

上海市徐汇区 2018 届高三一模数学试卷

一、填空题（本大题共有 12 题，1-6 每题 4 分，7-12 每题 5 分，满分 54 分）

1. 已知集合 $A = \{2, 3\}$, $B = \{1, 2, a\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 $a =$ _____;
2. 在复平面内, 复数 $\frac{5+4i}{i}$ (i 为虚数单位) 对应的点的坐标为 _____;
3. 函数 $f(x) = \sqrt{1 - \lg x}$ 的定义域为 _____;
4. 二项式 $(x - \frac{1}{2x})^4$ 的展开式中的常数项为 _____;
5. 若 $\begin{vmatrix} 4^x & 2 \\ 2^x & 1 \end{vmatrix} = 0$, 则 $x =$ _____;
6. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 与圆 O' 关于直线 $x + y = 5$ 对称, 则圆 O' 的方程是 _____;
7. 在坐标平面 xOy 内, O 为坐标原点, 已知点 $A(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 将 \overrightarrow{OA} 绕原点按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$, 得到 $\overrightarrow{OA'}$, 则 $\overrightarrow{OA'}$ 的坐标为 _____;
8. 某船在海平面 A 处测得灯塔 B 在北偏东 30° 方向, 与 A 相距 6.0 海里, 船由 A 向正北方向航行 8.1 海里到达 C 处, 这时灯塔 B 与船相距 _____ 海里; (精确到 0.1 海里)
9. 若公差为 d 的等差数列 $\{a_n\} (n \in N^*)$ 满足 $a_3 a_4 + 1 = 0$, 则公差 d 的取值范围是 _____;
10. 著名的斐波那契数列 $\{a_n\}: 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$, 满足 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in N^*)$, 那么 $1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + \dots + a_{2017}$ 是斐波那契数列中的第 _____ 项;
11. 若不等式 $(-1)^n \cdot a < 3 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ 对任意正整数 n 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____;
12. 已知函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 的图像关于 y 轴对称, 当函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上同时递增或同时递减时, 把区间 $[a, b]$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的“不动区间”, 若区间 $[1, 2]$ 为函数 $y = |2^x - t|$ 的“不动区间”, 则实数 t 的取值范围是 _____;

三、选择题（本大题共有 4 题，每题 5 分，满分 20 分）

13. 已知 α 是 $\triangle ABC$ 的一个内角, 则 “ $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ” 是 “ $\alpha = 45^\circ$ ” 的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
14. 下列命题中. 假命题的是 ()

- A. 若 z 为实数, 则 $\bar{z} = z$; B. 若 $\bar{z} = z$, 则 z 为实数
- C. 若 z 为实数, 则 $\bar{z} \cdot z$ 为实数 D. 若 $\bar{z} \cdot z$ 为实数, 则 z 为实数

15. 现有 8 个人排成一排照相, 其中甲、乙、丙三人两两不相邻的排法的种数是 ()

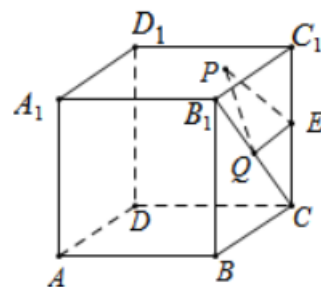
- A. $P_5^3 \cdot P_3^3$ B. $P_8^8 - P_6^6 \cdot P_3^3$ C. $P_6^3 \cdot P_5^5$ D. $P_8^8 - P_6^4$

16. 如图, 棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 CC_1 的中

点, 点 P 、 Q 分别为面 $A_1B_1C_1D_1$ 和线段 B_1C 上动点, 则周长 $\triangle PEQ$

的最小值为 ()

- A. $2\sqrt{2}$ B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{11}$ D. $\sqrt{12}$



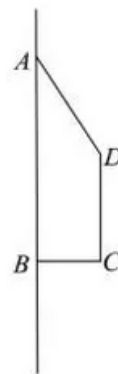
三、解答题 (本大题共有 5 题, 满分 76 分)

17. (本题满分 14 分, 每小题 7 分)

如图, 梯形 $ABCD$ 满足 $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 90^\circ$, 且 $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 1$, $\angle BAD = 30^\circ$. 现将梯形 $ABCD$ 绕 AB 所在的直线旋转一周, 所得几何体记作 Ω .

(1) 求 Ω 的体积 V ;

(2) 求 Ω 的表面积 S .



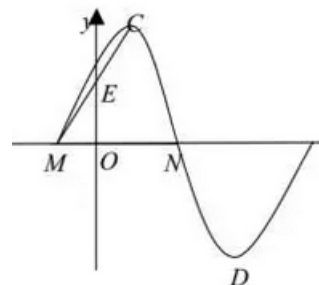
18. (本题满分 14 分, 第 1 小题 6 分, 第 2 小题 8 分)

如图是函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 图像的一部分, M 、 N 是它与 x 轴的两个交点, C 、 D 分别为它的最高点和最低点, $E(0,1)$ 是线段 MC 的中点。

(1) 若点 M 的坐标为 $(-1,0)$, 求点 C 、点 N 和点 D 的坐标;

(2) 若点 M 的坐标为 $(-m,0)$ ($m > 0$), 且 $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{3\pi^2}{4} - 4$,

试确定函数 $f(x)$ 的解析式;



19. (本题满分 14 分, 第 1 小题 6 分, 第 2 小题 8 分)

已知函数 $f(x) = |x| + \frac{m}{x} - 3$ ($m \in \mathbb{R}, x \neq 0$)。

(1) 判断函数 $y = f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(2) 讨论函数 $y = f(x)$ 的零点的个数。

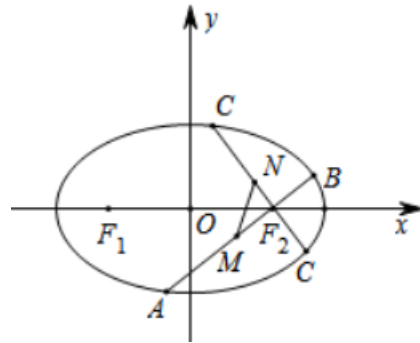
20. (本题满分 16 分, 第 1 小题 4 分, 第 2 小题 6 分, 第 3 小题 6 分)

已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 且 F_1 、 F_2 与短轴的一个端点 Q 构成一个等腰直角三角形, 点 $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆 Γ 上, 过点 F_2 作互相垂直且与 x 轴不重合的两直线 AB 、 CD 分别交椭圆 Γ 于 A 、 B 、 C 、 D , 且 M 、 N 分别是弦 AB 、 CD 的中点。

(1) 求椭圆 Γ 的标准方程;

(2) 求证: 直线 MN 过定点 $R(\frac{2}{3}, 0)$;

(3) 求 ΔMNF_2 面积的最大值。



21. (本题满分 18 分, 第 1 小题 4 分, 第 2 小题 6 分, 第 3 小题 8 分)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d_1 , 等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d_2 , 记 $c_n = \max\{b_1 - a_1n, b_2 - a_2n, \dots, b_n - a_nn\}$ ($n=1,2,3,\dots$), 其中 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ 表示这 s 个数中最大的数。

(1) 若 $a_n = 2n$, $b_n = 4n - 2$, 求 c_1, c_2, c_3 的值, 并猜想数列的通项公式 (不必证明)

(2) 设 $a_n = -n$, $b_n = -n + 2$, 若不等式 $\frac{1}{c_2 - 2} + \frac{1}{c_3 - 2} + \dots + \frac{1}{c_n - 2} < \frac{\lambda \cdot 2^n}{n}$ 对不小于 2 的

一切自然数 n 都成立, 求 λ 的取值范围;

(3) 试探究当无穷数列 $\{c_n\}$ 为等差数列时, d_1, d_2 应满足的条件并证明你的结论。

数学学科参考答案及评分标准

2017.12

一. 填空题: (本大题共有 12 题, 满分 54 分, 第 1-6 题每题 4 分, 第 7-12 题每题 5 分)

1. 3 2. $(4, -5)$ 3. $(0, 10]$ 4. $\frac{3}{2}$ 5. 1 6. $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 1$
 7. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ 8. 4.2 9. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ 10. 2018 11. $[-3, \frac{8}{3})$ 12. $[\frac{1}{2}, 2]$

二. 选择题: (本大题共有 4 题, 满分 20 分, 每题 5 分)

13. B 14. D 15. C 16. B

三. 解答题: (本大题共 5 题, 满分 74 分)

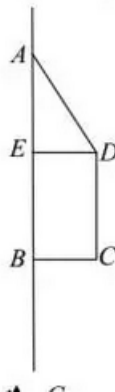
17. (本题满分 14 分, 第 1 小题满分 7 分, 第 2 小题满分 7 分)

【解】(1) 过 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AB 于 E

由已知 $ED = BC = 1, AE = EB = \sqrt{3}, AB = 2$

于是 $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} + \pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{4}{3} \sqrt{3} \pi$. -----7 分

(2) $S = \pi \cdot 1 \cdot 2 + \pi \cdot 1^2 + 2\pi \cdot \sqrt{3} = 3\pi + 2\sqrt{3}\pi$. -----14 分



18. (本题满分 14 分, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分)

【解】(1) 设 $C(x_c, y_c)$, 由中点坐标公式得

$$\frac{x_c + (-1)}{2} = 0, \frac{y_c + 0}{2} = 1, \therefore x_c = 1, y_c = 2$$

于是 $C(1, 2), N(3, 0), D(5, -2)$. -----6 分

(2) 同样由 $E(0, 1)$ 是线段 MC 的中点, 得 $A = 2, C(m, 2),$

$D(5m, -2)$, 于是 $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 12m^2 - 4$, -----8 分

由条件 $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{3\pi^2}{4} - 4$ 可求得 $m = \frac{\pi}{4}$, 由 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 8m = 2\pi$, 得 $\omega = 1$, 进而求得

$\varphi = \frac{\pi}{4}$, 因此函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{4})$. -----14 分

19. (本题满分 14 分, 第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分)

【解】(1) 当 $m = 0$ 时, $f(x) = |x| - 3$, 此时 $f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是偶函数,

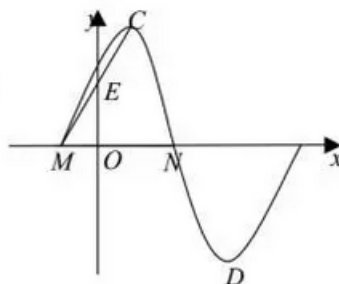
当 $m \neq 0$ 时, $\because f(1) = m - 2, f(-1) = -m - 2, \therefore f(-1) \neq f(1), f(-1) \neq -f(1)$

所以 既不是奇函数, 也不是偶函数. -----6 分

(2) 由 $f(x) = 0$, 可得 $|x| - 3x + m = 0 (x \neq 0)$ 变为 $m = -x|x| + 3x (x \neq 0)$

$$\text{令 } g(x) = 3x - x|x| = \begin{cases} -x^2 + 3x, & x > 0 \\ x^2 + 3x, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}, & x > 0 \\ \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}, & x < 0 \end{cases}, \text{ -----8 分}$$

作 $y = g(x)$ 的图像及直线 $y = m$, 由图像可得:



当 $m > \frac{9}{4}$ 或 $m < -\frac{9}{4}$ 时, $y = f(x)$ 有 1 个零点. -----10 分

当 $m = \frac{9}{4}$ 或 $m = 0$ 或 $m = -\frac{9}{4}$ 时, $y = f(x)$ 有 2 个零点; -----12 分

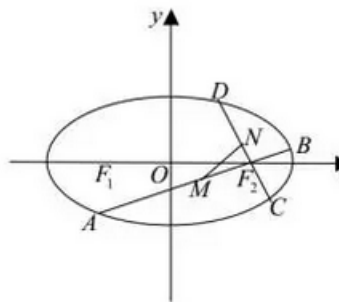
当 $0 < m < \frac{9}{4}$ 或 $-\frac{9}{4} < m < 0$ 时, $y = f(x)$ 有 3 个零点 -----14 分

20. (本题满分 16 分, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 6 分)

【解】(1) 因为 $\triangle QF_1F_2$ 是等腰直角三角形, 所以 $b = c$, 则 $a = \sqrt{2}b$.

把点 $P(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 代入椭圆方程, 得 $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, 故椭圆 C 的

标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ -----4 分



(2) 设直线 AB 的方程为 $x = my + 1$, 不妨设 $m > 0$, 点 $A(x_1, y_1)$,

$B(x_2, y_2)$

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ x = my + 1 \end{cases}$, 得 $(m^2 + 2)y^2 + 2my - 1 = 0$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 2}$,

$x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2 = \frac{4}{m^2 + 2}$, 则 $M(\frac{2}{m^2 + 2}, -\frac{m}{m^2 + 2})$ -----7 分

解法一、 $\because k_{MR} = \frac{-\frac{m}{m^2 + 2} - 0}{\frac{2}{m^2 + 2} - \frac{2}{3}} = \frac{3m}{2(m^2 - 1)}$, $k_{NR} = \frac{3(-\frac{1}{m})}{2[(\frac{1}{m})^2 - 1]} = \frac{3m}{2(m^2 - 1)}$,

所以 $k_{MR} = k_{NR}$, 故直线 MN 恒过定点 $R(\frac{2}{3}, 0)$. -----10 分

解法二、同理, 可得 $N(\frac{2m^2}{1 + 2m^2}, \frac{m}{1 + 2m^2})$,

所以直线 MN 的方程为 $y = \frac{3m}{2(m^2 - 1)}(x - \frac{2}{m^2 + 2}) - \frac{m}{m^2 + 2}$

即 $2(m^4 + m^2 - 2)y = (m^3 + 2m)(3x - 2)$, 故直线 MN 恒过定点 $R(\frac{2}{3}, 0)$. 10 分

(3) $|MF_2| = \sqrt{(\frac{2}{m^2 + 2} - 1)^2 + (\frac{m}{m^2 + 2})^2} = \frac{\sqrt{m^4 + m^2}}{m^2 + 2}$, 同理 $|NF_2| = \frac{\sqrt{(-\frac{1}{m})^4 + (-\frac{1}{m})^2}}{(-\frac{1}{m})^2 + 2}$

$\triangle MNF_2$ 面积 $S = \frac{1}{2} |MF_2| |NF_2| = \frac{\frac{1}{m} + m}{4(m + \frac{1}{m})^2 + 2}$, 设 $t = \frac{1}{m} + m \geq 2$,

$S = \frac{t}{4t^2 + 2} = \frac{1}{4t + \frac{2}{t}} \leq \frac{1}{9}$, 当且仅当 $t = 2$ 即 $m = 1$ 时, $\triangle MNF_2$ 面积取最大值 $\frac{1}{9}$. 16 分

21. (本题满分 18 分, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 8 分)

【解】(1) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, b_1 = 2, b_2 = 6, b_3 = 10$

当 $n = 1$ 时, $c_1 = \max\{b_1 - a_1\} = \max\{0\} = 0$

当 $n = 2$ 时, $c_2 = \max\{b_1 - 2a_1, b_2 - 2a_2\} = \max\{-2, -2\} = -2$

当 $n = 3$ 时, $c_3 = \max\{b_1 - 3a_1, b_2 - 3a_2, b_3 - 3a_3\} = \max\{-4, -6, -8\} = -4$

$\therefore c_1 = 0, c_2 = -2, c_3 = -4$, 猜想 $c_n = -2n + 2 (n \in N^*)$. -----4 分

(2) 当 $k \in N^*$, 且 $2 \leq k \leq n$ 时, $b_k - na_k - (b_{k-1} - na_{k-1}) = n - 1 > 0$

所以 $c_n = \max\{b_1 - a_1n, b_2 - a_2n, \dots, b_n - a_nn\} = b_n - a_nn = n(n-1) + 2$

故 $\frac{1}{c_2 - 2} + \frac{1}{c_3 - 2} + \dots + \frac{1}{c_n - 2} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = 1 - \frac{1}{n}$ -----7 分

由题意得 $1 - \frac{1}{n} < \frac{\lambda \cdot 2^n}{n}$ 即 $\lambda > \frac{n-1}{2^n}$ 对不小于 2 的一切自然数 n 都成立.

设 $p_n = \frac{n-1}{2^n}$, 则 $p_{n+1} - p_n = \frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n-1}{2^n} = \frac{2-n}{2^{n+1}} \leq 0$

故 $(p_n)_{\max} = p_2 = p_3 = \frac{1}{4}$, 所以 λ 的取值范围为 $\lambda > \frac{1}{4}$. -----10 分

(3) 当 $k \in N^*$, 且 $2 \leq k \leq n$ 时,

$$b_k - na_k - (b_{k-1} - na_{k-1}) = b_k - b_{k-1} - n(a_k - a_{k-1}) = d_2 - nd_1.$$

下面分 $d_1 = 0, d_1 > 0, d_1 < 0$ 三种情况进行讨论,

① 若 $d_1 = 0$, 则 $b_k - na_k - (b_{k-1} - na_{k-1}) = d_2$

于是当 $d_2 \leq 0$ 时, $b_k - na_k - (b_{k-1} - na_{k-1}) = d_2 \leq 0$,

则对于任意给定的正整数 n , $c_n = b_1 - na_1, c_{n+1} = b_1 - (n+1)a_1$, 此时 $c_{n+1} - c_n = -a_1$,

\therefore 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列; -----11 分

当 $d_2 > 0$ 时, $b_k - na_k - (b_{k-1} - na_{k-1}) = d_2 > 0$

则对于任意给定的正整数 n , $c_n = b_n - na_n = b_n - na_1, c_{n+1} = b_{n+1} - (n+1)a_1$, 此时

$c_{n+1} - c_n = d_2 - a_1$, \therefore 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列; -----12 分

② 若 $d_1 > 0$, 若 $d_2 \leq 2d_1$, 则必有 $d_2 \leq nd_1$ 对任意 $n \geq 2 (n \in N^*)$ 成立. 此时

$c_n = b_1 - na_1, c_{n-1} = b_1 - (n-1)a_1$, 此时 $c_n - c_{n-1} = -a_1$, \therefore 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列; 14 分

若 $d_2 > 2d_1$, 则当 $d_2 \geq 3d_1$ 时, $c_1 = b_1 - a_1, c_2 = b_2 - 2a_2, c_3 = b_3 - 3a_3$

于是 $2c_2 - (c_1 + c_3) = 2d_1 \neq 0$, \therefore 数列 $\{c_n\}$ 不是等差数列; -----15 分

当 $2d_1 < d_2 < 3d_1$ 时, $c_1 = b_1 - a_1, c_2 = b_2 - 2a_2, c_3 = b_1 - 3a_1$

于是 $2c_2 - (c_1 + c_3) = 2(d_2 - 2d_1) \neq 0$, \therefore 数列 $\{c_n\}$ 不是等差数列; -----16 分

③ 若 $d_1 < 0$, 则必存在 $s \in N^*$, 使得当 $n \geq s$ 时, $n > \frac{d_2}{d_1}$, 此时就有 $d_2 > nd_1$,

即 $d_2 - nd_1 > 0$, 此时 $c_n = b_n - a_n \cdot n = b_1 + (n-1)d_2 - [a_1 + (n-1)d_1] \cdot n$

$c_{n+1} = b_1 + nd_2 - (a_1 + nd_1) \cdot (n+1)$, 所以 $c_{n+1} - c_n = -2n \cdot d_1 + d_2 - a_1$ 与正整数 n 有关,

\therefore 数列 $\{c_n\}$ 不是等差数列.

综合得, 若 $\{c_n\}$ 为等差数列, 则有 $d_1 > 0$ 且 $d_2 \leq 2d_1$ 或 $d_1 = 0$. -----