



2015 年北京市春季普通高中会考

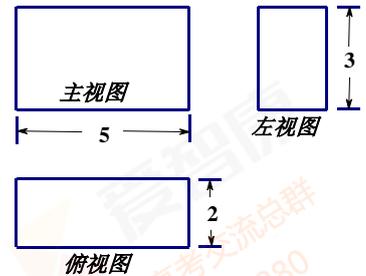
数学试卷

考生 须知	1. 考生要认真填写考场号和座位序号。 2. 本试卷共4页,分为两部分,第一部分选择题,20个小题(共60分);第二部分非选择题,二道大题(共40分)。 3. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效。第一部分必须用2B铅笔作答;第二部分必须用黑色的签字笔作答。 4. 考试结束后,考生应将试卷、答题卡及草稿纸放在桌面上,待监考员收回。
----------	--

第一部分 选择题 (每小题3分,共60分)

一、在每个小题给出的四个备选答案中,只有一个是符合题目要求的。

- 已知集合 $A = \{3, 5, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, 那么 $A \cup B$ 等于 ()
 A. $\{1, 3, 5, 6, 8\}$ B. $\{6, 8\}$ C. $\{3, 5\}$ D. $\{1, 6, 8\}$
- 平面向量 a, b 满足 $b = 2a$ 如果 $a = (1, 1)$, 那么 b 等于 ()
 A. $-(2, 2)$ B. $(-2, -2)$ C. $(2, -2)$ D. $(2, 2)$
- 已知函数 $f(x) = \lg(x-1)$, 那么 $f(x)$ 的定义域是 ()
 A. R B. $\{x | x > 1\}$ C. $\{x | x \neq 1\}$ D. $\{x | x \neq 0\}$
- 一个几何体的三视图如图所示, 该集合体的体积是 ()
 A. 30 B. 40 C. 50 D. 60
- 如果 $a > 0$, 那么 $a + \frac{1}{a} + 2$ 的最小值为 ()
 A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. 4
- 已知过两点 $A(-1, 1), B(4, a)$ 的直线斜率为1, 那么 a 的值是 ()
 A. -6 B. -4 C. 4 D. 6
- $\tan \frac{5\pi}{6}$ 等于 ()
 A. -1; B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; D. 1.





8. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 的图像是一条连续不断的曲线, 且有部分对应值如表所示, 那么函数 $f(x)$ 一定存在零点的区间是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(1, 2)$ C. $(2, 3)$ D. $(3, +\infty)$

x	1	2	3
$f(x)$	$-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$

9. 函数 $y = \frac{1}{x}$, $y = x^2$, $y = 3^x$, $y = \log_2 x$ 中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减的是 ()

- A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = x^2$ C. $y = 3^x$ D. $y = \log_2 x$

10. 已知直线 $x - y - 2 = 0$ 与直线 $mx + y = 0$ 垂直, 那么 m 的值是 ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

11. 在同一坐标系中, 函数 $y = 3^x$ 的图与 $y = (\frac{1}{3})^x$ 的图象 ()

- A. 关于 x 轴对称; B. 关于 y 轴对称;
C. 关于原点 $y = x$ 对称; D. 关于直线 $y = x$ 对称.

12. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_4 = 8$, 那么 $\{a_n\}$ 的前 5 项和是 ()

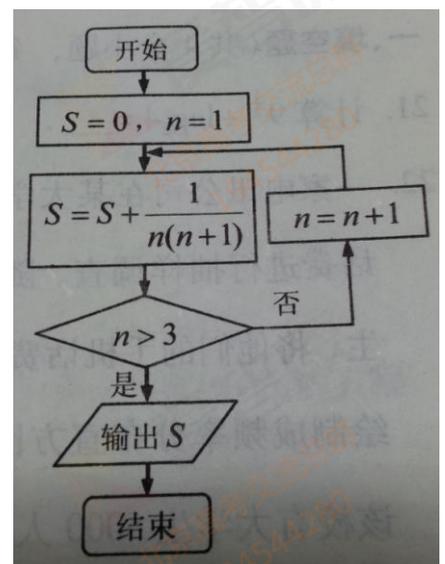
- A. -31 B. 15 C. 31 D. 63

13. 已知实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} x - y - 2 \leq 0 \\ x + y + 2 \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$, 那么目标函数 $z = x + 2y$ 的最小值是 ()

- A. -6 B. -4 C. -2 D. 4

14. 某程序框图如图所示, 执行该程序后输出的 S 的值是 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{5}{6}$



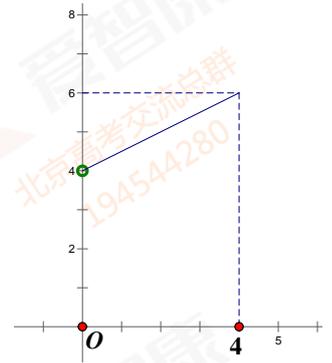
15. 函数 $y = (\sin x + \cos x)^2$ 的最小正周期是: ()

- A. $\frac{\pi}{2}$; B. π ; C. $\frac{3\pi}{2}$; D. 2π .



16. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[-4,0) \cup (0,4]$ 上的奇函数, 当时, $f(x)$ 的图像如图所示, 那么 $f(x)$ 的值域是 ()

- A. $(-4,4)$ B. $[-6,6]$
C. $(-4,4) \cup (4,6]$ D. $[-6,-4) \cup (4,6]$



17. 边长为 2 的正三角形的顶点和各边的中点共 6 个点, 从中任选两点, 所选出的两点之间距离大于 1 的概率是 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

18. 设 a, b 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 给出下列四个命题:

16 题

- ① 如果 $a \parallel \alpha, b \parallel \alpha$, 那么 $a \parallel b$; ② 如果 $a \parallel \beta, a \subset \alpha, b \subset \beta$, 那么 $a \parallel b$;
③ 如果 $\alpha \perp \beta, a \subset \alpha$, 那么 $a \perp \beta$; ④ 如果 $a \perp \beta, a \parallel b, b \subset \alpha$, 那么 $\alpha \perp \beta$

其中正确命题的序号是 ()

- A. ① B. ② C. ③ D. ④

19. 在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $AB = 5, AC = 3, BC = 4$, 那么角 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 等于: () A. 9; B. 12;
C. 15; D. 20.

20. 已知函数 $f(x) = |ax - 1|$ 与 $g(x) = (a - 1)x$ 的图像没有交点, 那么实数的取值范围是 ()

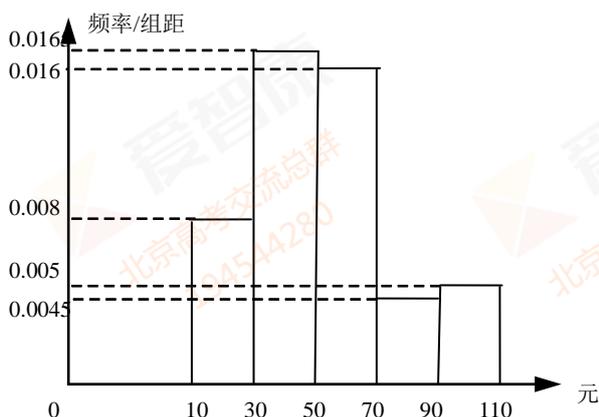
- A. $(-\infty, 0]$ B. $(0, \frac{1}{2})$ C. $[\frac{1}{2}, 1)$ D. $[1, +\infty)$

第二部分 非选择题 (共 40 分)

二、填空题 (共 4 个小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

21. 计算 $9^{\frac{1}{2}} + \log_2 4 =$ _____.

22. 一家电讯公司在某大学对学生每月的手机话费进行抽样调查, 随机抽取了 100 名学生, 将他们的手机话费情况进行统计分析, 绘制成频率分布直方图 (如图所示)。如果该校有大学生 5000 人, 请估计该校每月手机话费在 $[50, 70)$ 的学生人数是 _____.





23. 在长度为3的线段 AB 上任取一点 C ，那么线段 AC 的长度小于2的概率_____.

24. 2014年12月28日开始，北京市公共电汽车和地铁按照里程分段计价。

乘坐地铁（不包括机场线）具体方案如下：6公里（含）内3元；6公里至12公里（含）4元；12公里至22公里（含）5元；22公里至32公里（含）6元；32公里以上部分每增加1元可乘坐20公里。使用市政交通一卡通刷卡，每自然月内每张卡支出累计满100元以后的乘次，价格给予8折优惠；满150元以后的乘次，价格给予5折优惠；支出累计达到400元以后的乘次，不再享受打折优惠。

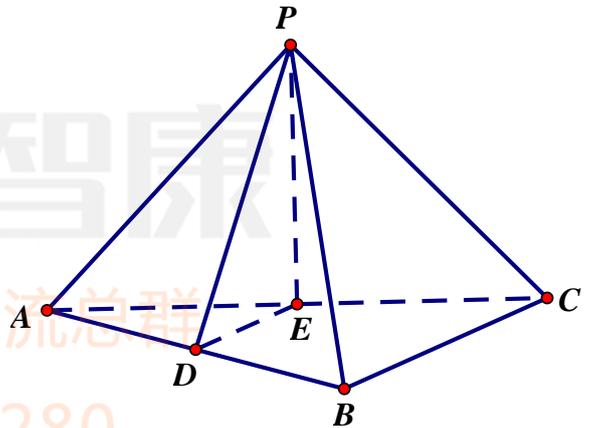
小李上班时，需要乘坐地铁15.9公里到达公司，每天上下班共乘坐两次，每月按上班22天计算。如果小李每次乘坐地铁都使用市政交通一卡通，那么小李每月第21次乘坐地铁时，他刷卡支出的费用是元；他每月上下班乘坐地铁的总费用是_____元。

二、解答题（共4个小题，共28分）

25.（本小题满分7分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $AB \perp BC$ ， D ， E 分别是 AB ， AC 的中点，且 $PE \perp$ 平面 ABC 。

- (1) 求证： $BC \parallel$ 平面 PDE ；
- (2) 求证： $AB \perp$ 平面 PDE 。



26.（本小题满分7分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A ， B ， C 所对的边分别为 a ， b ， c 。且 $a = 2\sqrt{3}$ ， $b = 2$ ， $A = \frac{\pi}{3}$

- (1) 求角 B 的大小；
- (2) 如果函数 $f(x) = \sin x - \sin(x + 2B)$ ，求函数 $f(x)$ 的单调递增区间。



27. (本小题满分7分)

已知点 $A(0,4)$, 圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 点 P 在圆 O 上运动.

- (1) 若果 $\triangle OAP$ 是等腰三角形, 求点 P 的坐标;
- (2) 若果直线 AP 与圆 O 的另一个交点为 Q , 且 $|AP|^2 + |AQ|^2 = 36$, 求直线 AP 的方程.

28. (本小题满分7分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_n + a_{n+1} = an^2 + bn + 1$ (a, b 为常数, $n \in N^*$)

- (1) 如果 $\{a_n\}$ 为等差数列, 求 a, b 的值;
- (2) 如果 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 求 $a+b$ 的取值范围.

北京高考交流总群

194544280



2015年北京市春季普通高中会考

数学试卷答案及评分参考

[说明]

1. 第一部分选择题，机读阅卷。
2. 第二部分包括填空题和解答题。为了阅卷方便，解答题中的推导步骤写得较为详细，考生只要写明主要过程即可。若考生的解法与本解答不同，正确者可参照评分标准给分。解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

第一部分 选择题 (共 60 分)

选择题 (每小题 3 分, 共 60 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	D	B	A	D	D	B	C	A	C
题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	B	C	B	C	B	D	C	D	A	C

第二部分 非选择题 (共 40 分)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 12 分)

21. 5 22. 1600 23. $\frac{2}{3}$ 24. 4, 179.5

二、解答题 (共 4 个小题, 共 28 分)

25. (本小题满分 7 分)

如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $AB \perp BC$, D, E 分别是 AB, AC 的中点, 且 $PE \perp$ 平面 ABC .

(I) 求证: $BC \parallel$ 平面 PDE ;(II) 求证: $AB \perp$ 平面 PDE .

数学试卷答案及评分参考第 1 页 (共 7 页)



(I) 证明: 因为 D, E 分别是 AB, AC 的中点,

所以 $DE \parallel BC$.

又因为 $BC \not\subset$ 平面 PDE ,

$DE \subset$ 平面 PDE ,

所以 $BC \parallel$ 平面 PDE .

.....3 分

(II) 证明: 因为 $PE \perp$ 平面 $ABC, AB \subset$ 平面 ABC ,

所以 $PE \perp AB$.

又因为 $DE \parallel BC, AB \perp BC$,

所以 $DE \perp AB$.

又因为 $PE \cap DE = E$,

所以 $AB \perp$ 平面 PDE .

.....7 分

26. (本小题满分 7 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a = 2\sqrt{3}, b = 2, A = \frac{\pi}{3}$.

(I) 求角 B 的大小;

(II) 如果 $f(x) = \sin x - \sin(x + 2B)$, 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

解: (I) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $A = \frac{\pi}{3}$, 得 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

所以 $\sin B = \frac{1}{2}$, 因为 $b < a$, 所以 $B = \frac{\pi}{6}$.

.....3 分

(II) 因为 $f(x) = \sin x - \sin(x + 2B)$

$$= \sin x - \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin x - \left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$

$$= \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

数学试卷答案及评分参考第 2 页 (共 7 页)



$$\text{令 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{整理得 } -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi] (k \in \mathbf{Z})$ 7 分

27. (本小题满分 7 分)

已知点 $A(0,4)$, 圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 点 P 在圆 O 上运动.

(1) 如果 $\triangle OAP$ 是等腰三角形, 求点 P 的坐标;

(2) 如果直线 AP 与圆 O 的另一个交点为 Q , 且 $|AP|^2 + |AQ|^2 = 36$, 求直线 AP 的方程.

解: (1) 因为 圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 所以 $O(0,0)$, 半径为 2.

设点 $P(x,y)$, 所以 $|OP|=2$.

又 $A(0,4)$, 所以 $|OA|=4$, $|AP|=\sqrt{x^2+(y-4)^2}$,

因为 $\triangle OAP$ 是等腰三角形, 所以 $|AP|=|OA|=4$ 或 $|AP|=|OP|=2$.

当 $|AP|=|OA|=4$ 时, 有 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + (y-4)^2 = 16 \end{cases}$,

$$\text{解得 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{15}}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases},$$

所以 $P(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2})$ 或 $P(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2})$.

当 $|AP|=|OP|=2$ 时, 有 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + (y-4)^2 = 4 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$, 此时 O, P, A 三点共线, 不合题意.

数学试卷答案及评分参考第 3 页 (共 7 页)



综上, $P(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2})$ 或 $P(-\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2})$.

.....3分

(II) 若直线 AP 为 y 轴, 则 $P(0, 2), Q(0, -2)$ 或 $P(0, -2), Q(0, 2)$.

而 $|AP|^2 + |AQ|^2 \neq 36$, 不合题意.

由此可设直线 AP 方程为 $y = kx + 4$.

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + 4, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \text{ 得 } (1+k^2)x^2 - 8kx + 12 = 0,$$

其中 $\Delta = (8k)^2 - 4 \times 12(1+k^2) = 16k^2 - 48 > 0$.

$$\text{且 } x_1 + x_2 = -\frac{8k}{1+k^2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{12}{1+k^2}.$$

因为 $A(0, 4)$,

$$\text{所以 } |AP|^2 = x_1^2 + (y_1 - 4)^2, \quad |AQ|^2 = x_2^2 + (y_2 - 4)^2.$$

又因为 $|AP|^2 + |AQ|^2 = 36$,

$$\text{所以 } x_1^2 + (y_1 - 4)^2 + x_2^2 + (y_2 - 4)^2 = 36.$$

将 $y_1 = kx_1 + 4, y_2 = kx_2 + 4$ 代入上式,

$$\text{整理得 } (1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2] = 36.$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8k}{1+k^2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{12}{1+k^2} \\ (1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2] = 36 \end{cases}$$

解得 $k^2 = 15$, 即 $k = \pm\sqrt{15}$, 经检验符合题意.

数学试卷答案及评分参考第4页 (共7页)



所以 $y = \sqrt{15}x + 4$ 或 $y = -\sqrt{15}x + 4$7分

28. (本小题满分7分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_n + a_{n+1} = an^2 + bn + 1$ (a, b 为常数, $n \in \mathbb{N}^*$).

(I) 如果 $\{a_n\}$ 为等差数列, 求 a, b 的值;

(II) 如果 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 求 $a+b$ 的取值范围.

解: (I) 因为 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设其公差为 d ,

因为 $a_n + a_{n+1} = an^2 + bn + 1$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立,

所以 $a_{n+1} + a_{n+2} = a(n+1)^2 + b(n+1) + 1$,

两式相减得到, $a_{n+1} - a_n = (2n+1)a + b$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立,

即 $2d = a_{n+1} - a_n = (2n+1)a + b$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立,

所以 $a = 0$, 所以 $2d = b$.

又 $a_1 + a_2 = 1 + 1 + d = 2 + d = b + 1$,

所以 $d = 1$, $b = 2$.

所以 $\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$ 3分

(II) 因为 $a_{n+1} - a_n = (2n+1)a + b$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立,

当 n 为奇数, 且 $n \geq 3$ 时,

$$a_3 - a_1 = 3a + b,$$

$$a_5 - a_3 = 7a + b,$$

.....

$$a_n - a_{n-2} = (2n-3)a + b,$$

把这 $\frac{n-1}{2}$ 个式子的左右两边分别相加,

数学试卷答案及评分参考第5页 (共7页)



得到 $a_n - a_1 = [3 + 7 + \dots + (2n-3)]a + \frac{n-1}{2}b$

化简得到 $a_n - a_1 = [3 + 7 + \dots + (2n-3)]a + \frac{n-1}{2}b + 1$,

$$\text{即 } a_n = \frac{n(n-1)}{2}a + \frac{n-1}{2}b + 1,$$

且当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 满足上式.

同理当 n 为偶数, 且 $n \geq 4$ 时,

$$a_4 - a_2 = 5a + b,$$

$$a_6 - a_4 = 9a + b,$$

.....

$$a_n - a_{n-2} = (2n-3)a + b,$$

把这 $\frac{n}{2}-1$ 个式子的左右两边分别相加,

$$\text{得到 } a_n - a_2 = [5 + 9 + \dots + (2n-3)]a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b,$$

化简得到 $a_n - a_2 = [5 + 9 + \dots + (2n-3)]a + \left(\frac{n}{2}-1\right)b + (a+b)$,

$$\text{即 } a_n = \frac{n(n-1)}{2}a + \frac{n}{2}b,$$

且当 $n=2$ 时, $a_2 = a+b$ 满足上式.

$$\text{所以 } a_n = \begin{cases} \frac{n(n-1)}{2}a + \frac{n-1}{2}b + 1, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{n(n-1)}{2}a + \frac{n}{2}b, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

因为 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 所以有 $a_n < a_{n+1}$.

当 n 为奇数时, 因为 $a_n < a_{n+1}$, 即 $\frac{n(n-1)}{2}a + \frac{n-1}{2}b + 1 < \frac{(n+1)n}{2}a - \frac{n+1}{2}b$,

所以 $na + b - 1 > 0$,

所以 $b > 1 - na$.



当 n 为偶数时, 因为 $a_n < a_{n+1}$, 即 $\frac{n(n-1)}{2}a + \frac{n}{2}b < \frac{(n+1)n}{2}a + \frac{n}{2}b + 1$,

所以 $na + 1 > 0$, 即 $a > -\frac{1}{n}$.

所以 $a \geq 0$.

综上, $a + b$ 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

.....7 分



爱智康

北京高考交流总群

194544280

