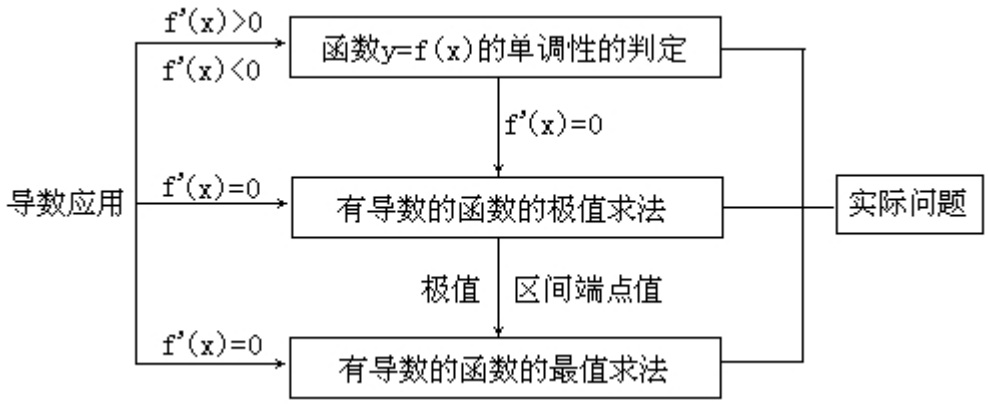
重点知识概括：

（1）极限是本章也是整个微积分的基础概念，它包括数列极限和函数极限，它们都是是在无限变化过程中（$n\to\infty$，$x\to\infty$或$x\to x_0$）的变化趋势，这一共同点决定了两类极限有类似的运算性质；如果两个数列（或函数）有极限，那么它们的和、差、积、商的极限分别等于这两个数列（或函数）的极限的和、差、积、商（作为除数的数列或函数的极限不能为0）。其原因在于无穷数列$\{a_n\}$是定义域为N_+的特殊函数$a_n=f(n)$，数列的极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$是函数极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$的特例。

极限概念及运算性质决定了确定极限的两种方法：一是利用数形结合思想，从量变中认识质变的数学思想方法，即极限方法。利用极限的方法求出了变速直线运动的瞬时速度与曲线上某点的切线方程，并从中抽象出函数的导数概念。导数是一种特殊的函数极限，$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，$x_0$变化时，$f'(x_0)$就是导函数，二是利用极限的运算法则，可推导出最常用的导数公式与运算法则：$c'=0$（c为常数），$(x^n)'=nx^{n-1}$（$n\in N_+$），$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$，$[cf(x)]'=cf'(x)$，进一步可以求出所有多项式函数的导数。

（2）导数$f'(x)$是函数平均变化率$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，瞬时速度、切线斜率、经济学中的边际成本都与平均变化率有关，因而导数有广泛的作用。



例题解析：

例1： 求下列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+4+\cdots+2^{n-1}}{1+3+9+\cdots+3^{n-1}}$　　（2）$\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1})$

解题思路分析：

（1）　因分子及分母的次数随n增大而增加，故不能利用运算性质。先求和化简。

$$1+2+4\cdots+2^{n-1}=\frac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$$

$$1+3+9+\cdots+3^{n-1}=\frac{1-3^n}{1-3}=\frac{3^n-1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+2^{n-1}}{1+3+\cdots+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2^n-1)}{3^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2[(\frac{2}{3})^n-(\frac{1}{3})^n]}{1-(\frac{1}{3})^n}=0$$

（2） 当 x→1 时，$\frac{1}{x-1}$ 及 $\frac{2}{x^2-1}$ 均无意义，应约去因式 x-1

$$\because \frac{1}{x-1}-\frac{2}{x2}-1=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x+1}$$

$$\therefore \lim_{x\to1}(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1})=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

说明 函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}$ 在 x=1 无定义，但与 $\lim_{x\to1}f(x)$ 存在无关。一般地有下列结论：

如果 f(x)=x_0 处无定义，g(x)在 x=x_0 处有定义并存在极限，且当 x≠x_0 时，f(x)=g(x)，则 $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)$。

例 2： 设函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象与 y 轴交点为 P，且曲线在 P 点处的切线方程为 12x-y-4=0，若函数在 x=2 处取得极值 0，试确定函数的解析式。

解题思路分析：

P（0，d）

∵ 曲线在点 P 处切线为 12x-y-4=0

∴ x=0 时，y=d

∴ d=-4

∵ $y'=3ax^2+2bx+c$

∴ $y'|_{x=0}=c$

又切线斜率 k=12

∴ c=12

又函数在 x=2 处取得极值 0

$$\therefore \begin{cases} y'|_{x=2}=0 \\ f(2)=0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 12a+4b+12=0 \\ 8a+4b+20=0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a=2 \\ b=-9 \end{cases}$$

∴ 函数解析式 $y=2x^3-9x^2+12x-4$

例 3： 偶函数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 的图象过点 P（0，1），且在 x=1 处的切线方程为 y=x-2

（1） 求 y=f(x)的解析式；

（2） 求 y=f(x)的极大（小）值。

解题思路分析：

∵ f(x)是偶函数

∴ b=d=0

又图象过 P（0，1）

∴ e=1

此时 $f(x)=ax^4+cx^2+1$

∵ $y'=4ax^3+2cx$

∴ $y'|_{x=1}=4a+2c=1$ ①

又切点（1，-1）在曲线上

∴ a+c+1=-1 ②

由①②得：$a=\frac{5}{2}$，$c=-\frac{9}{2}$

∴ $f(x)=\frac{5}{2}x^4-\frac{9}{2}x^2+1$

（2）$f'(x)=10x^3-9x=0$

∴ $x=0$，$x=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$

列表可得：$x=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$ 时，$f(x)_{极小}=-\frac{41}{40}$

x=0 时，$f(x)_{极大}=1$

例 4： 曲线 $y=\frac{1}{3}x^6$ 上哪一点的法线在 y 轴上截距最小？（法线是指过曲线上一点与以此点为切点的切线垂直的直线）

解题思路分析：

在曲线 $y=\frac{1}{3}x^6$ 上任取一点（x_0，y_0），则过该点切线的斜率为 $k=2x_0^5$

∴ 法线的斜率为 $-\frac{1}{2x_0^5}$

∴ 法线方程 $y-y_0=-\frac{1}{2x_0^5}(x-x_0)$

令 x=0，使法线在 y 轴上的截距

$$y=y_0+\frac{1}{2x_0^4}=\frac{x_0^6}{3}+\frac{1}{2x_0^4}$$

∴ $y'=2x_0^5-\frac{2}{x_0^5}=\frac{2(x_0^{10}-1)}{x_0^5}$

令 y'=0，得 $x_0=\pm1$

当 $x_0<-1$ 时，y'<0，∴y 单调递减

当$-1<x_0<0$时，y’>0，∴y 单调递增

当$0<x_0<1$时，y’<0，∴y 单调减小

当$x_0>1$时，y’>0，则 y 单递增

∴ 当$x_0=\pm1$时，$y_{min}=\frac{5}{6}$，此时点（±1，$\frac{1}{3}$）

例 5：研究函数$f(x)=ax^3+bx^2-\frac{1}{a}x+1$的单调性（a≠0）

解题思路分析：

$$f'(x)=3ax^2+2bx-\frac{1}{a}$$

1、a>0 时，由 f’(x)>0 得$x<\frac{-b-\sqrt{b^2+3}}{3a}$或$x>\frac{-b+\sqrt{b^2+3}}{3a}$

$f'(x)<0$得$\frac{-b-\sqrt{b^2+3}}{3a}<x<\frac{-b+\sqrt{b^2+3}}{3a}$

∴ f(x)在（$-\infty$，$\frac{-b-\sqrt{b^2+3}}{3a}$]，[$\frac{-b+\sqrt{b^2+3}}{3a}$，$+\infty$）上单调递增；在[$\frac{-b-\sqrt{b^2+3}}{3a}$，$\frac{-b+\sqrt{b^2+3}}{3a}$]上单调递减。

2、当 a<0 时，f(x)在[$\frac{-b+\sqrt{b^2+3}}{3a}$，$\frac{-b-\sqrt{b^2+3}}{3a}$]上单调递增；在（$-\infty$，$\frac{-b+\sqrt{b^2+3}}{3a}$]，[$\frac{-b-\sqrt{b^2+3}}{3a}$，$+\infty$）上单调递减。

例 6：用总长为 14.8m 的钢条制作一个长方体容器的框架，如果所制容器的底面的一边比另一边长 0.5m，那么为多少时容器的容积最大？并求出它的最大容积？

解题思路分析：

设容器底面短边长为 xm，另一边长为(x+0.5)m，高为(3.2-2x)m

∵ 3.2-2x>0，x>0

∴ 0<x<1.6

设容器的容积为 ym^3

y=x(x+0.5)(3.2-2x)

∴ $y=-2x^3+2.2x^2+1.6x$

∴ $y'=-6x^2+4.4x+1.6$

令 y’=0 得 x=1，$x=-\frac{4}{15}$（舍）

∵ y 在（0，1.6）内只有一个驻点 x=1，而 x 过小或过大时，y 值很小

∴ 当 x=1 时，$y_{max}=1.8$，此时高为 1.2