

等差数列

疑难点解析:

1. 数列的概念应注意几点: (1) 数列中的数是按一定的次序排列的, 如果组成的数相同而排列次序不同, 则就是不同的数列; (2) 同一数列中可以出现多个相同的数; (3) 数列看做一个定义域为正整数集或其有限子集({1, 2, 3, ..., n})的函数. _

2. 一个数列的通项公式通常不是唯一的. _

3. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 S_n 与 a_n 之间的关系: $a_n = \begin{cases} S_1 & (n=1), \\ S_n - S_{n-1} & (n \geq 2). \end{cases}$ 若 a_1 适合

$a_n (n \geq 2)$, 则 a_n 不用分段形式表示, 切不可不求 a_1 而直接求 a_n . _

4. 从函数的角度考查等差数列的通项公式: $a_n = a_1 + (n-1)d = d \cdot n + a_1 - d$, a_n 是关于 n 的一次式; 从图像上看, 表示等差数列的各点 (n, a_n) 均匀排列在一条直线上, 由两点确定一条直线的性质, 不难得出, 任两项可以确定一个等差数列. _

5. 对等差数列的前 n 项之和公式的理解: 等差数列的前 n 项之和公式可变形为

$$S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n, \text{ 若令 } A = \frac{d}{2}, B = a_1 - \frac{d}{2}, \text{ 则 } S_n = An^2 + Bn. _$$

6. 在解决等差数列问题时, 如已知, a_1, a_n, d, S_n, n 中任意三个, 可求其余两个。

经典例题解析:

例 1: 已知数列 1, 4, 7, 10, ..., $3n+7$, 其中后一项比前一项大 3. (1) 指出这个数列的通项公式; (2) 指出 $1+4+\dots+(3n-5)$ 是该数列的前几项之和. _

错解: (1) $a_n = 3n+7$; _

(2) $1+4+\dots+(3n-5)$ 是该数列的前 n 项之和. _

错因: 误把最后一项 (含 n 的代数式) 看成了数列的通项. (1) 若令 $n=1, a_1=10 \neq 1$, 显然 $3n+7$ 不是它的通项. _

正解: (1) $a_n = 3n-2$; _

(2) $1+4+\dots+(3n-5)$ 是该数列的前 $n-1$ 项的和. _

例 2: 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和为① $S_n = 2n^2 - n$ ② $S_n = n^2 + n + 1$ _

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式. _

错解: ① $a_n = 2n^2 - n - 2(n-1)^2 + (n-1) = 4n - 3$ _

$$\text{② } a_n = n^2 + n + 1 - (n-1)^2 - (n-1) - 1 = 2n _$$

错因: 在对数列概念的理解上, 仅注意了 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 与的关系, 没注意 $a_1 = S_1$. _

正解: ①当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 1$ _

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = 2n^2 - n - 2(n-1)^2 + (n-1) = 4n - 3 _$$

经检验 $n=1$ 时 $a_1=1$ 也适合, $\therefore a_n = 4n - 3$

②当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 3$

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = n^2 + n + 1 - (n-1)^2 - (n-1) - 1 = 2n$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 3 & (n=1) \\ 2n & (n \geq 2) \end{cases}$$

例 3: 等差数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 、 T_n . 若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{7n+1}{4n+27} (n \in N_+)$, 求 $\frac{a_7}{b_7}$;

错解: 因为等差数列的通项公式是关于 n 的一次函数, 故由题意令 $a_n=7n+1; b_n=4n+27$.

$$\therefore \frac{a_7}{b_7} = \frac{7 \times 7 + 1}{4 \times 7 + 27} = \frac{10}{11}$$

错因: 误认为 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{a_n}{b_n}$

正解: $\therefore \frac{a_7}{b_7} = \frac{a_7 + a_7}{b_7 + b_7} = \frac{S_{13}}{T_{13}} = \frac{7 \times 13 + 1}{4 \times 13 + 27} = \frac{92}{79}$

例 4: 已知一个等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=25-5n$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和;

错解: 由 $a_n \geq 0$ 得 $n \leq 5$

$\therefore \{a_n\}$ 前 5 项为非负, 从第 6 项起为负,

$$\therefore S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 50 (n \leq 5)$$

$$\text{当 } n \geq 6 \text{ 时, } S_n = |a_6| + |a_7| + |a_8| + \dots + |a_n| = \frac{(20-5n)(n-5)}{2}$$

$$\therefore S_n = \begin{cases} 50, & n \leq 5 \\ \frac{(20-5n)(n-5)}{2}, & n \geq 6 \end{cases}$$

错因: 一、把 $n \leq 5$ 理解为 $n=5$, 二、把“前 n 项和”误认为“从 $n \geq 6$ 起”的和.

正解:
$$\begin{cases} \frac{n(45-5n)}{2}, & n \leq 5 \\ \frac{(20-5n)(n-5)}{2} + 50, & n \geq 6 \end{cases}$$

例 5: 已知一个等差数列的前 10 项的和是 310, 前 20 项的和是 1220,

由此可以确定求其前 n 项和的公式吗? _

解: 理由如下: 由题设: $S_{10} = 310$ $S_{20} = 1220$ _

$$\text{得: } \begin{cases} 10a_1 + 45d = 310 \\ 20a_1 + 190d = 1220 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ d = 6 \end{cases}$$

$$\therefore S_n = 4n + \frac{n(n-1)}{2} \times 6 = 3n^2 + n$$

例 6: 项数是 $2n$ 的等差数列, 中间两项为 a_n 和 a_{n+1} 是方程 $x^2 - px + q = 0$ 的两根, 求证

此数列的和 S_{2n} 是方程 $\lg^2 x - (\lg n^2 + \lg p^2) \lg x + (\lg n + \lg p)^2 = 0$ 的根。

($S_{2n} > 0$) 证明: 依题意 $a_n + a_{n+1} = p$

$$\therefore a_1 + a_{2n} = a_n + a_{n+1} = p \quad \therefore S_{2n} = \frac{2n(a_1 + a_{2n})}{2} = np$$

$$\therefore \lg^2 x - (\lg n^2 + \lg p^2) \lg x + (\lg n + \lg p)^2 = 0$$

$$\therefore (\lg x - \lg np)^2 = 0 \quad \therefore x = np = S_{2n}$$

等比数列

疑难点解析:

1. 由于等比数列的每一项都可能作分母, 故每一项均不为 0, 因此 q 也不为 0. _
2. 对于公比 q , 要注意它是每一项与它前一项的比, 防止把相邻两项的比的次序颠倒. _
3. “从第 2 项起”是因为首项没有“前一项”, 同时应注意如果一个数列不是从第 2 项起, 而是从第 3 项或第 4 项起每一项与它前一项的比都是同一个常数, 此数列不是等比数列, 这时可以说此数列从第 2 项或第 3 项起是一个等比数列. _
4. 在已知等比数列的 a_1 和 q 的前提下, 利用通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$, 可求出等比数列中的任意一项.
5. 在已知等比数列中任意两项的前提下, 使用 $a_n = a_m q^{n-m}$ 可求等比数列中任意一项.
6. 等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$ 可改写为 $a_n = \frac{a_1}{q} \cdot q^n$. 当 $q > 0$, 且 $q \neq 1$ 时, $y = q^x$ 是

一个指数函数, 而 $y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$ 是一个不为 0 的常数与指数函数的积, 因此等比数列

$\{a_n\}$ 的图象是函数 $y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$ 的图象上的一群孤立的点.

7. 在解决等比数列问题时, 如已知, a_1 , a_n , d , S_n , n 中任意三个, 可求其余两个。

典型例题解析:

例 1: 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 $S_n = aq^n$ ($a \neq 0, q \neq 1, q$ 为非零常数), 则 $\{a_n\}$ 为 ()。

- A. 等差数列
 B. 等比数列
 C. 既不是等差数列, 也不是等比数列
 D. 既是等差数列, 又是等比数列

错解: $\because a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = aq^{n+1} - aq^n = aq^n(q-1)$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = aq^{n-1}(q-1)$$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (\text{常数})$$

$\therefore \{a_n\}$ 为等比数列, 即 B。

错因: 忽略了 $\therefore a_n = S_n - S_{n-1}$ 中隐含条件 $n > 1$ 。

正解: 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = aq$;

当 $n > 1$ 时, $\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = aq^{n-1}(q-1)$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (\text{常数})$$

$$\text{但} \therefore \frac{a_2}{a_1} = q-1 \neq q$$

$\therefore \{a_n\}$ 既不是等差数列, 也不是等比数列, 选 C。

例 2: 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和记为 S_n , $S_{10}=10$, $S_{30}=70$, 则 S_{40} 等于。

错解: $S_{30} = S_{10} \cdot q^2$. $\therefore q^2 = 7$, $q = \pm\sqrt{7}$, $\therefore S_{40} = S_{30} \cdot q = \pm 70\sqrt{7}$ 。

错因: 是将等比数列中 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}$ 成等比数列误解为 S_m, S_{2m}, S_{3m} 成等比数列。

$$\text{正解: 由题意: } \begin{cases} \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = 10 \\ \frac{a_1(1-q^{30})}{1-q} = 70 \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = -10 \\ q^{10} = 2 \text{ 或 } q^{10} = -3 \text{ (舍去)} \end{cases},$$

$$\therefore S_{40} = \frac{a_1}{1-q}(1-q^{40}) = 200.$$

例 3: 设 a, b, c, d 均为非零实数, $(a^2 + b^2)d^2 - 2b(a+c)d + b^2 + c^2 = 0$,

求证: a, b, c 成等比数列且公比为 d 。

证明: 关于 d 的二次方程 $(a^2 + b^2)d^2 - 2b(a+c)d + b^2 + c^2 = 0$ 有实根,

$$\therefore \Delta = 4b^2(a+c)^2 - 4(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) \geq 0, \therefore -(b^2 - ac)^2 \geq 0$$

则必有: $b^2 - ac = 0$, 即 $b^2 = ac$, \therefore 非零实数 a, b, c 成等比数列

设公比为 q , 则 $b = aq, c = aq^2$ 代入

$$(a^2 + a^2q^2)d^2 - 2aq(a + aq^2)d + a^2q^2 + a^2q^4 = 0$$

$$\therefore (q^2 + 1)d^2 \neq 0, \text{ 即 } d^2 - 2qd + q^2 = 0, \text{ 即 } d = q \neq 0。$$

例 4: 在等比数列 $\{b_n\}$ 中, $b_4 = 3$, 求该数列前 7 项之积。

$$\text{解: } b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7 = (b_1b_7)(b_2b_6)(b_3b_5)b_4$$

$$\therefore b_4^2 = b_1b_7 = b_2b_6 = b_3b_5, \therefore \text{前七项之积 } (3^2)^3 \times 3 = 3^7 = 2187$$

例 5: 求数列 $\{n \times \frac{1}{2^n}\}$ 前 n 项和

$$\text{解: } S_n = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + \dots + n \times \frac{1}{2^n} \quad \text{①}$$

$$\frac{1}{2}S_n = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{16} + \dots + (n-1) \times \frac{1}{2^n} + n \times \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{②}$$

$$\text{两式相减: } \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} - n \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$\therefore S_n = 2(1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n}$$

例 6: 从盛有质量分数为 20% 的盐水 2kg 的容器中倒出 1kg 盐水, 然后加入 1kg 水, 以后每次都倒出 1kg 盐水, 然后再加入 1kg 水,

问: (1) 第 5 次倒出的 1kg 盐水中含盐多 kg?

(2) 经 6 次倒出后, 一共倒出多少 kg 盐? 此时加 1kg 水后容器内盐水的盐的质量分数为多少?

解: (1) 每次倒出的盐的质量所成的数列为 $\{a_n\}$, 则:

$$a_1 = 0.2 \text{ (kg)}, \quad a_2 = \frac{1}{2} \times 0.2 \text{ (kg)}, \quad a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 0.2 \text{ (kg)}$$

由此可见: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times 0.2 \text{ (kg)}$, $a_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} \times 0.2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 0.2 = 0.0125 \text{ (kg)}$ 。

(2) 由(1)得 $\{a_n\}$ 是等比数列 $a_1 = 0.2$, $q = \frac{1}{2}$

$$\therefore S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{0.2(1-\frac{1}{2^6})}{1-\frac{1}{2}} = 0.39375(kg)$$

$$0.4 - 0.39375 = 0.00625(kg)$$

$$0.00625 \div 2 = 0.003125(kg)$$

答: 第5次倒出的的1kg盐水中含盐0.0125kg; 6次倒出后, 一共倒出0.39375kg盐, 此时加1kg水后容器内盐水的盐的质量分数为0.003125。