-4V_{锥体}=3\times4\times5-4\times$



（3）等体积转化法

如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为V，F分别为AC的中点，求三棱锥C_1-B_1FC的体积



【解析】假设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h

三棱锥换顶点可得到 $V_{C_1-B_1FC}=V_{B_1-C_1FC}$

由于 $BB_1//$ 平面 FCC_1，B 点与 B_1 点到平面 FCC_1 的距离相等

所以 $V_{B_1-C_1FC}=V_{B-C_1FC}$

$V_{B-C_1FC}=V_{C_1-BFC}=\frac{1}{3}S_{\triangle FBC}\cdot h=\frac{1}{6}S_{\triangle ABC}\cdot h=\frac{1}{6}V$