一、数形结合思想

数形结合思想介绍：数形结合思想在高考中占有非常重要的地位，其“数”与“形”结合，相互渗透，把代数式的精确刻划与几何图形的直观描述相结合，使代数问题、几何问题相互转化，使抽象思维和形象思维有机结合.应用数形结合思想，就是充分考查数学问题的条件和结论之间的内在联系，既分析其代数意义又揭示其几何意义，将数量关系和空间形式巧妙结合，来寻找解题思路，使问题得到解决.运用这一数学思想，要熟练掌握一些概念和运算的几何意义及常见曲线的代数特征.

例题 1：设 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=2x+3$，且 $x\in \mathbf{A}\}$，$C=\{z\mid z=x^2$，且 $x\in \mathbf{A}\}$，若 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

命题意图：本题借助数形结合，考查有关集合关系运算的题目.属★★★★级题目.

知识依托：解决本题的关键是依靠一元二次函数在区间上的值域求法确定集合 C.进而将 $C\subseteq B$ 用不等式这一数学语言加以转化.

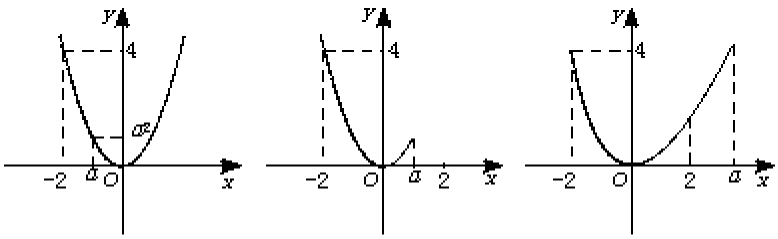
错解分析：考生在确定 $z=x^2$，$x\in[-2,a]$ 的值域是易出错，不能分类而论.巧妙观察图象将是上策.不能漏掉 $a<-2$ 这一种特殊情形.

技巧与方法：解决集合问题首先看清元素究竟是什么，然后再把集合语言“翻译”为一般的数学语言，进而分析条件与结论特点，再将其转化为图形语言，利用数形结合的思想来解决.

解：∵$y=2x+3$ 在 $[-2,a]$ 上是增函数

∴ $-1\leqslant y\leqslant 2a+3$，即 $B=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 2a+3\}$

作出 $z=x^2$ 的图象，该函数定义域右端点 $x=a$ 有三种不同的位置情况如下：

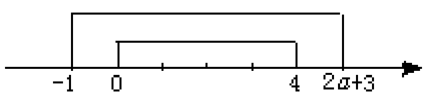


①当 $-2\leqslant a\leqslant 0$ 时，$a^2\leqslant z\leqslant 4$ 即 $C=\{z\mid z^2\leqslant z\leqslant 4\}$

要使 $C\subseteq B$,必须且只须 $2a+3\geqslant 4$ 得 $a\geqslant \dfrac{1}{2}$ 与 $-2\leqslant a<0$ 矛盾.

②当 $0\leqslant a\leqslant 2$ 时，$0\leqslant z\leqslant 4$ 即 $C=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant 4\}$，要使 $C\subseteq B$，由图可知：

必须且只需 $\begin{cases}2a+3\geq 4\\0\leq a\leq 2\end{cases}$



解得 $\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$

③当 $a>2$ 时，$0\leqslant z\leqslant a^2$，即 $C=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant a^2\}$，要使 $C\subseteq B$ 必须且只需

$\begin{cases}a^2\leq 2a+3\\a>2\end{cases}$ 解得 $2<a\leqslant 3$

④当 $a<-2$ 时，$A=\varnothing$ 此时 $B=C=\varnothing$，则 $C\subseteq B$ 成立.

综上所述，a 的取值范围是 $(-\infty,-2)\cup\left[\dfrac{1}{2},3\right]$.

例题 2： 已知 $a\cos\alpha+b\sin\alpha=c$, $a\cos\beta+b\sin\beta=c(ab\neq0, \alpha-\beta\neq k\pi, k\in\mathbf{Z})$求证：

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

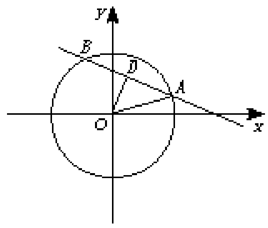
命题意图：本题主要考查数学代数式几何意义的转换能力.属★★★★★级题目.

知识依托：解决此题的关键在于由条件式的结构联想到直线方程.进而由 A、B 两点坐标特点知其在单位圆上.

错解分析：考生不易联想到条件式的几何意义，是为瓶颈之一.如何巧妙利用其几何意义是为瓶颈之二.

技巧与方法：善于发现条件的几何意义，还要根据图形的性质分析清楚结论的几何意义，这样才能巧用数形结合方法完成解题.

证明:在平面直角坐标系中，点 A（$\cos\alpha,\sin\alpha$）与点 B（$\cos\beta$, $\sin\beta$）是直线 $l:ax+by=c$ 与单位圆 $x^2+y^2=1$ 的两个交点如图.



从而：$|AB|^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$

$=2-2\cos(\alpha-\beta)$

又∵单位圆的圆心到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

由平面几何知识知 $|OA|^2-(\dfrac{1}{2}|AB|)^2=d^2$ 即

$$1-\frac{2-2\cos(\alpha-\beta)}{4}=d^2=\frac{c^2}{a^2+b}$$

$$\therefore \cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

归纳与总结： 应用数形结合的思想，应注意以下数与形的转化：

（1）集合的运算及韦恩图

（2）函数及其图象

（3）数列通项及求和公式的函数特征及函数图象

（4）方程（多指二元方程）及方程的曲线

以形助数常用的有：借助数轴；借助函数图象；借助单位圆；借助数式的结构特征；借助于解析几何方法.

以数助形常用的有：借助于几何轨迹所遵循的数量关系；借助于运算结果与几何定理的结合.

二、分类讨论思想

分类讨论思想介绍： 分类讨论思想就是根据所研究对象的性质差异，分各种不同的情况予以分析解决.分类讨论题覆盖知识点较多，利于考查学生的知识面、分类思想和技巧；同时方式多样，具有较高的逻辑性及很强的综合性，树立分类讨论思想，应注重理解和掌握分类的原则、方法与技巧、做到“确定对象的全体，明确分类的标准，分层别类不重复、不遗漏的

分析讨论."

例题 1：已知$\{a_n\}$是首项为 2，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，S_n为它的前 n 项和.

（1）用 S_n 表示 S_{n+1};

（2）是否存在自然数 c 和 k，使得$\frac{S_{k+1}-c}{S_k-c}>2$成立.

命题意图: 本题主要考查等比数列、不等式知识以及探索和论证存在性问题的能力，属★★★★★级题目.

知识依托：解决本题依据不等式的分析法转化，放缩、解简单的分式不等式; 数列的基本性质.

错解分析：第 2 问中不等式的等价转化为学生的易错点，不能确定出$\frac{3}{2}S_k-2<c<S_k$.

技巧与方法：本题属于探索性题型，是高考试题的热点题型.在探讨第 2 问的解法时，采取优化结论的策略，并灵活运用分类讨论的思想：即对双参数 k,c 轮流分类讨论，从而获得答案.

解：（1）由 $S_n=4(1-\frac{1}{2n})$，得

$S_{n+1}=4(1-\frac{1}{2^{n+1}})=\frac{1}{2}S_n+2$，$(n\in \mathbf{N}^*)$

（2）要使$\frac{S_{k+1}-c}{S_k-c}>2$，只要$\frac{c-(\frac{3}{2}S_k-2)}{c-S_k}<0$

因为$S_k=4(1-\frac{1}{2^k})<4$

所以$S_k-(\frac{3}{2}S_k-2)=2-\frac{1}{2}S_k>0$，$(k\in \mathbf{N}^*)$

故只要$\frac{3}{2}S_k-2<c<S_k$，$(k\in \mathbf{N}^*)$

因为 $S_{k+1}>S_k$，$(k\in \mathbf{N}^*)$　　　　①

所以$\frac{3}{2}S_k-2\geqslant\frac{3}{2}S_1-2=1$.

又 $S_k<4$，故要使①成立，c 只能取 2 或 3.

当 $c=2$ 时，因为 $S_1=2$，所以当 $k=1$ 时，$c<S_k$ 不成立，从而①不成立.

当 $k\geqslant2$ 时，因为$\frac{3}{2}S_2-2=\frac{5}{2}>c$，由 $S_k<S_{k+1}(k\in \mathbf{N}^*)$得

$\frac{3}{2}S_k-2<\frac{3}{2}S_{k+1}-2$

故当 $k\geqslant2$ 时，$\frac{3}{2}S_k-2>c$，从而①不成立.

当 $c=3$ 时，因为 $S_1=2$，$S_2=3$，

所以当 $k=1$，$k=2$ 时，$c<S_k$ 不成立，从而①不成立

因为$\frac{3}{2}S_3-2=\frac{13}{4}>c$，又$\frac{3}{2}S_k-2<\frac{3}{2}S_{k+1}-2$

所以当 $k\geqslant3$ 时，$\frac{3}{2}S_k-2>c$，从而①成立.

综上所述，不存在自然数 c,k,使$\frac{S_{k+1}-c}{S_k-c}>2$成立.

例题 2：给出定点 A（a,0)（$a>0$）和直线 l：$x=-1$，B 是直线 l 上的动点，$\angle BOA$ 的角平分线交 AB 于点 C.求点 C 的轨迹方程，并讨论方程表示的曲线类型与 a 值的关系.

命题意图：本题考查动点的轨迹，直线与圆锥曲线的基本知识，分类讨论的思想方法.综合性较强，解法较多，考查推理能力和综合运用解析几何知识解题的能力.属★★★★★级题目.

知识依托：求动点轨迹的基本方法步骤.椭圆、双曲线、抛物线标准方程的基本特点.

错解分析: 本题易错点为考生不能巧妙借助题意条件，构建动点坐标应满足的关系式和分类讨论轨迹方程表示曲线类型.

技巧与方法: 精心思考，发散思维、多途径、多角度的由题设条件出发，探寻动点应满足的关系式.巧妙地利用角平分线的性质.

解：依题意，记 B（-1，b)，($b\in\mathbf{R}$)，则直线 OA 和 OB 的方程分别为 $y=0$ 和 $y=-bx$.

设点 $C(x,y)$，则有 $0\leqslant x<a$，由 OC 平分$\angle AOB$，知点 C 到 OA、OB 距离相等.

根据点到直线的距离公式得$|y|=\frac{|y+bx|}{\sqrt{1+b^2}}$ ①

依题设，点 C 在直线 AB 上，故有

$$y=-\frac{b}{1+a}(x-a)$$

由 $x-a\neq0$，得$b=-\frac{(1+a)y}{x-a}$ ②

将②式代入①式，得 $y^2[(1-a)x^2-2ax+(1+a)y^2]=0$

若 $y\neq0$，则

$(1-a)x^2-2ax+(1+a)y^2=0(0<x<a)$

若 $y=0$ 则 $b=0,\angle AOB=\pi$，点 C 的坐标为（0，0）满足上式.

综上，得点 C 的轨迹方程为

$(1-a)x^2-2ax+(1+a)y^2=0(0<x<a)$

(i)当 $a=1$ 时，轨迹方程化为 $y^2=x(0\leqslant x<1)$ ③

此时方程③表示抛物线弧段；

(ii)当 $a\neq1$，轨迹方程化为

$$\frac{(x-\frac{a}{1-a})^2}{(\frac{a}{1-a})^2}+\frac{y^2}{\frac{a^2}{1-a^2}}=1(0\leq x<a) \quad ④$$

所以当 $0<a<1$ 时，方程④表示椭圆弧段；

当 $a>1$ 时，方程④表示双曲线一支的弧段.

归纳与总结：分类讨论思想就是依据一定的标准，对问题分类、求解，要特别注意分类必须满足互斥、无漏、最简的原则.分类讨论常见的依据是：

1.由概念内涵分类.如绝对值、直线的斜率、指数对数函数、直线与平面的夹角等定义包含了分类.

2.由公式条件分类.如等比数列的前 n 项和公式、极限的计算、圆锥曲线的统一定义中图形的分类等.

3.由实际意义分类.如排列、组合、概率中较常见，但不明显、有些应用问题也需分类讨论.

在学习中也要注意优化策略，有时利用转化策略，如反证法、补集法、变更多元法、数形结合法等简化甚至避开讨论.