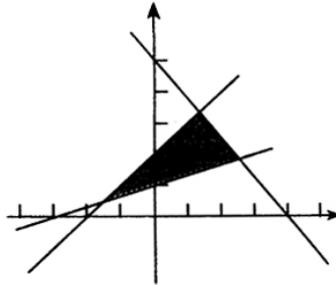


**经典例题 1:**

画出不等式组  $\begin{cases} -x + y - 2 \leq 0, \\ x + y - 4 \leq 0, \\ x - 3y + 3 \leq 0. \end{cases}$  表示的平面区域.

**分析:** 采用“图解法”确定不等式组每一不等式所表示的平面区域，然后求其公共部分.



**解:** 把  $x=0, y=0$  代入  $-x+y-2$  中得  $-0+0-2 < 0$

$\therefore$  不等式  $-x+y-2 \leq 0$  表示直线  $-x+y-2=0$  下方的区域 (包括边界),

即位于原点的一侧, 同理可画出其他两部分, 不等式组所表示的区域如图所示.

**说明:** “图解法”是判别二元一次不等式所表示的区域行之有效的一种方法.

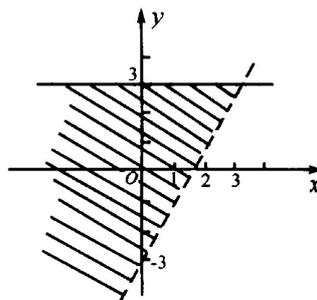
**经典例题 2:**

画出  $2x-3 < y \leq 3$  表示的区域, 并求所有的正整数解  $(x, y)$ .

**分析:** 原不等式等价于  $\begin{cases} y > 2x-3, \\ y \leq 3. \end{cases}$  而求正整数解则意味着  $x, y$  还有限制条件, 即求

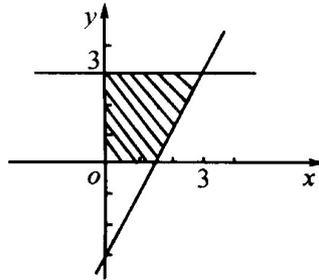
$$\begin{cases} x > 0, y > 0, \\ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, \\ y > 2x-3, \\ y \leq 3. \end{cases}$$

**解:** 依照二元一次不等式表示的平面区域, 知  $2x-3 < y \leq 3$  表示的区域如下图:



对于  $2x - 3 < y \leq 3$  的正整数解, 先画出不等式组  $\begin{cases} x > 0, y > 0, \\ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, \\ y > 2x - 3, \\ y \leq 3. \end{cases}$  所表示的平面区域, 如图

所示.



容易求得, 在其区域内的整数解为  $(1, 1)$ 、 $(1, 2)$ 、 $(1, 3)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(2, 3)$ .

**说明:** 这类题可以将平面直角坐标系用网络线画出来, 然后在不等式组所表示的平面区域内找出符合题设要求的整数点来.

**经典例题 3:**

求不等式组  $\begin{cases} y \geq |x+1| - 1 \\ y \leq -|x| + 1 \end{cases}$  所表示的平面区域的面积.

**分析:** 本题的关键是能够将不等式组所表示的平面区域作出来, 判断其形状进而求出其面积. 而要将平面区域作出来的关键又是能够对不等式组中的两个不等式进行化简和变形, 如何变形? 需对绝对值加以讨论.

**解:** 不等式  $y \geq |x+1| - 1$  可化为  $y \geq x (x \geq -1)$  或  $y \geq -x - 2 (x < -1)$ ;

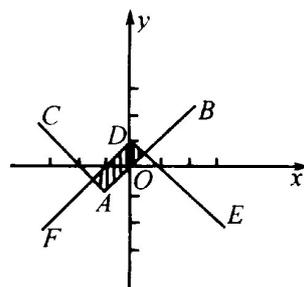
不等式  $y \leq -|x| + 1$  可化为  $y \leq -x + 1 (x \geq 0)$  或  $y \leq x + 1 (x < 0)$ .

在平面直角坐标系内作出四条射线

$AB: y = x (x \geq -1), \quad AC: y = -x - 2 (x < -1)$

$DE: y = -x + 1 (x \geq 0), \quad DF: y = x + 1 (x < 0)$

则不等式组所表示的平面区域如图



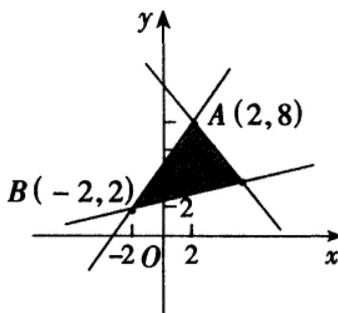
由于  $AB$  与  $AC$ 、 $DE$  与  $DF$  互相垂直，  
所以平面区域是一个矩形。

根据两条平行线之间的距离公式可得矩形的两条边的长度分别为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  和  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 。

所以其面积为  $\frac{3}{2}$ 。

**经典例题 4:** 若  $x$ 、 $y$  满足条件 
$$\begin{cases} 2x + y - 12 \leq 0, \\ 3x - 2y + 10 \geq 0, \\ x - 4y + 10 \leq 0. \end{cases}$$
 求  $z = x + 2y$  的最大值和最小值。

**分析:** 画出可行域，平移直线找最优解。



**解:** 作出约束条件所表示的平面区域，即可行域，如图所示。

作直线  $l: x + 2y = z$ ，即  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{z}{2}$ ，它表示斜率为  $-\frac{1}{2}$ ，纵截距为  $\frac{z}{2}$  的平行直线系，当它在可行域内滑动时，由图可知，直线  $l$  过点  $A$  时， $z$  取得最大值，当  $l$  过点  $B$  时， $z$  取得最小值。

$$\therefore z_{\max} = 2 + 2 \times 8 = 18 \quad \therefore z_{\min} = -2 + 2 \times 2 = 2$$

**说明:** 解决线性规划问题，首先应明确可行域，再将线性目标函数作平移取得最值。

### 经典例题 5:

用不等式表示以  $A(1, 4)$ ， $B(-3, 0)$ ， $C(-2, -2)$  为顶点的三角形内部的平面区域。

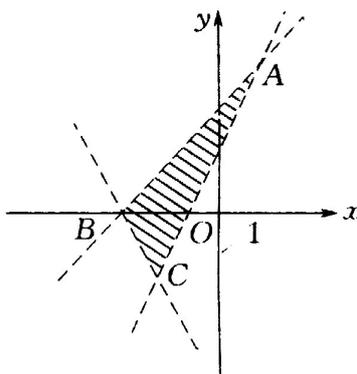
**分析:** 首先要将三点中的任意两点所确定的直线方程写出来，然后结合图形考虑三角形内部区域应怎样表示。

**解:** 直线  $AB$  的斜率为:  $k_{AB} = \frac{4-0}{1-(-3)} = 1$ ，其方程为  $y = x + 3$ 。

可求得直线  $BC$  的方程为  $y = -2x - 6$ 。直线  $AC$  的方程为  $y = 2x + 2$ 。

$\triangle ABC$  的内部在不等式  $x - y + 3 > 0$  所表示平面区域内，同时在不等式  $2x + y + 6 > 0$  所表

示的平面区域内，同时又在不等式  $2x - y + 2 < 0$  所表示的平面区域内（如图）。



所以已知三角形内部的平面区域可由不等式组 
$$\begin{cases} x - y + 3 > 0, \\ 2x + y + 6 > 0, \\ 2x - y + 2 < 0 \end{cases}$$
 表示。

**说明：**用不等式组可以用来平面内的一定区域，注意三角形区域内部不包括边界线。

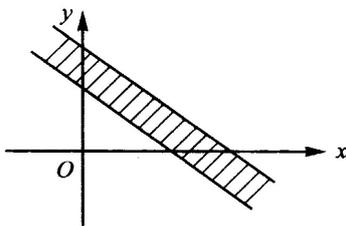
### 经典例题 6：

已知  $x + y - 5 \geq 0$ ， $x + y - 10 \leq 0$ 。求  $x^2 + y^2$  的最大、最小值。

**分析：**令  $z = x^2 + y^2$ ，目标函数是非线性的。而  $z = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$  可看做区域内的点到原点距离的平方。问题转化为点到直线的距离问题。

**解：**由  $\begin{cases} x + y - 5 \geq 0, \\ x + y - 10 \leq 0, \end{cases}$  得可行域(如图所示)为  $z = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$ ，而  $(0, 0)$  到

$x + y - 5 = 0$ ， $x + y - 10 = 0$  的距离分别为  $\frac{5}{\sqrt{2}}$  和  $\frac{10}{\sqrt{2}}$ 。



所以  $z$  的最大、最小值分别是 50 和  $\frac{25}{2}$ 。

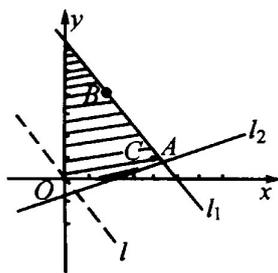
**说明：**题目中的目标函数是非线性的。解决的方法类似于线性规划问题。可做出图，利用图进行直观的分析。

### 经典例题 7：

设  $z = 7x + 5y$  式中的变量  $x$ 、 $y$  满足下列条件  $\begin{cases} 4x + 3y - 20 \leq 0, \\ x - 3y - 2 \leq 0, \\ x \in N^*, y \in N^*. \end{cases}$  求  $z$  的最大值.

**分析:** 先作出不等式组所表示的可行域, 需要注意的是这里的  $x, y \in N^*$ , 故只是可行域内的整数点, 然后作出与直线  $7x + 5y = 0$  平等的直线再进行观察.

**解:** 作出直线  $l_1: 4x + 3y - 20 = 0$  和直线  $l_2: x - 3y - 2 = 0$ , 得可行域如图所示.



解方程组  $\begin{cases} 4x + 3y - 20 = 0 \\ x - 3y - 2 = 0 \end{cases}$  得交点  $A(\frac{22}{5}, \frac{4}{5})$ .

又作直线  $l: 7x + 5y = 0$ , 平等移动过点  $A$  时,  $7x + 5y$  取最大值, 然而点  $A$  不是整数点,

故对应的  $z$  值不是最优解, 此时过点  $A$  的直线为  $7x + 5y = 34\frac{4}{5}$ , 应考虑可行域中距离直线

$7x + 5y = 34\frac{4}{5}$  最近的整点, 即  $B(2, 4)$ , 有  $z_{(B)} = 7 \times 2 + 5 \times 4 = 34$ , 应注意不是找距点  $A$

最近的整点, 如点  $C(4, 1)$  为可行域中距  $A$  最近的整点, 但  $z_{(C)} = 7 \times 4 + 5 \times 1 = 33$ , 它小于

$z_{(B)}$ , 故  $z$  的最大值为 34.

**说明:** 解决这类题的关键是在可行域内找准整点. 若将线性目标函数改为非线性目标函数呢?