2016~2017学年北京丰台区初二上学期期末数学试卷

一、选择题（本题共30分，每小题3分）

1. 如果二次根式$\sqrt{x-1}$成立，那么x的取值范围是（　）．

A. $x \geqslant 0$　　B. $x > 0$　　C. $x \geqslant 1$　　D. $x \neq 1$

答案　C

解析　二次根式有意义的条件是$x-1 \geqslant 0$，故$x \geqslant 1$，即x的取值范围是$x \geqslant 1$．

2. 京剧被誉为我国国粹，为传承民族文化，丰台区某中学开展了“京剧进课堂”的实践活动，学生们制作了各式各样的脸谱．下列脸谱中，不是轴对称图形的是（　）．

A. 
B. 
C. 
D. 

答案　D

解析　由轴对称图形的性质可知，D不是轴对称图形．

3. 4的平方根是（　）．

A. ± 2　　B. 2　　C. -2　　D. $\pm\sqrt{2}$

答案　A

解析　4的平方根是± 2．

4. 下列是随机事件的是（　）．

A. 2017年2月18日是我国二十四节气中的“雨水”节气，这一天会下雨

B. 某班级15名学生中，至少有两名同学的生日在同一个月份

C. 用长度分别为2cm，3cm，6cm的细木条首尾相连组成一个三角形

D. 从分别写有π，$\sqrt{2}$，$0.1010010001...$（两个1之间依次多一个0）三个数字的卡片中随机抽出一张，卡片上的数字是无理数

答案 A

解析 A、是否下雨为随机事件；

B、15名学生中，至少有两名同学的生日在同一个月份为必然事件；

C、$2+3<6$，故用长度分别为2cm，3cm，6cm的细木条首尾相连组成一个三角形是不可能事件；

D、π，$\sqrt{2}$，$0.1010010001...$均是无理数，故随机抽出一张是无理数是必然事件．

故答案为A．

5. 下列式子为最简二次根式的是（ ）．

A. $\sqrt{\frac{1}{3}}$　　B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$　　C. $\sqrt{8}$　　D. $\sqrt{10}$

答案 D

解析 A、$\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故不是最简二次根式；

B、$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故不是最简二次根式；

C、$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，故不是最简二次根式；

故答案为D．

6. 如果等腰三角形的一个角为40°，那么这个等腰三角形的顶角的度数为（ ）．

A. 40°　　B. 100°　　C. 40°或70°　　D. 40°或100°

答案 D

解析 该角可能为等腰三角形的顶角或底角，

当为底角时，顶角为$180^\circ-40^\circ\times 2=100^\circ$，

故这个等腰三角形的顶角的度数为40°或100°．

7. 计算$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$的结果是（ ）．

A. -1　　B. 1　　C. -5　　D. 5

答案 B

解析 $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-(\sqrt{3})^2=1$．

8. 下列各式从左到右的变形正确的是（　）．

A. $\frac{-x+y}{x-y}=-1$　　B. $\frac{x}{y}=\frac{x+1}{y+1}$　　C. $\frac{x}{x+y}=\frac{1}{1+y}$　　D. $\left(-\frac{3x}{y}\right)^2=\frac{3x^2}{y^2}$

答案　A

解析　A、$\frac{-x+y}{x-y}=-\frac{x-y}{x-y}=-1$，故A正确；

B、$\frac{x}{y}\neq\frac{x+1}{y+1}$，故B错误；

C、$\frac{x}{x+y}=\frac{1}{1+y}$仅在$x=1$时成立，故C错误；

D、$\left(-\frac{3x}{y}\right)^2=\frac{9x^2}{y^2}\neq\frac{3x^2}{y^2}$，故D错误．

故答案为A．

9. 如图，液晶电视的尺寸是指液晶电视屏幕的对角线的长度．小志家乔迁新居，准备购买一台液晶电视．设计师建议根据他家背景墙的大小及观看距离，液晶电视的长度不超过90cm，宽度不超过50cm．请你参考“液晶电视尺寸对照表”，通过估算，帮助小志家选择尽可能大的液晶电视，那么液晶电视的尺寸是（　）．

液晶电视尺寸对照表

尺寸（英寸）	屏幕的对角线长度（厘米）
34	86.36
37	93.98
40	101.60
42	106.68

A. 34　　B. 37　　C. 40　　D. 42

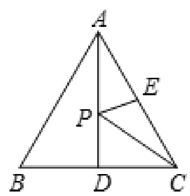
答案　C

解析　由勾股定理可得，屏幕对角线长为$\sqrt{90^2+50^2}=10\sqrt{106}$cm，

$\because 10.16<\sqrt{106}<10.668$，

$\therefore$按题意应选择的电视尺寸为40寸．

10. 如图，等边$\triangle ABC$的边长为6，AD是BC边上的中线，点E是AC边上的中点．如果点P是AD上的动点，那么$EP+CP$的最小值为（　）．



A. 3　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $3\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{5}$

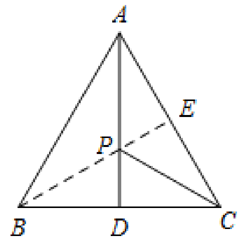
答案　C

解析　$\because AD$是BC边上的中线，$\triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore CP=BP$，

连接BE，此时$EP+CP$的最小是为BE，

$BE=3\sqrt{3}$．



二、填空题（本题共18分，每小题3分）

11. 计算：$\sqrt{18}\times\sqrt{\frac{1}{3}}=$______．

答案　$\sqrt{6}$

解析　$\sqrt{18}\times\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{6}$．

12. “神舟”十一号飞船圆满完成了我国第六次载人飞行任务，创造了我国航天员太空驻留新纪录，标志着我国航天工程取得新的重大进展．请你观察“神舟”十一号飞船的发射架，上面有许多焊接成三角形的图形．为什么要焊接成这样的形状呢？理由是______．

答案　三角形具有稳定性

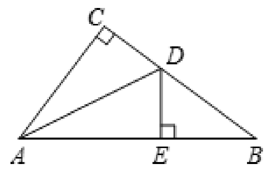
解析　三角形具有稳定性．

13. 一个不透明的盒子中装有6张十二生肖邮票，其中有3张“猴票”，2张“鸡票”和1张“狗票”，这些邮票除了画面内容外其他都相同，从中随机摸出一张邮票，恰好是“猴票”的可能性为______．

答案　$\frac{1}{2}$

解析　随机摸出一张邮票，恰好是“猴票”的可能性为$\frac{3}{3+2+1}=\frac{1}{2}$．

14. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90^{\circ}$，AD是角平分线，$DE\perp AB$于点E，如果$DE=3\mathrm{cm}$，$BE=4\mathrm{cm}$，那么$BC=$ ______ cm．



答案　8

解析　在$\mathrm{Rt}\triangle BDE$中，$BD=\sqrt{DE^{2}+BE^{2}}=5\mathrm{cm}$，

$\because AD$是角平分线，

$\therefore \angle CAD=\angle EAD$，

$\because \angle C=\angle DEA=90^{\circ}$，$AD=AD$，

$\therefore \triangle CAD\cong\triangle EAD$，

$\therefore CD=DE=3\mathrm{cm}$，

$\therefore BC=CD+BD=8\mathrm{cm}$．

15. 小明在学习分式运算过程中，计算$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}$的解答过程如下：

解：$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}$

$=\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}-\frac{x+2}{(x-2)(x+2)}$　①

$=(x-2)-(x+2)$　②

$=x-2-x-2$　③

$=-4$．　④

李老师批阅小明的解答过程，并和小明交流了计算过程中出现的错误. 请你指出小明解答过程中的错误出现在第 ______ 步（写出对应的序号即可），错误的原因是 ______ ，请将该步改写正确： ______ ．

答案　1．②

2．去分母

3．$\frac{(x-2)-(x+2)}{(x+2)\,(x-2)}$

解析　根据分式的运算过程可知．

16. 图1是以a，b，c为边的直角三角形，图2是用这样的4个全等的直角三角形拼出的一个大正方形，这就是著名的“赵爽弦图”.赵爽利用这个图形证明了勾股定理. 请你写出一个用a，b，c表达图2全部含义的等式： ______ ．

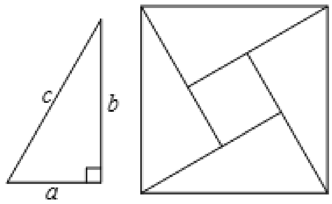


图 1　　图 2

答案　$c^2=4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2$

解析　根据四边形的面积公式计算可得．

三、解答题（本题共52分，其中第17，18题每题4分，第19-22题每题5分，第23-26题每题6分）

17. 计算：$\sqrt[3]{27}+|1-\sqrt{3}|-\sqrt{12}$．

答案　$2-\sqrt{3}$．

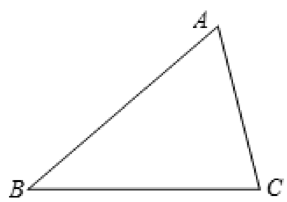
解析　原式$=3+(\sqrt{3}-1)-2\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$．

18. 计算：$\frac{a^2+a}{a^2-2a+1}\div\frac{a+1}{a-1}$．

答案　$\frac{a}{a-1}$．

解析　原式$=\frac{a(a+1)}{(a-1)^2}\cdot\frac{a-1}{a+1}=\frac{a}{a-1}$．

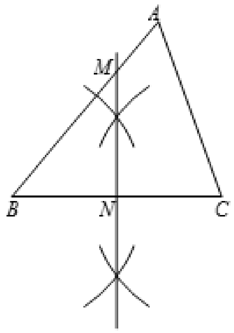
19. 如图，已知$\triangle ABC$．



（1）用尺规作BC边上的垂直平分线交AB于点M，交BC于点N．（保留作图痕迹，不要求写作法）

答案　作图见解析．

解析　如图：MN为所求．



（2）你作图的依据是_________．

答案　到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上；两点确定一条直线．

解析　到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上；两点确定一条直线．

20. 解方程：$\frac{x}{x-1}-\frac{3}{x+1}=1$．

答案　$x=2$是原分式方程的解．

解析　方程两边同乘$(x-1)(x+1)$，得$x(x+1)-3(x-1)=(x-1)(x+1)$，

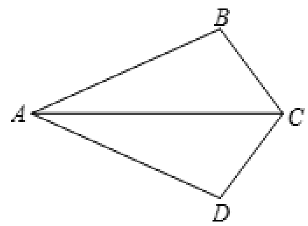
化简，得$x-3x+3=-1$，

解得$x=2$，

检验：当$x=2$时，$(x-1)(x+1)\neq 0$，

$\therefore x=2$是原分式方程的解．

21. 已知：如图，$\angle BAC=\angle DAC$．请你添加一个条件_________，使得$\triangle ABC\cong\triangle ADC$，并加以证明．



答案　答案不唯一．示例：添加：$\angle B=\angle D$，证明见解析．

解析　证明：在$\triangle ABC$和$\triangle ADC$中，

$$\begin{cases}\angle BAC=\angle DAC\\ \angle B=\angle D\\ AC=AC\end{cases},$$

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle ADC$（AAS）．

22. 已知$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}\neq 0$，求代数式$\frac{5a-2b}{a^2-4b^2}\cdot(a-2b)$的值．

答案 $\frac{1}{2}$．

解析 原式$=\frac{5a-2b}{(a+2b)(a-2b)}\cdot(a-2b)$

$=\frac{5a-2b}{a+2b}$．

$\because\frac{a}{2}=\frac{b}{3}\neq0$，

$\therefore3a=2b$．

$\therefore$原式$=\frac{5a-3a}{a+3a}=\frac{2a}{4a}=\frac{1}{2}$．

23. 某校组织八年级学生到离学校$8\mathrm{km}$的军事博物馆参观纪念长征胜利80周年主题展览．一部分学生骑自行车前往，另一部分学生在骑自行车的学生出发$20\ \mathrm{min}$后，乘坐汽车沿相同路线行进，结果骑自行车的学生与乘汽车的学生同时到达目的地．已知汽车速度是自行车速度的3倍，求自行车和汽车的速度．

答案 自行车和汽车的速度分别是$16\mathrm{km/h}$和$48\mathrm{km/h}$．

解析 设自行车的速度是$x\mathrm{km/h}$，则汽车的速度是$3x\mathrm{km/h}$，

根据题意，得$\frac{8}{x}-\frac{8}{3x}=\frac{20}{60}$，

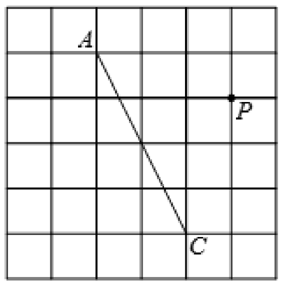
解这个方程，得$x=16$，

经检验，$x=16$是所列方程的解，并且符合实际问题的意义．

当$x=16$时，$3x=3\times16=48$．

答：自行车和汽车的速度分别是$16\mathrm{km/h}$和$48\mathrm{km/h}$．

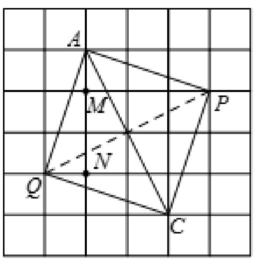
24. 如图，正方形网格中的每个小正方形的边长都是1，每个小正方形的顶点叫做格点，线段AC的两个端点均在格点上．



（1）如图，点P在格点上，在图中画出点P关于直线AC的对称点Q，连接AQ，QC，CP，PA，并直接写出四边形$AQCP$的周长．

答案 画图见解析，四边形AQCP的周长为$4\sqrt{10}$．

解析



（2）判断$\angle QAP$的度数，并写出求$\angle QAP$度数的思路．

答案　思路见解析，$\angle QAP$的度数为90°．

解析　分析思路：

方法一：

（1）由点A，P，Q都是格点，每个小正方形边长都是1，由勾股定理可知，$AP=\sqrt{10}$，$AQ=\sqrt{10}$，$PQ=2\sqrt{5}$；

（2）由$AP^2+AQ^2=20$，$PQ^2=20$，可得$AP^2+AQ^2=PQ^2$，

根据勾股定理逆定理可得$\angle QAP$为90°．

方法二：

（1）如图，设格点M，N，由点A，P，Q也是格点，每个小正方形边长都是1，可知，

$AM=QN=1$，$PM=AN=3$，$\angle AMP=\angle QNA=90^\circ$；

（2）从而可以推出$\triangle AMP\cong\triangle QNA$，所以$\angle APM=\angle QAN$；

（3）由$\triangle AMP$中，$\angle APM+\angle MAP=90^\circ$可知，$\angle QAN+\angle MAP=90^\circ$，即$\angle QAP$为$90^\circ$．

25. 对于一类特殊的二次根式，它的被开方数由整数与分数的和构成，且将根号内的整数直接移到根号外面，所得的结果不变，我们把反映上述相等关系的式子叫做“和谐等式”．

如$\sqrt{2+\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$，$\sqrt{3+\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$，$\sqrt{4+\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$等都是“和谐等式”．

（1）请写出一个与上面的式子不同的“和谐等式”．

答案　$\sqrt{5+\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}}$．

解析　答案不唯一，根据定义即可．

（2）如果n为整数，且$n>1$，请用含n的式子表示“和谐等式”，并加以证明．

答案　证明见解析．

解析　$\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$（$n>1$，且$n$为整数）．

证明：$\because$左边$=\sqrt{\frac{n(n^2-1)+n}{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n^3}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=$右边，

$\therefore$等式成立．

26. 课堂上，老师提出问题：

已知：如图1，在$\triangle ABC$中，$\angle A$是锐角，$AB=AC$，点D，E分别在AC，AB上，BD与CE相交于点O，且$\angle DBC=\angle ECB=\frac{1}{2}\angle A$．

（1）写出图1中与$\angle A$相等的角，并加以证明；

（2）判断BE与CD之间的数量关系，并说明理由．

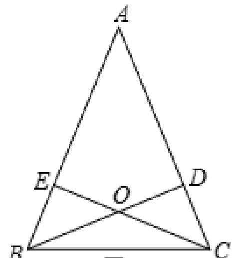


图 1

小丽首先通过观察、度量，找到了与$\angle A$相等的角，并利用三角形外角的性质证明了结论的正确性；她又利用全等三角形的知识，得到了$BE=CD$．

小丽继续思考，提出新问题：如果$AB\neq AC$，其他条件不变，那么上述结论是否仍然成立？

同学们画出图2，通过分析得到猜想：当$AB\neq AC$时，上述结论仍然成立.

同学们发现，第（1）问结论的证明方法与$AB=AC$时的证明方法完全一致；又通过讨论，形成了证明第（2）问结论的几种想法：

想法1：在OE上取一点F，使得$OF=OD$，从而可得$\triangle OBF\cong\triangle OCD$，要证明$BE=CD$，只需证$BE=BF$即可．

想法2：在OD的延长线上取一点M，使得$OM=OE$，从而可得$\triangle OBE\cong\triangle OCM$，要证明$BE=CD$，只需证$CD=CM$即可．

想法3：分别过点B，C作OE和OD的垂线段BP，CQ，可得$\triangle OBP\cong\triangle OCQ$，要证明$BE=CD$，只需再证明$\triangle BEP\cong\triangle CDQ$即可．

......

请你参考上面的材料，解决下列问题：

（1）直接写出图2中与$\angle A$相等的一个角．

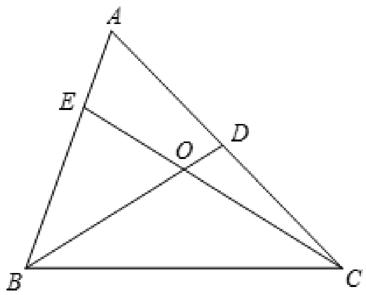


图2

答案　$\angle COD$或者$\angle BOE$．

解析　$\because\angle DBC=\angle ECB$，

$\therefore\angle DOC=\angle EOB=2\angle DBC=\angle A$．

（2）请你在图2中，帮助小丽证明$BE=CD$．（一种方法即可）

答案　证明见解析．

解析　如图，在OE上取一点F，使得$OF=OD$，

$\because\angle DBC=\angle ECB=\dfrac{1}{2}\angle A$，

$\therefore OB=OC$,

$\because \angle 1=\angle 2$,

$\therefore \triangle OBF \cong \triangle OCD$ (SAS) .

$\therefore BF=CD$, $\angle 3=\angle 4$.

$\because \angle 6=\angle ECB+\angle CBF=\angle ECB+\angle DBC+\angle 3$

$=\dfrac{1}{2}\angle A+\dfrac{1}{2}\angle A+\angle 3=\angle A+\angle 3$,

$\angle 5=\angle A+\angle 4$,

$\therefore \angle 5=\angle 6$.

$\therefore BE=BF$.

$\therefore BE=CD$.