

惠州市 2018 届高三第三次调研考试

理科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

(1) 集合 $A = \{x | x^2 - x - 2 \leq 0\}$, $B = \{x | x - 1 < 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

A. $\{x | x \geq 1\}$ B. $\{x | -1 \leq x < 1\}$ C. $\{x | x < -1\}$ D. $\{x | -2 \leq x < 1\}$

(2) 已知 i 为虚数单位，复数 z 满足 $z = \frac{6}{1+i}$, 则复数 z 的虚部为 ()

A. $3i$ B. 3 C. $-3i$ D. -3

(3) 抽奖一次中奖的概率是 90%，5 个人各抽奖一次恰有 3 人中奖的概率为 ()

A. 0.9^3 B. $C_5^3 \times 0.9^3 \times 0.1^2$ C. $1 - (1 - 0.9)^3$ D. $C_5^3 \times 0.9^2 \times 0.1^3$

(4) 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 = 2$, $a_4 + a_5 = 4$, 则 $a_{10} + a_{11} =$ ()

A. 8 B. 16 C. 32 D. 64

(5) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 且 $f(x+2) = -\frac{1}{f(x)}$, 当 $-3 \leq x \leq -2$ 时

$f(x) = x$, 则 $f(2018) =$ ()

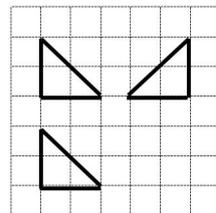
A. -2 B. 2 C. -3 D. 3

(6) 若 $(\sqrt{x} - \frac{a}{x})^n$ 展开式中所有二项式系数之和是 512, 常数项为 -84, 则实数 a 的值是 ()

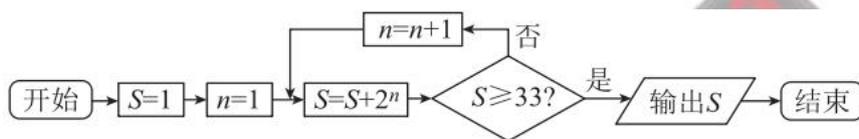
A. 1 B. -1 C. ± 1 D. 2

(7) 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 该几何体的体积为 ()

A. $\frac{1}{6}$ B. 1 C. $\frac{4}{3}$ D. 4



(8) 如图是一个算法的流程图, 则输出 S 的值是 ()



- A. 15 B. 31 C. 63 D. 127

(9) 已知 $\cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos(2x - \frac{5\pi}{3}) + \sin^2(\frac{\pi}{3} - x)$ 的值为 ()

- A. $-\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $-\frac{5}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

(10) 已知 PA, PB 是圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ 的两条切线 (A, B 是切点), 其中 P 是直线 $l: 3x - 4y + 12 = 0$ 上的动点, 那么四边形 $PACB$ 的面积的最小值为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$

(11) 已知函数 $f(x)(x \in R)$ 满足 $f(1) = 1$, $f(x)$ 的导数 $f'(x) < \frac{1}{2}$,

则不等式 $f(x^2) < \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

(12) 已知函数 $f(x) = \frac{x}{1+x} (x > 0)$, 设 $f(x)$ 在点 $(n, f(n))(n \in N^*)$ 处的切线在 y 轴上的

截距为 b_n , 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = f(a_n)(n \in N^*)$, 在数列 $\left\{ \frac{b_n}{a_n^2} + \frac{\lambda}{a_n} \right\}$ 中, 仅当 $n = 5$

时, $\frac{b_n}{a_n^2} + \frac{\lambda}{a_n}$ 取最小值, 则 λ 的取值范围是 ()

- A. $(-11, -9)$ B. $(-5.5, -4.5)$ C. $(4.5, 5.5)$ D. $(9, 11)$

二. 填空题: 本题共4小题, 每小题5分。

(13) 已知向量 $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, 则 $|2\vec{a} - \vec{b}| =$ _____.

(14) 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 4 \\ x-y-2 \leq 0 \\ y \leq 3 \end{cases}$, 则 $z = \frac{y}{x+2}$ 的最大值为 _____.

4000-121-121

(15) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_7 = 7$, $S_{11} = 66$, 则数列 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 的前 2017

项和 $S_{2017} =$ _____.

(16) 设 A, B 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右顶点, 若在椭圆上存在异于 A, B 的点 P ,

使得 $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$, 其中 O 为坐标原点, 则椭圆的离心率 e 的取值范围是_____.

三. 解答题: 共70分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤. 第17~21题为必考题, 每个考生都必须作答. 第22、23题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共60分.

(17) (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 所对的边, $2b \cos C - 2a + c = 0$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $b=2$, 求 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心到 AC 边的距离.

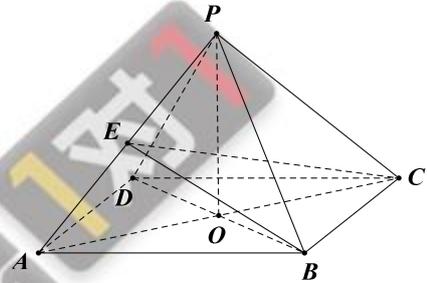
(18) (本小题满分 12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面是边长为 4 的菱形, $\angle BAD = 60^\circ$,

$AC \cap BD = O, PO \perp$ 平面 $ABCD$,

(1) 证明: $PA \perp BD$

(2) 若 E 是 PA 的中点, $OE = \sqrt{6}$,

求二面角 $A-EC-B$ 的余弦值.



(19) (本小题满分12分) 智能手机一经推出便风靡全国, 甚至涌现出一批离不开手机的人. 为了调查每天使用手机的时间, 某公司在广场随机采访成年男性、女性各50名, 其中每天玩手机超过6小时的用户列为“手机控”, 否则称其为“非手机控”, 调查结果如下:

	手机控	非手机控	合计
男性	25	25	50
女性	30	20	50
合计	55	45	100

(1) 根据以上数据, 能否有75%的把握认为“手机控”与性别有关?

(2) 现从调查的女性中按分层抽样的方法选出 5人, 并从选出的 5人中再随机抽取 3人, 给3人中的“手机控”每人赠送500元的话费. 记这3人中“手机控”的人数为 X , 试求 X

的分布列与所赠送话费的数学期望。

参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ，其中 $n = a+b+c+d$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.05	0.025	0.010
k_0	0.455	0.708	1.321	3.840	5.024	6.635

(20) (本小题满分 12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$,

且抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线恰好过椭圆 C 的一个焦点。

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $(0,1)$ 的直线 l 与椭圆交于 M, N 两点, 求 $\triangle OMN$ 面积的最大值。

(21) (本小题满分 12 分) 已知 $t > 0$, 设函数 $f(x) = x^3 - \frac{3(t+1)}{2}x^2 + 3tx + 1$,

(1) 存在 $x_0 \in (0, 2)$, 使得 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值, 求 t 的取值范围;

(2) $f(x) \leq xe^x - m + 2$ 对任意 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立时, m 的最大值为 1, 求 t 的取值范围。

(二) 选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。答题时请写清题号并将相应信息点涂黑。

(22) (本小题满分 10 分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{2} \cos \alpha \\ y = 2 + 2\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以直角坐标系原点 O 为极

点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系。

(1) 求曲线 C 的极坐标方程;

(2) 设 $l_1: \theta = \frac{\pi}{3}$, $l_2: \theta = \frac{\pi}{6}$, 若 l_1, l_2 与曲线 C 相交于异于原点的两点 A, B , 求 $\triangle ABO$ 的面积。

(23) (本小题满分 10 分) [选修 4-5: 不等式选讲]

设函数 $f(x) = |x-2| - |2x+1|$.

(1) 解不等式 $f(x) \leq 0$;

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - 2m^2 \leq 4m$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围

答案解析

一. 选择题 (共 12 小题)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	B	B	A	A	C	C	D	C	A	A

1. $A = [-1, 2]$, $B = (-\infty, 1)$, $A \cap B = [-1, 1)$, 故选 B

$$2. z = \frac{6}{1+i} = \frac{6(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 3-3i \text{ 故选 D.}$$

3. 本题主要考查 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率公式. 故选 B

$$4. a_4 + a_5 = a_1 q^3 + a_2 q^3 = 4, \text{ 解得 } q^3 = 2,$$

$$a_{10} + a_{11} = a_1 q^9 + a_2 q^9 = (a_1 + a_2) q^9 = 2 \times 2^3 = 16. \text{ 故选 B}$$

$$5. f(x+4) = -\frac{1}{f(x+2)} = f(x), \therefore \text{周期 } T = 4; f(2018) = f(4 \times 504 + 2) = f(2)$$

$$= f(-2) = -2. \text{ 故选 A}$$

$$6. \text{由题意 } 2^n = 512 = 2^9, n = 9, T_{r+1} = C_9^r (x^{\frac{1}{2}})^{9-r} (-ax^{-1})^r = (-a)^r C_9^r x^{\frac{9-3r}{2}}, 9-3r = 0$$

$$r = 3, (-a)^3 C_9^3 = -84, a = 1. \text{ 故选 A}$$

$$7. \text{直观图是三条侧棱两两垂直的三棱锥, 且侧棱长都为 } 2, V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}. \text{ 故选 c}$$

$$8. S = 1, n = 1, S = 1 + 2^1 = 3; n = 2, S = 3 + 2^2 = 7; n = 3, S = 7 + 2^3 = 15;$$

$$n = 4, S = 15 + 2^4 = 31; n = 5, S = 31 + 2^5 = 63 \geq 33, \text{ 输出的 } S = 63. \text{ 故选 c.}$$

$$9. \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$$

4000-121-121

$$\therefore \cos\left(2x - \frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \pi\right] = -\cos 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 - 2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{7}{9}$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1 - \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

$$\therefore \cos\left(2x - \frac{5\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{7}{9} + \frac{8}{9} = \frac{5}{3}. \text{ 故选 D}$$

10 圆 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $\triangle PAC, \triangle PBC$ 是直角三角形, $|AC|=1$, 所以当 $|PC|$ 最小

时, $|PA|, |PB|$ 有最小值, $|PC|_{\min} = \frac{3-4+11}{5} = 2$, $|PA|_{\min} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$,

$$S_{PACB} = S_{\triangle PAC} + S_{\triangle PBC} = 2S_{\triangle PAC} = |PA||AC| \geq \sqrt{3}. \text{ 故选 C}$$

11、设 $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$, $F'(x) = f'(x) - \frac{1}{2} < 0$, 即 $F(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递减

Q $f(x^2) < \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, $\therefore f(x^2) - \frac{1}{2}x^2 < f(1) - \frac{1}{2}$, 即 $F(x^2) < F(1)$, $x^2 > 1$, 解得 $x > 1$ 或 $x < -1$. 故选 A

12. $f(x) = \frac{x}{1+x} (x > 0)$, 则 $a_{n+1} = f(a_n) = \frac{a_n}{1+a_n}$,

$$\text{得 } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1, \text{ 即 } \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1,$$

∴ 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 2、公差为 1 的等差数列, $\therefore \frac{1}{a_n} = n+1$, 即 $a_n = \frac{1}{n+1}$.

∴ $[f(x)]' = \frac{1}{(1+x)^2}$, ∴ 函数 $f(x)$ 在点 $(n, f(n)) (n \in \mathbf{N}^*)$ 处的切线方程为:

$$y - \frac{n}{1+n} = \frac{1}{(1+n)^2}(x-n), \text{ 令 } x=0, \text{ 得 } b_n = \frac{n}{1+n} - \frac{n}{(1+n)^2} = \frac{n^2}{(1+n)^2}.$$

4000-121-121

$$\therefore \frac{b_n}{a_n^2} + \frac{\lambda}{a_n} = n^2 + \lambda(n+1) = \left(n + \frac{\lambda}{2}\right)^2 + \lambda - \frac{\lambda^2}{4}, \text{ 仅当 } n=5 \text{ 时取得最小值,}$$

只需 $4.5 < -\frac{\lambda}{2} < 5.5$, 解得 $-11 < \lambda < -9$, 故 λ 的取值范围为 $(-11, -9)$.

故选 A

二、填空题 (共 4 小题)

13. $2\sqrt{5}$ 14. 1 15. $\frac{2017}{2018}$ 16. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

$$13、\left| \frac{\vec{r}}{2a-b} \right| = \sqrt{\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{(2a-b)^2}} = \sqrt{\frac{\vec{r}_1^2 + \vec{r}_2^2 - 4\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{(2a-b)^2}} = \sqrt{\frac{16+4}{(2a-b)^2}} = 2\sqrt{5}$$

14、作出可行域, z 表示可行域内的点 (x, y) 与点 $(-2, 0)$ 之间的斜率, 当过点 $(1, 3)$ 时, z 有最大值 1.

15、 $S_{11} = 11a_6 = 66$, $a_6 = 6$, 又 $a_7 = 7$, 可得 $a_n = n$,

$$\therefore \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_{2017} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} = 1 - \frac{1}{2018} = \frac{2017}{2018}.$$

16、 $A(-a, 0), B(a, 0)$, 设 $P(x, y)$, 则 $\vec{PO} = (-x, -y), \vec{PB} = (a-x, -y)$,

$$\vec{PO} \cdot \vec{PB} = 0, (a-x)(-x) + y^2 = 0, \text{ 得 } y^2 = ax - x^2 > 0, \therefore 0 < x < a$$

将 $y^2 = ax - x^2$ 代入 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 整理得 $(b^2 - a^2)x^2 + a^3x - a^2b^2 = 0$,

其在 $(0, a)$ 上有解。设 $f(x) = (b^2 - a^2)x^2 + a^3x - a^2b^2$, $Q f(0) = -a^2b^2 < 0, f(a) = 0$



$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ 0 < -\frac{a^3}{2(b^2-a^2)} < a \end{cases} \quad (\Delta \text{和对称轴}), \text{解得 } \frac{c^2}{a^2} > \frac{1}{2}, \text{又 } 0 < e < 1, \therefore \frac{\sqrt{2}}{2} < e < 1$$

17. (1) $2b \cos C - 2a + c = 0$, 由余弦定理得:

$$2b \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - 2a + c = 0, \text{-----} 2 \text{分}$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 - b^2 = ac, \text{-----} 3 \text{分}$$

$$\text{则 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2} \text{-----} 5 \text{分}$$

$$\because 0 < B < \pi \quad \therefore B = \frac{\pi}{3}. \text{-----} 7 \text{分}$$

(2) 设 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 R , 由正弦定理知

$$2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{-----} 9 \text{分}$$

$$R = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{-----} 10 \text{分}$$

则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心到 AC 边的距离

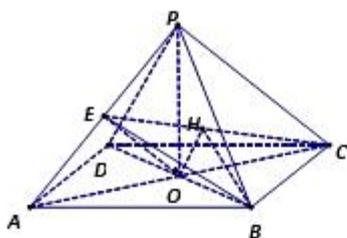
$$d = \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{-----} 12 \text{分}$$

18. (1) 因为底面是菱形, 所以 $BD \perp AC$. ----- 1分

又 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BD \perp PO$. ----- 2分

$PO \cap AC = O$, 所以 $BD \perp$ 面 PAC . ----- 3分

又 $PA \subset \text{面} PAC$, 所以 $PA \perp BD$. ----- 4分



(2) 由 (1)

在 $Rt\triangle POA$ 中, $OE = \sqrt{6}$, $\therefore PA = 2\sqrt{6}$, $PO = \sqrt{PA^2 - AO^2} = 2\sqrt{3}$, ----- 6分

方法一:

过 O 做 $OH \perp EC$ 于 H , 连 BH , 则 $BH \perp EC$,

所以 $\angle OHB$ 是二面角 $A-EC-B$ 的平面角. ----- 7分

在 $\triangle PAC$ 中, $PA = PC = 2\sqrt{6}$, $AC = 4\sqrt{3}$, 所以 $PA^2 + PC^2 = AC^2$, 即 $AP \perp PC$.

所以 $CE = \sqrt{PC^2 + PE^2} = \sqrt{30}$. ----- 9分

$S_{\triangle EOC} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot \left(\frac{1}{2} PO\right) = \frac{1}{2} EC \cdot OH$, 得 $OH = \frac{\sqrt{30}}{5}$, ----- 10分

$BH = \frac{\sqrt{130}}{5}$, $\cos \angle OHB = \frac{OH}{BH} = \frac{\sqrt{39}}{13}$, 所以二面角 $A-EC-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$.

----- 12分

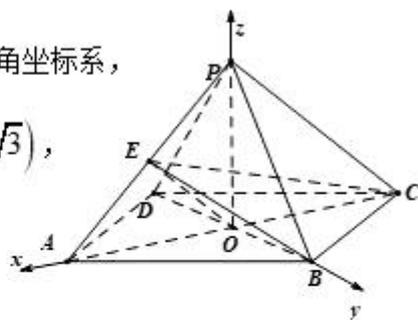
方法二:

如图,以 OA, OB, OP 所在直线为 x, y, z 轴,建立空间直角坐标系,

$$A(2\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 2, 0), C(-2\sqrt{3}, 0, 0), P(0, 0, 2\sqrt{3}),$$

$$E(\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}), \overline{CB} = (2\sqrt{3}, 2, 0),$$

$$\overline{CE} = (3\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}). \quad \text{----- 8分}$$



$$\text{设面 } BEC \text{ 的法向量为 } \vec{n} = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \overline{CB} \perp \vec{n} \\ \overline{CE} \perp \vec{n} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \overline{CB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overline{CE} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \sqrt{3}x + y = 0 \\ 3\sqrt{3}x + \sqrt{3}z = 0 \end{cases},$$

$$\text{得方程的一组解为 } x = -1, y = \sqrt{3}, z = 3, \text{ 即 } \vec{n} = (-1, \sqrt{3}, 3). \quad \text{----- 9分}$$

$$\text{又面 } AEC \text{ 的一个法向量为 } \overline{OB} = (0, 1, 0), \quad \text{----- 10分}$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overline{OB}, \vec{n} \rangle = \frac{\overline{OB} \cdot \vec{n}}{|\overline{OB}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{39}}{13}, \text{ 所以二面角 } A-EC-B \text{ 的余弦值为 } \frac{\sqrt{39}}{13}.$$

----- 12分

$$19. \text{ 解: (1) 由列联表可得 } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{100}{99} \approx 1.01 \quad \text{----- 3分}$$

$$\because 0.708 < 1.01 < 1.321$$

\therefore 没有 75% 的把握认为“手机控”与“性别”有关 ----- 5分

(2) 依题意知: 所抽取的 5 位女性中“手机控”有 3 人, “非手机控”有 2 人

$\therefore X$ 的可能值为 1, 2, 3. ----- 7分

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}, P(X=2) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5}, P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10} \quad \text{----- 10分}$$

∴ X 的分布列是：

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

-----11分

赠送话费的期望是 $500E(X) = 500(1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10}) = 900$ -----12分

20. (1) 设椭圆的焦半距为 c ，抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线为 $x = -1$ ，∴ $c = 1$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \therefore a = 2, b^2 = a^2 - c^2 = 3$$

所以椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. ----- 4分

(2) 由题意直线不能与 x 轴垂直，否则将无法构成三角形.

设其斜率为 k ，那么直线 l 的方程为 $y = kx + 1$. ----- 5分

联立 l 与椭圆 C 的方程，消去 y ，得 $(4k^2 + 3)x^2 + 8kx - 8 = 0$.

$$\Delta = 64k^2 + 32(4k^2 + 3) > 0.$$

设点 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ 得 $x_1 + x_2 = -\frac{8k}{4k^2 + 3}$, $x_1 x_2 = -\frac{8}{4k^2 + 3}$ ----- 7分

所以 $|MN| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{6}\sqrt{(2k^2+1)(k^2+1)}}{4k^2+3}$, ----- 8分

又 O 到 l 的距离 $d = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

所以 $\triangle OMN$ 的面积 $S = \frac{1}{2} d |MN| = \frac{2\sqrt{6}\sqrt{2k^2+1}}{4k^2+3}$. -----9分

设 $t = \sqrt{2k^2+1} (t \geq 1)$ 令, 那么 $2k^2 = t^2 - 1$, $4k^2 + 3 = 2t^2 + 1$

$\therefore S = \frac{2\sqrt{6}t}{2t^2+1} = \frac{2\sqrt{6}}{2t+\frac{1}{t}}$, -----10分

因为 $f(x) = \frac{2\sqrt{6}}{2x+\frac{1}{x}} (x \geq 1)$ 是减函数 -----11分

所以当 $x=1$ 时, $S_{\min} = \frac{2\sqrt{6}}{2+1} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

所以 $\triangle OMN$ 面积的最大值是 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. -----12分

21. (1) $f'(x) = 3x^2 - 3(t+1)x + 3t = 3(x-1)(x-t)$, -----1分

①当 $0 < t < 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, t)$ 上单调递增, 在 $(t, 1)$ 单调递减, 在 $(1, 2)$ 单调递增,

$\therefore f(t) \geq f(2)$, 由 $f(t) \geq f(2)$, 得 $-t^3 + 3t^2 \geq 4$, $-t^3 + 3t^2 \geq 4$ 在 $0 < t < 1$ 时无解,

-----2分

②当 $t=1$ 时, 不合题意; -----3分

③当 $1 < t < 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 在 $(1, t)$ 递减, 在 $(t, 2)$ 单调递增,

$$\therefore \begin{cases} f(1) \geq f(2) \\ 1 < t < 2 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t \geq 3 \\ 1 < t < 2 \end{cases}, \therefore \frac{5}{3} \leq t < 2, \text{ -----4分}$$

④当 $t \geq 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增, 在 $(1,2)$ 单调递减, 满足条件, -----5分

综上所述: $t \in [\frac{5}{3}, +\infty)$ 时, 存在 $x_0 \in (0,2)$, 使得 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值.

-----6分

(2) $x^3 - \frac{3(t+1)}{2}x^2 + 3tx + 1 \leq xe^x - m + 2$ 对任意 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立,

即 $m \leq xe^x - x^3 + \frac{3(t+1)}{2}x^2 - 3tx + 1 = x(e^x - x^2 + \frac{3(t+1)}{2}x - 3t) + 1$ 对任意 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立, -----7分

令 $g(x) = e^x - x^2 + \frac{3(t+1)}{2}x - 3t, x \in [0, +\infty)$,

根据题意, 可以知道 m 的最大值为 1,

则 $g(x) = e^x - x^2 + \frac{3(t+1)}{2}x - 3t \geq 0$ 恒成立, -----8分

由于 $g(0) = 1 - 3t \geq 0$, 则 $0 < t \leq \frac{1}{3}$,

当 $0 < t \leq \frac{1}{3}$ 时, $g'(x) = e^x - 2x + \frac{3(t+1)}{2}$, -----9分

设 $m(x) = g'(x) = e^x - 2x + \frac{3(t+1)}{2}$ 则 $m'(x) = e^x - 2$,

$m'(x) = e^x - 2 < 0$, 得 $0 < x < \ln 2$, $m'(x) = e^x - 2 > 0$, $x > \ln 2$ -----10分

则 $g'(x)$ 在 $(0, \ln 2)$ 上递减, 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上递增, 则

4000-121-121

$$g'(x)_{\min} = g(\ln 2) = 2 + \frac{3}{2}(t+1) - 2\ln 2 > 0, \text{-----11分}$$

$\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数.

$$\therefore g(x) \geq g(0) = 1 - 3t \geq 0, \text{ 满足条件, } \therefore t \text{ 的取值范围是 } (0, \frac{1}{3}]. \text{-----12分}$$

22. (1) \because 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{2} \cos \alpha \\ y = 2 + 2\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数)

$$\therefore \text{曲线的普通方程为 } (x-2)^2 + (y-2)^2 = 8 \text{ 即 } x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \text{2分}$$

将 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 代入并化简得: $\rho = 4 \cos \theta + 4 \sin \theta$

即曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta + 4 \sin \theta$5分

(2) 由 $\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{3} \\ \rho = 4 \cos \theta + 4 \sin \theta \end{cases}$ 得到 $|OA| = \rho_1 = 2 + 2\sqrt{3}$ 7分

同理 $|OB| = \rho_2 = 2 + 2\sqrt{3}$9分

$$\text{又} \because \angle AOB = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |OA| |OB| \sin \angle AOB = 4 + 2\sqrt{3}.$$

即 $\triangle AOB$ 的面积为 $4 + 2\sqrt{3}$10分

23. (1) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow |x-2| \leq |2x+1|$ 1分

两边平方, 化简得 $(x+3)(3x-1) \geq 0$ 3分

$$x \leq -3 \text{ 或 } x \geq \frac{1}{3} \text{4分}$$



原不等式的解集为 $(-\infty, -3] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$ 。.....5分

$$(2) \because f(x) = |x-2| - |2x+1| = \begin{cases} -x-3, & x \geq 2 \\ 1-3x, & -\frac{1}{2} < x < 2 \\ x+3, & x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}, \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$\therefore f(x)_{\max} = f(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{2} \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

所以 $f(x) - 2m^2 \leq 4m$ 恒成立，等价于 $f(x)$ 的最大值小于等于 $2m^2 + 4m$ 8分

$$\text{即 } 2m^2 + 4m \geq \frac{5}{2},$$

$$\text{解得 } m \geq \frac{1}{2} \text{ 或 } m \leq -\frac{5}{2}. \dots\dots\dots 10 \text{分}$$



高中生52
获取更多政策资讯



深圳智康-高中家长群
扫一扫二维码，加入该群。

4000-121-121



您身边的学习中心：

红荔上步学习中心

福田区红荔路 2001 号四川大厦 1 层

服务电话：83511951

园岭学习中心

福田区红岭中路南国大厦（星光广场）2 层

服务电话：22917879

景田学习中心

福田区景田北街 48 号景田东海银座

3 层 301 室/

福田区景田北街名进投资大厦（香梅酒店）

4 层学而思 1 对 1

服务电话：83175886/82528815

花园城学习中心

南山区南海大道 1081 号豪方悠然居六洲商

务中心 2 层 87 室

服务电话：22675136

百花学习中心

福田区百花二路百合阁 3 层

服务电话：83482283

海月学习中心

南山区工业八路 157 号（近工业八路）

服务电话：83999896

大新学习中心

南山区南头街道办前海路 3005 号（港湾丽

都）裙楼 2 层

服务电话：26971702

益田学习中心

福田区福强路 3004 号中港城裙楼 2 层

服务电话：83209432

农林学习中心

福田区红荔西路 8076 号荔林苑三层

服务电话：23601670