海淀区高三年级第一学期期末练习

数　学（理科）

2018.1

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题纸交回。

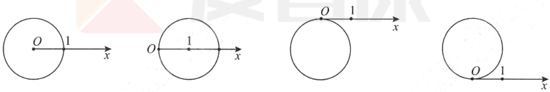
第一部分　（选择题　共40分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）复数 $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=$

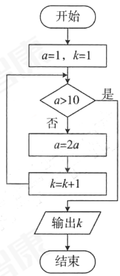
（A）$2-\mathrm{i}$　　（B）$2+\mathrm{i}$　　（C）$-2-\mathrm{i}$　　（D）$-2+\mathrm{i}$

（2）在极坐标系 Ox 中，方程 $\rho=2\sin\theta$ 表示的圆为



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

（3）执行如图所示的程序框图，输出的 k 值为



（A）4

（B）5

（C）6

（D）7

（4）设 m 是不为零的实数，则“$m>0$”是“方程 $\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{m}=1$ 表示的曲线为双曲线”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（5）已知直线 $x-y+m=0$ 与圆 O：$x^2+y^2=1$ 相交于 A，B 两点，且△OAB 为正三角形，则实数 m 的值为

（A）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　（D）$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

（6）从编号分别为1，2，3，4，5，6的六个大小完全相同的小球中，随机取出三个小球，则恰有两个小球编号相邻的概率为

（A）$\frac{1}{5}$　　（B）$\frac{2}{5}$　　（C）$\frac{3}{5}$　　（D）$\frac{4}{5}$

（7）某三棱锥的三视图如图所示，则下列说法中：

① 三棱锥的体积为$\frac{1}{6}$

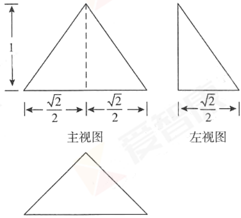
② 三棱锥的四个面全是直角三角形

③ 三棱锥四个面的面积中最大的是$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所有正确的说法是

（A）①　　（B）①②

（C）②③　　（D）①③



主视图　　左视图

俯视图

（8）已知点 F 为抛物线 C：$y^2=2px\ (p>0)$ 的焦点，点 K 为点 F 关于原点的对称点，点 M 在抛物线 C 上，则下列说法错误的是

（A）使得△MFK 为等腰三角形的点 M 有且仅有4个

（B）使得△MFK 为直角三角形的点 M 有且仅有4个

（C）使得$\angle MKF=\frac{\pi}{4}$的点 M 有且仅有4个

（D）使得$\angle MKF=\frac{\pi}{6}$的点 M 有且仅有4个

第二部分　（非选择题　共110分）

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

（9）点 $(2,\ 0)$ 到双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的渐近线的距离是______.

（10）已知公差为1的等差数列 $\{a_n\}$ 中，a_1，a_2，a_4 成等比数列，则 $\{a_n\}$ 的前100项的和为______.

（11）设抛物线 C：$y^2=4x$ 的顶点为 O，经过抛物线 C 的焦点且垂直于 x 轴的直线和抛物线 C 交于 A，B 两点，则 $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=$______.

（12）已知 $(5x-1)^n$ 展开式中，各项系数的和与各项二项式系数的和之比为 $64:1$，则 $n=$______.

（13）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $4\sqrt{2}$，点 M 是棱 BC 的中点，点 P 在底面 $ABCD$ 内，点 Q 在线段 A_1C_1 上，若 $PM=1$，则 PQ 长度的最小值为______.

（14）对任意实数 k，定义集合 $D_k=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x-y+2\geqslant 0\\ x+y-2\leqslant 0,\ x,\ y\in\mathbf{R}\\ kx-y\leqslant 0\end{cases}\right.\right\}$.

① 若集合 D_k 表示的平面区域是一个三角形，则实数 k 的取值范围是______；

② 当 $k=0$ 时，若对任意的 $(x,y)\in D_0$，有 $y\geqslant a(x+3)-1$ 恒成立，且存在 $(x,y)\in D_0$，使得 $x-y\leqslant a$ 成立，则实数 a 的取值范围为______.

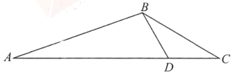
三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）

如图，在△ABC 中，点 D 在 AC 边上，且 $AD=3DC$，$AB=\sqrt{7}$，$\angle ADB=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle C=\dfrac{\pi}{6}$.

（Ⅰ）求 DC 的值；

（Ⅱ）求 $\tan\angle ABC$ 的值 .



（16）（本小题 13 分）

据中国日报网报道：2017 年 11 月 13 日，TOP500 发布的最新一期全球超级计算机 500 强榜单显示，中国超算在前五名中占据两席．其中超算全球第一“神威・太湖之光”完全使用了国产品牌处理器。为了了解国产品牌处理器打开文件的速度，某调查公司对两种国产品牌处理器进行了 12 次测试，结果如下：（数值越小，速度越快，单位是 MIPS）

	测试 1	测试 2	测试 3	测试 4	测试 5	测试 6	测试 7	测试 8	测试 9	测试 10	测试 11	测试 12
品牌 A	3	6	9	10	4	1	12	17	4	6	6	14
品牌 B	2	8	5	4	2	5	8	15	5	12	10	21

（Ⅰ）从品牌 A 的 12 次测试中，随机抽取一次，求测试结果小于 7 的概率；

（Ⅱ）从 12 次测试中，随机抽取三次，记 X 为品牌 A 的测试结果大于品牌 B 的测试结果的次数，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（Ⅲ）经过了解，前 6 次测试是打开含有文字与表格的文件，后 6 次测试是打开含有文字与图片的文件．请你依据表中数据，运用所学的统计知识，对这两种国产品牌处理器打开文件的速度进行评价．

（17）（本小题 14 分）

如图 1，梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$CD\perp BC$，$BC=CD=1$，$AD=2$，E 为 AD 中点．将$\triangle ABE$ 沿 BE 翻折到$\triangle A_1BE$ 的位置，使 $A_1E=A_1D$，如图 2.

（Ⅰ）求证：平面 $A_1DE\perp$平面 $BCDE$；

（Ⅱ）求直线 A_1B 与平面 A_1CD 所成角的正弦值；

（Ⅲ）设 M、N 分别为 A_1E 和 BC 的中点，试比较三棱锥 $M-A_1CD$ 和三棱锥 $N-A_1CD$（图中未画出）的体积大小，并说明理由．

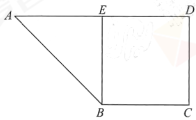


图 1

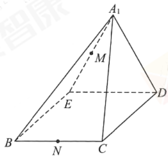


图 2

（18）（本小题 13 分）

已知椭圆 C：$x^2+2y^2=9$，点 $P(2,0)$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的短轴长与离心率；

（Ⅱ）过 $(1,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 M、N 两点，设 MN 的中点为 T，判断 $|TP|$ 与 $|TM|$ 的大小，并证明你的结论．

（19）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=2e^x-ax^2-2x-2$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $a\leqslant 0$ 时，求证：函数 $f(x)$ 有且仅有一个零点；

（Ⅲ）当 $a>0$ 时，写出函数 $f(x)$ 的零点的个数．（只需写出结论）

（20）（本小题 13 分）

无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：a_1 为正整数，且对任意正整数 n，a_{n+1} 为前 n 项 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 中等于 a_n 的项的个数．

（Ⅰ）若 $a_1=2$，请写出数列 $\{a_n\}$ 的前 7 项；

（Ⅱ）求证：对于任意正整数 M，必存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_k>M$；

（Ⅲ）求证：“$a_1=1$”是“存在 $m\in\mathbf{N}^*$，当 $n\geqslant m$ 时，恒有 $a_{n+2}\geqslant a_n$ 成立”的充要条件．

海淀区高三年级第一学期期末练习参考答案 2018.1

数 学（理科）

阅卷须知：

1. 评分参考中所注分数，表示考生正确做到此步应得的累加分数.

2. 其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分.

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
选项	A	D	B	A	D	C	D	C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.（有两空的小题第一空 3 分）

（9）$\frac{2}{5}\sqrt{5}$　　（10）5050　　（11）2　　（12）6

（13）$\sqrt{33}$　　（14）① $(-1,1)$　　② $[-2,\frac{1}{5}]$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）如图所示，$\angle DBC=\angle ADB-\angle C=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，　　……………… 1 分

故 $\angle DBC=\angle C$，$DB=DC$　　……………… 2 分

设 $DC=x$，则 $DB=x$，$DA=3x$.

在 ΔADB 中，由余弦定理

$$AB^2=DA^2+DB^2-2DA\cdot DB\cdot\cos\angle ADB$$　　……………… 3 分

即 $7=(3x)^2+x^2-2\cdot 3x\cdot x\cdot\frac{1}{2}=7x^2$，　　……………… 4 分

解得 $x=1$，即 $DC=1$.　　……………… 5 分

（Ⅱ）方法一：在 ΔADB 中，由 $AD>AB$，得 $\angle ABD>\angle ADB=60^\circ$，故

$\angle ABC=\angle ABD+\angle DBC>\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$　　……………… 6 分

在 ΔABC 中，由正弦定理

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle ACB}$$　　……………… 7 分

即 $\frac{4}{\sin\angle ABC}=\frac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}}$，故 $\sin\angle ABC=\frac{2}{\sqrt{7}}$，……………………9 分

由 $\angle ABC\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，得 $\cos\angle ABC=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，……………………11 分

$\tan\angle ABC=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ ……………………13 分

方法二：在 ΔADB 中，由余弦定理

$\cos\angle ABD=\frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2AB\cdot BD}=\frac{7+1-9}{2\cdot\sqrt{7}\cdot 1}=-\frac{1}{2\sqrt{7}}$ ……………………7 分

由 $\angle ABD\in(0,\pi)$，故 $\sin\angle ABD=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$ ……………………9 分

故 $\tan\angle ABD=-3\sqrt{3}$ ……………………11 分

故 $\tan\angle ABC=\tan(\angle ABD+\frac{\pi}{6})=\frac{\tan\angle ABD+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\angle ABD\cdot\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{-3\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$

……………………13 分

16.（本小题 13 分）

（Ⅰ）从品牌 A 的 12 次测试中，测试结果打开速度小于 7 的文件有：

测试 1、2、5、6、9、10、11，共 7 次

设该测试结果打开速度小于 7 为事件 A，因此 $P(A)=\frac{7}{12}$ ……………………3 分

（Ⅱ）12 次测试中，品牌 A 的测试结果大于品牌 B 的测试结果的次数有：

测试 1、3、4、5、7、8，共 6 次

随机变量 X 所有可能的取值为：0，1，2，3

$P(X=0)=\frac{C_6^3C_6^0}{C_{12}^3}=\frac{1}{11}$

$P(X=1)=\frac{C_6^2C_6^1}{C_{12}^3}=\frac{9}{22}$

$P(X=2)=\frac{C_6^1C_6^2}{C_{12}^3}=\frac{9}{22}$

$P(X=3)=\frac{C_9^0C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{1}{11}$

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{11}$

……………………8 分

$E(X)=\frac{1}{11}\times0+\frac{9}{22}\times1+\frac{9}{22}\times2+\frac{1}{11}\times3=\frac{3}{2}$ ……………………10 分

（Ⅲ）本题为开放问题，答案不唯一，在此给出评价标准，并给出可能出现的答案情况，阅卷时按照标准酌情给分.

给出明确结论，1 分；

结合已有数据，能够运用以下 8 个标准中的任何一个陈述得出该结论的理由，2 分.

……………………13 分.

标准 1：会用前 6 次测试品牌 A、品牌 B 的测试结果的平均值与后 6 次测试品牌 A、品牌 B 的测试结果的平均值进行阐述（这两种品牌的处理器打开含有文字与表格的文件的测试结果平均值均小于打开含有文字和图片的文件的测试结果平均值；这两种品牌的处理器打开含有文字与表格的文件的平均速度均快于打开含有文字和图片的文件的平均速度）

标准 2：会用前 6 次测试品牌 A、品牌 B 的测试结果的方差与后 6 次测试品牌 A、品牌 B 的测试结果的方差进行阐述（这两种品牌的处理器打开含有文字与表格的文件的测试结果的方差均小于打开含有文字和图片的文件的测试结果的方差；这两种品牌的处理器打开含有文字与表格的文件速度的波动均小于打开含有文字和图片的文件速度的波动）

标准 3：会用品牌 A 前 6 次测试结果的平均值、后 6 次测试结果的平均值与品牌 B 前 6 次测试结果的平均值、后 6 次测试结果的平均值进行阐述（品牌 A 前 6 次测试结果的平均值大于品牌 B 前 6 次测试结果的平均值，品牌 A 后 6 次测试结果的平均值小于品牌 B 后 6 次测试结果的平均值，品牌 A 打开含有文字和表格的文件的速度慢于品牌 B，品牌 A 打开含有文字和图形的文件的速度快于品牌 B）

标准 4：会用品牌 A 前 6 次测试结果的方差、后 6 次测试结果的方差与品牌 B 前 6 次测试结果的方差、后 6 次测试结果的方差进行阐述（品牌 A 前 6 次测试结果的方差大于品牌 B 前 6 次测试结果的方差，品牌 A 后 6 次测试结果的方差小于品牌 B 后 6 次测试结果的方差，品牌 A 打开含有文字和表格的文件的速度波动大于品牌 B，品牌 A 打开含有文字和图形的文件的速度波动小于品牌 B）

标准 5：会用品牌 A 这 12 次测试结果的平均值与品牌 B 这 12 次测试结果的平均值进行阐述（品牌 A 这 12 次测试结果的平均值小于品牌 B 这 12 次测试结果的平均值，品牌 A 打开文件的平均速度快于品牌 B）

标准 6：会用品牌 A 这 12 次测试结果的方差与品牌 B 这 12 次测试结果的方差进行阐述（品牌 A 这 12 次测试结果的方差小于品牌 B 这 12 次测试结果的方差，品牌 A 打开文件

速度的波动小于B）

标准7：会用前6次测试中，品牌A测试结果大于（小于）品牌B测试结果的次数、后6次测试中，品牌A测试结果大于（小于）品牌B测试结果的次数进行阐述（前6次测试结果中，品牌A小于品牌B的有2次，占1/3．后6次测试中，品牌A小于品牌B的有4次，占2/3．故品牌A打开含有文字和表格的文件的速度慢于B，品牌A打开含有文字和图片的文件的速度快于B）

标准8：会用这12次测试中，品牌A测试结果大于（小于）品牌B测试结果的次数进行阐述（这12次测试结果中，品牌A小于品牌B的有6次，占1/2．故品牌A和品牌B打开文件的速度相当）

参考数据

期望	前6次	后6次	12次
品牌A	5.50	9.83	7.67
品牌B	4.33	11.83	8.08
品牌A与品牌B	4.92	10.83	

方差	前6次	后6次	12次
品牌A	12.30	27.37	23.15
品牌B	5.07	31.77	32.08
品牌A与品牌B	8.27	27.97	

17．（本小题14分）

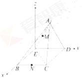
（Ⅰ）证明：因为 $BE\perp A_1E$，$BE\perp DE$，$A_1E\cap DE=E$，A_1E，$DE\subset$ 平面 A_1DE ……………1分

所以 $BE\perp$ 平面 A_1DE ……………2分

因为 $BE\subset$ 平面 $BCDE$，所以平面 $A_1DE\perp$ 平面 $BCDE$ ……………3分

（Ⅱ）解：在平面 A_1DE 内作 $EF\perp ED$，

由 $BE\perp$ 平面 A_1DE，建系如图。……………4分



则 $A_1(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$D(0,1,0)$，$E(0,0,0)$．

$\overrightarrow{A_1B}=(1,-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\overrightarrow{A_1D}=(0,\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{DC}=(1,0,0)$ ……………7分

设平面 A_1CD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\frac{1}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\\ x=0\end{cases}$，令 $z=1$ 得，$y=\sqrt{3}$，

所以 $\vec{n}=(0,\sqrt{3},1)$ 是平面 A_1CD 的一个方向量．……………9分

$\cos<\overrightarrow{A_1B},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{A_1B}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{A_1B}|\cdot|\vec{n}|}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot 2}=-\frac{\sqrt{6}}{4}$ ……………10分

所以 A_1B 与平面 A_1CD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$． ……………11分

（Ⅲ）解：三棱锥 $M-A_1CD$ 和三棱锥 $N-A_1CD$ 的体积相等． ……………12分

理由如：

方法一：由 $M(0,\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$，$N(1,\frac{1}{2},0)$，知 $\overrightarrow{MN}=(1,\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4})$，则 $\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}=0$

因为 $MN\not\subset$ 平面 A_1CD，所以 $MN\parallel$ 平面 A_1CD． ……………13分

故点M、N到平面A_1CD的距离相等，有三棱锥$M-A_1CD$和$N-A_1CD$同底等高，

所以体积相等. 14分

方法二：如图，取DE中点P，连接MP，NP，MN.

因为在ΔA_1DE中，M，P分别是A_1E，DE的中点，所以MP // A_1D

因为在正方形$BCDE$中，N，P分别是BC，DE的中点，所以NP // CD

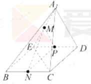
因为$MP \cap NP = P$，MP，$NP \subset$平面MNP，A_1D，$CD \subset$平面A_1CD

所以平面MNP // 平面A_1CD

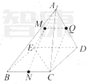
因为$MN \subset$平面MNP，所以MN // 平面A_1CD 13分

故点M、N到平面A_1CD的距离相等，有三棱锥$M-A_1CD$和$N-A_1CD$同底等高，

所以体积相等. 14分



法二



法三

方法三：如图，取A_1D中点Q，连接MN，MQ，CQ.

因为在ΔA_1DE中，M，Q分别是A_1E，A_1D的中点，所以MQ // ED且$MQ = \frac{1}{2}ED$

因为在正方形$BCDE$中，N是BC的中点，所以NC // ED且$NC = \frac{1}{2}ED$

所以MQ // NC且$MQ = NC$，故四边形$MNCQ$是平行四边形，故MN // CQ

因为$CQ \subset$平面A_1CD，$MN \not\subset$平面A_1CD，所以MN // 平面A_1CD. 13分

故点M、N到平面A_1CD的距离相等，有三棱锥$M-A_1CD$和$N-A_1CD$同底等高，

所以体积相等. 14分

18.（本小题13分）

解：（Ⅰ）C：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{\frac{9}{2}}=1$，故 $a^2=9$，$b^2=\dfrac{9}{2}$，$c^2=\dfrac{9}{2}$．

有 $a=3$，$b=c=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$． ………………3 分

椭圆 C 的短轴长为 $2b=3\sqrt{2}$，离心率为 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$． ………………5 分

（Ⅱ）结论是：$|TP|<|TM|$． ………………6 分

设直线 l：$x=my+1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

$\begin{cases}x^2+2y^2=9\\x=my+1\end{cases}$，整理得：$(m^2+2)y^2+2my-8=0$ ………………8 分

$\Delta=(2m)^2+32(m^2+2)=36m^2+6$

故 $y_1+y_2=-\dfrac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=-\dfrac{8}{m^2+2}$ ………………10 分

$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$

$=(x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2$ ………………11 分

$=(my_1-1)(my_2-1)+y_1y_2$

$=(m^2+1)y_1y_2-m(y_1+y_2)+1$

$=-(m^2+1)\cdot\dfrac{8}{m^2+2}-m\cdot(-\dfrac{2m}{m^2+2})+1$

$=-\dfrac{5m^2+6}{m^2+2}<0$ ………………12 分

故 $\angle MPN>90°$，即点 P 在以 MN 为直径的圆内，故 $|TP|<|TM|$ ………………13 分

19. （本小题 14 分）

（Ⅰ）因为函数 $f(x)=2\mathrm{e}^x-ax^2-2x-2$

所以 $f'(x)=2\mathrm{e}^x-2ax-2$ ……………2 分

故 $f(0)=0$，$f'(0)=0$ ……………4 分

曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=0$ ……………5 分

（Ⅱ）当 $a\le 0$ 时，令 $g(x)=f'(x)=2\mathrm{e}^x-2ax-2$，则 $g'(x)=2\mathrm{e}^x-2a>0$

……………6 分

故 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数. ……………7 分

由 $g(0)=0$，故当 $x<0$ 时，$g(x)<0$，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$.

即当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$.

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增. ……………9 分

函数 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)$ ……………10 分

由 $f(0)=0$，故 $f(x)$ 有且仅有一个零点. ……………12 分

（Ⅲ）当 $a=1$ 时，$f(x)$ 有一个零点；当 $a>0$ 且 $a\ne 1$ 时，$f(x)$ 有两个零点.

……………14 分

20. （本小题 13 分）

解：（Ⅰ）2，1，1，2，2，3，1 ……………3 分

（Ⅱ）假设存在正整数 M，使得对任意的 $k\in\mathbf{N}^*$，$a_k\le M$. 由题意，$a_k\in\{1,2,3,\dots,M\}$

考虑数列 $\{a_n\}$ 的前 M^2+1 项：

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{M^2+1}$$

其中至少有 $M+1$ 项的取值相同，不妨设

$$a_{i_1}=a_{i_2}=\cdots=a_{i_{M+1}}$$

此时有：$a_{i_{M+1}+1}=M+1>M$，矛盾.

故对于任意的正整数 M，必存在 $k\in\mathbf{N}^*$，使得 $a_k>M$. ……………8 分

（III）充分性：

当$a_1=1$时，数列$\{a_n\}$为1，1，2，1，3，1，4，…，1，$k-1$，1，k，…

特别地，$a_{2k-1}=k$，$a_{2k}=1$

故对任意的$n\in\mathbf{N}^*$

（1）若n为偶数，则$a_{n+2}=a_n=1$

（2）若n为奇数，则$a_{n+2}=\dfrac{n+3}{2}>\dfrac{n+1}{2}=a_n$

综上，$a_{n+2}\ge a_n$恒成立，特别地，取$m=1$有当$n\ge m$时，恒有$a_{n+2}\ge a_n$成立

…………11分

必要性：

方法一假设存在$a_1=k$（$k>1$），使得“存在$m\in N^*$，当$n\ge m$时，恒有$a_{n+2}\ge a_n$成立”

则数列$\{a_n\}$的前k^2+1项为

k，

1，1，2，1，3，1，4，…，1，$k-1$，1，k

2，2，3，2，4，…，2，$k-1$，2，k

3，3，4，…，3，$k-1$，3，k

…

$k-2$，$k-2$，$k-1$，$k-2$，k

$k-1$，$k-1$，k

k

后面的项顺次为

$k+1$，1，$k+1$，2，…，$k+1$，k

$k+2$，1，$k+2$，2，…，$k+2$，k

$k+3$，1，$k+3$，2，…，$k+3$，k

……

对任意的m，总存在$n\ge m$，使得$a_n=k$，$a_{n+2}=1$，这与$a_n\le a_{n+2}$矛盾，故若存在$m\in N^*$，当$n\ge m$时，恒有$a_{n+2}\ge a_n$成立，必有$a_1=1$

…………13分

方法二：若存在$m\in N^*$，当$n\ge m$时，$a_{n+2}\ge a_n$恒成立，记$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}=s$.

由第（2）问的结论可知：存在$k\in N^*$，使得$a_k>s$（由s的定义知$k\ge m+1$）

不妨设a_k是数列$\{a_n\}$中第一个大于等于$s+1$的项，即$a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}$均小于等于s.

[illegible]

记 $a_k = t \geq s+1$，由数列 $\{a_n\}$ 的定义可知，在 $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ 中恰有 t 项等于 1.

假设 $a_1 \neq 1$，则可设 $a_{i_1} = a_{i_2} = \cdots = a_{i_t} = 1$，其中 $1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_t = k-1$.

考虑这 t 个 1 的前一项，即 $a_{i_1-1}, a_{i_2-1}, \cdots, a_{i_t-1}$，

因为它们均为不超过 s 的正整数，且 $t \geq s+1$，所以 $a_{i_1-1}, a_{i_2-1}, \cdots, a_{i_t-1}$ 中一定存在两项相等，

将其记为 a，则数列 $\{a_n\}$ 中相邻两项恰好为（a，1）的情况至少出现 2 次，但根据数列 $\{a_n\}$ 的定义可知：第二个 a 的后一项应该至少为 2，不能为 1，所以矛盾！

故假设 $a_1 \neq 1$ 不成立，所以 $a_1 = 1$，即必要性得证！ …………13 分

综上，“$a_1 = 1$”是“存在 $m \in N^*$，当 $n \geq m$ 时，恒有 $a_{n+2} \geq a_n$ 成立”的充要条件.