



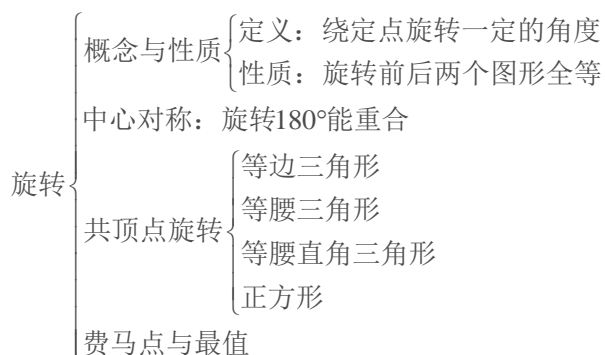
共顶点旋转

大纲

内容	要求		
	A	B	C
图形的旋转	了解图形的旋转，理解对应点到旋转中心的距离相等、对应点与旋转中心连线所成的角彼此相等的性质；会识别中心对称图形	能按要求作出简单平面图形旋转后的图形，能依据旋转前、后的图形，指出旋转中心和旋转角	能运用旋转的知识解决简单问题



知识网络图

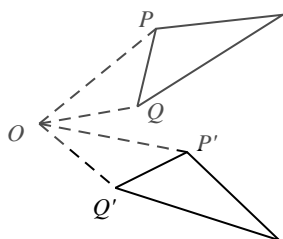


知识精讲

一、旋转

1、定义

把一个图形绕着某一点 O 转动一个角度的图形变换叫做旋转，点 O 叫做旋转中心，转动的角叫做旋转角，如果图形上的点 P 经过旋转变为点 P' ，那么这两个点叫做这个旋转的对应点。如下图。



【注意】1、研究旋转问题应把握两个元素：旋转中心与旋转角。

2、每一组对应点所构成的旋转角相等。

2、性质

(1) 旋转后的图形与原图形是全等的；（进而得到相等的线段、相等的角）

(2) 旋转前后两个图形对应点到旋转中心的距离相等；（进而得到等腰三角形）

(3) 对应点与旋转中心所连线段的夹角都等于旋转角；（若特殊角则得到等边三角形、等腰直角三角形）

3、作图的重要条件

由旋转的性质可知，旋转作图必须具备两个重要条件

(1) 旋转中心

(2) 旋转方向及旋转角度。

4、作图的基本步骤

具体步骤分以下几步

连：即连接图形中每一个关键点与旋转中心。

转：即把连线按要求绕旋转中心转过一定角度（作旋转角）

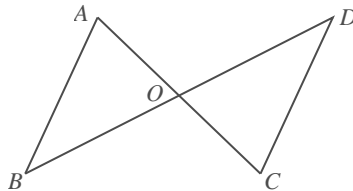
截：即在角的另一边上截取关键点到旋转中心的距离，得到各点的对应点。

连：即连接所得到的各点。

二、中心对称

1、中心对称的定义

把一个图形绕着某一点旋转 180° ，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这个点对称或中心对称，这个点叫做中心对称点，这两个图形中的对应点叫做关于中心的对称点（如下图）



【注意】1、图形成中心对称是旋转角为定角（ 180° ）的旋转问题，它是一种特殊的旋转，反映的是两个图形的一种特殊关系。

2、中心对称阐明的是两个图形的特殊位置关系。

2、中心对称的性质

关于中心对称的两个图形，对称点所连线段都经过对称中心，而且被对称中心所平分。

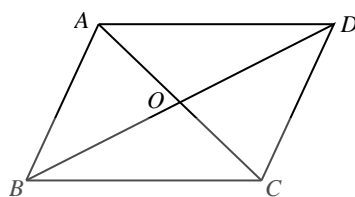
关于中心对称的两个图形是全等图形。

关于中心对称的两个图形，对应线段平行（或在同一直线上）且相等。

如果连接两个图形的对应点的线段都经过某一点，并且被这一点平分，那么这两个图形一定关于这一点成中心对称。

3、中心对称图形

把一个图形绕着某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点就是它的对称中心。（如下图）



4、中心对称与中心对称图形的区别与联系

中心对称是指两个图形的关系，中心对称图形是指具有某种性质的一个图形。若把中心对称图形的两个部分分别看作两个图形，则他们成中心对称；若把中心对称的两个图形看作一个整体，则成为中心对称图形。

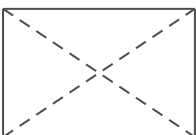
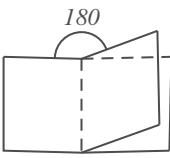
5、关于原点对称的点的坐标特征

两个点关于原点对称时，他们坐标符号相反，反过来，只要两个点的坐标符号相反，则两个点关于原点对称。

6、中心对称图形与旋转对称图形的比较

名称	定义	区别	联系
旋转对称图形	如果一个图形绕着某一点旋转一定角度（小于周角）后能与原图形完全重合，那么这个图形叫做旋转对称图形	旋转角度不一定是 180°	旋转对称图形只有旋转 180° 才是中心对称图形，而中心对称图形一定是旋转对称图形
中心对称图形	如果一个图形绕某一点旋转 180° 后能与自身重合，那么这个图形叫做中心对称图形	必须旋转 180°	

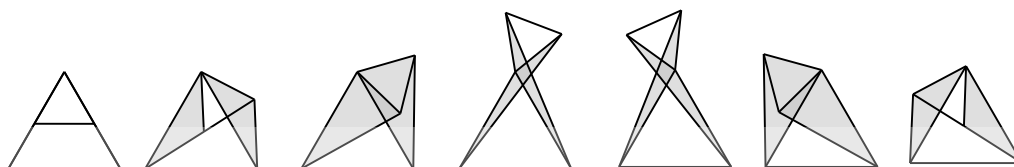
7、中心对称图形与轴对称图形比较

名称	定义	基本图形	区别	举例
中心对称图形	如果一个图形绕着某点旋转 180° 后能与自身重合，那么这个图形叫做中心对称图形		绕某一点旋转 180°	线段、平行四边形、矩形、菱形、圆
轴对称图形	如果一个图形沿某一条直线翻折 180° 后，直线两旁的部分能够互相重合，那么这样的图形叫做轴对称图形		沿某一条直线翻折 180° （对折）	线段、等腰三角形、矩形、菱形、正方形、圆

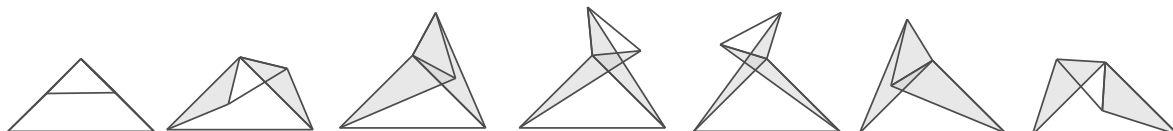
三、共顶点旋转

1、共顶点旋转三角形

有出现一个公共的顶点，两个三角形可以通过旋转相互得到，这类题目需要找到两个旋转三角形或者通过作出辅助线找到两个旋转三角形。



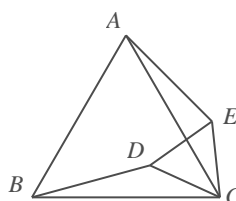
等边三角形共顶点



共顶点等腰直角三角形

【注意】以上给出了各种图形连续变化图形，图中出现的两个阴影部分的三角形是全等三角形，此模型需要注意的是利用“全等三角形”的性质进行边与角的转化，证明的基本思想“SAS”。

【例题】如图，等边三角形 $\triangle ABC$ 与等边 $\triangle DEC$ 共顶点于 C 点，求证： $AE = BD$ 。



【答案】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形， $\therefore \angle ACB = 60^\circ$ ， $AC = BC$ 。

$\therefore \angle BCD + \angle DCA = 60^\circ$ ，同理 $\angle ACE + \angle DCA = 60^\circ$ ， $DC = EC$ 。 $\therefore \angle BCD = \angle ACE$

在 $\triangle BCD$ 与 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} BC = AC \\ \angle BCD = \angle ACE \\ DC = EC \end{cases}$$

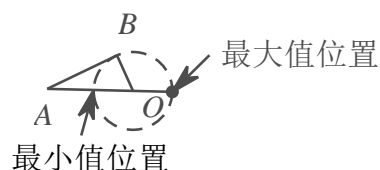
$\therefore \triangle BCD \cong \triangle ACE$ ， $\therefore BD = AE$ 。

四、费马点与最值

1、三线共点问题

图形中出现有公共端点的相等线段，可考虑将含有相等线段的图形绕公共端点旋转两相等线段的夹角后与另一相等线段重合。

2、 OA 与 OB 共用顶点 O ，固定 OA 将 OB 绕点 O 旋转过程中的，会出现 AB 的最大值与最小值，如图。



3、费马点的定义

到三个定理的三条线段之和最小, 夹角都为 120° . 旋转与最短路程问题主要是利用旋转的性质转化为两点之间线段最短的问题, 同时与旋转有关路程最短的问题, 比较重要的就是费马点问题

4、费马点的结论

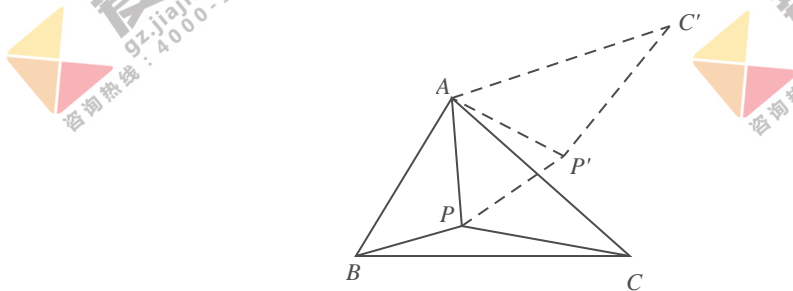
(1) 平面内一点 P 到 $\triangle ABC$ 三顶点的之和为 $PA+PB+PC$, 当点 P 为费马点时, 距离之和最小.

(2) 三内角皆小于 120° 的三角形, 分别以 AB, BC, CA 为边, 向三角形外侧做正三角形 ABC_1, ACB_1, BCA_1 , 然后连接 AA_1, BB_1, CC_1 , 则三线交于一点 P , 则点 P 就是所求的费马点.

(3) 若三角形有一内角大于或等于 120° 度, 则此钝角的顶点就是所求的费马点.

(4) 当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时, 此时内心与费马点重合

【例题】下面简单说明如何找点 P 使它到 $\triangle ABC$ 三个顶点的距离之和 $PA+PB+PC$ 最小? 这就是所谓的费马问题.



【解析】如图 1, 把 $\triangle APC$ 绕 A 点逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AP'C'$, 连接 PP' . 则 $\triangle APP'$ 为等边三角形, $AP=PP'$, $P'C'=PC$, 所以 $PA+PB+PC=PP'+PB+P'C'$.

点 C' 可看成是线段 AC 绕 A 点逆时针旋转 60° 而得的定点, BC' 为定长, 所以当 B, P, P', C' 四点在同一直线上时, $PA+PB+PC$ 最小.

这时 $\angle BPA=180^\circ-\angle APP'=180^\circ-60^\circ=120^\circ$,

$\angle APC=\angle AP'C'=180^\circ-\angle AP'P=180^\circ-60^\circ=120^\circ$,

$\angle BPC=360^\circ-\angle BPA-\angle APC=360^\circ-120^\circ-120^\circ=120^\circ$

因此, 当 $\triangle ABC$ 的每一个内角都小于 120° 时, 所求的点 P 对三角形每边的张角都是 120° ; 可在 AB, BC 边上分别作 120° 的弓形弧, 两弧在三角形内的交点就是 P 点;

当有一内角大于或等于 120° 时, 所求的 P 点就是钝角的顶点.

费马问题告诉我们, 存在这么一个点到三个定点的距离之和最小, 解决问题的方法是运用旋转变换.



解题方法技巧

1、利用旋转思想构造辅助线

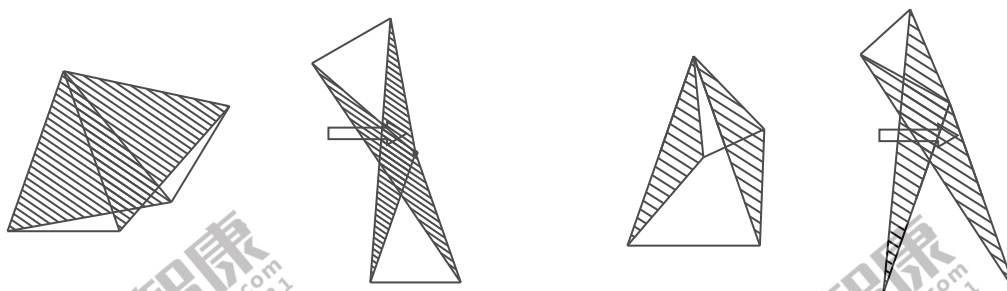
(1) 根据相等的线段先找出被旋转的三角形.

(2) 根据对应边找出旋转角度, 画出旋转三角.

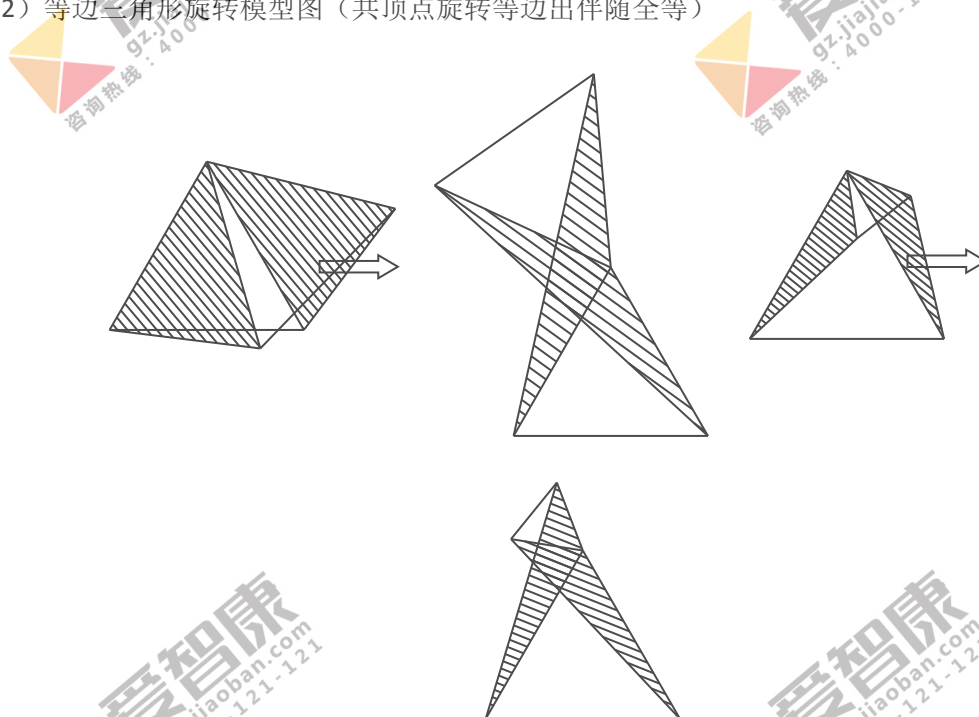
2、四大旋转全等模型 (关键找伴随全等三角形)

等腰三角形、等腰直角三角形、等边三角形伴随旋转出全等, 处于各种位置的旋转模型, 及残缺的旋转模型都要能很快看出来

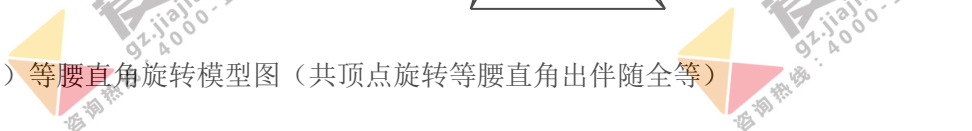
(1) 等腰三角形旋转模型图 (共顶点旋转等腰出伴随全等)

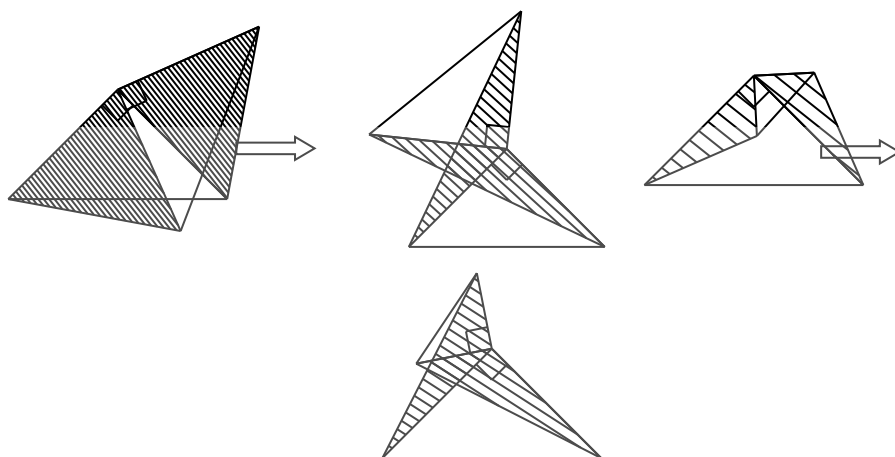


(2) 等边三角形旋转模型图 (共顶点旋转等边出伴随全等)

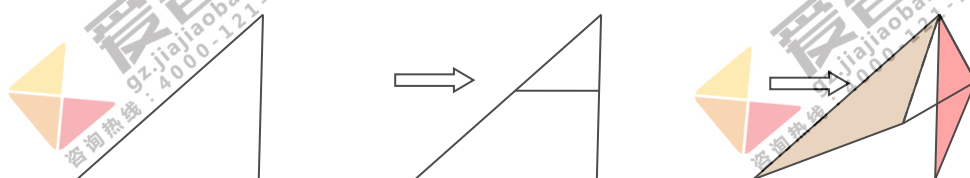


(3) 等腰直角旋转模型图 (共顶点旋转等腰直角出伴随全等)

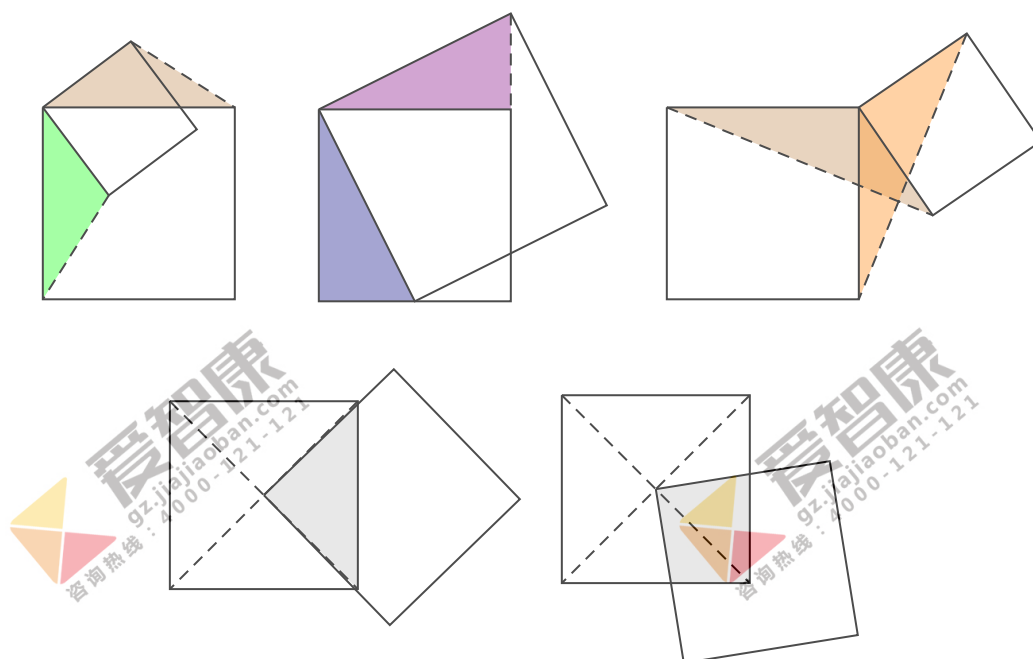




(4) 不等边旋转模型图 (共顶点旋转不等腰出伴随相似)



(5) 正方形共顶点旋转



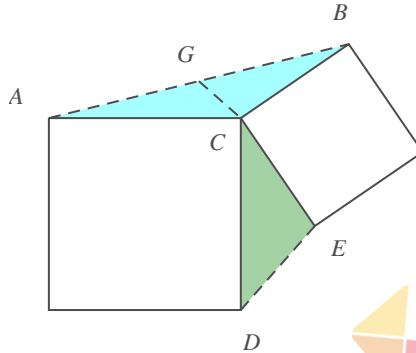
3、旋转秘籍

- (1) 图形中出现等腰三角形, 常考虑将以腰为边的某三角形绕等腰三角形的顶角所在的顶点旋转一顶角后与另一腰重合.
- (1) 图形中出现等边三角形, 常考虑将含有等边三角形边长的某个三角形绕顶点旋转 60° 角后与另一边重合.

- (2) 图形中出现正方形时, 常考虑将含有正方形边长的某个三角形绕顶点旋转 90° 角后与另一边重合.

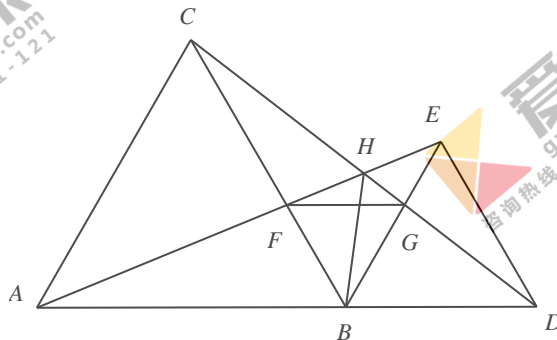
4、正方形等面积结论

- (1) $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CDE}$
- (2) G 为 AB 中点, 则 $CG = \frac{1}{2} DE$
- (3) G 为 AB 中点, $CG \perp DE$



5、等边三角形手拉手共线的结论 ($\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 均为等边三角形, A, B, D 三点共线)

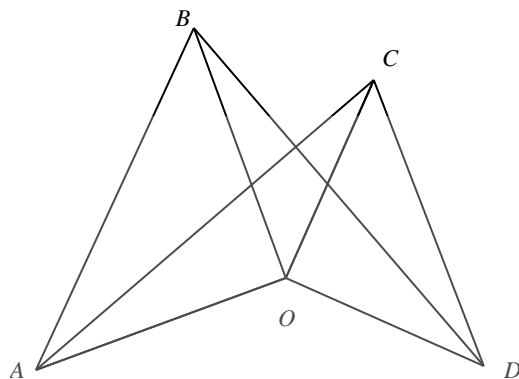
- (1) $\triangle ABE \cong \triangle CBD$
- (2) $AE = CD$
- (3) $\triangle ABF \cong \triangle CBG$
- (4) $\triangle DBG \cong \triangle EBF$
- (5) $BF = BG$
- (6) $AF = CG, EF = DG$
- (7) $\triangle FBG$ 为等边三角形
- (8) HB 平分 $\angle AHD$
- (9) $\angle CHA = 60^\circ$



6、等腰直角三角形共顶点旋转常见的变式

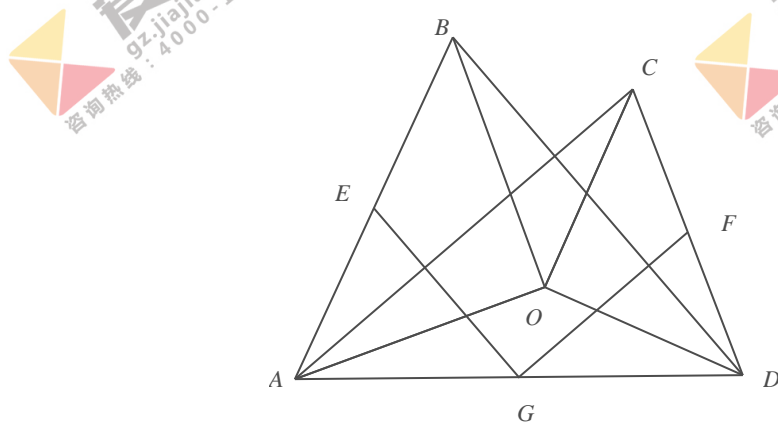
- (1) 基本模型: $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 均为等腰直角三角形

结论: $BD = AC, BD \perp AC$



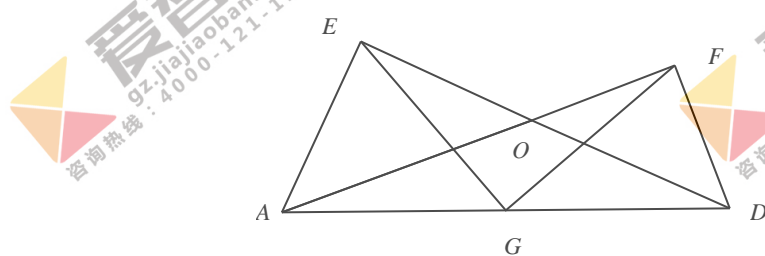
(2) 变式一: 在上面模型的基础上连接 AD , 分别取 AB 、 CD 、 AD 的中点 E 、 F 、 G , 连接 EG 、 FG

结论: $EG = FG$, $EG \perp FG$



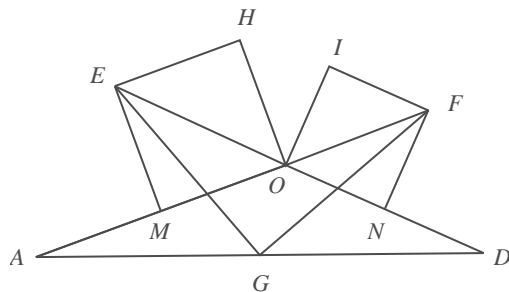
(3) 变式二: 在上面模型的基础上连接 OE 、 OF , 则 $\triangle OEA$ 和 $\triangle OFD$ 均为等腰直角三角形, 如下图去掉别的线段

结论: $EG = FG$, $EG \perp FG$



(4) 变式三: 在上面模型的基础上分别取 OA 、 OD 的中点 M 、 N , 分别以 ON 、 OM 为边作正方形

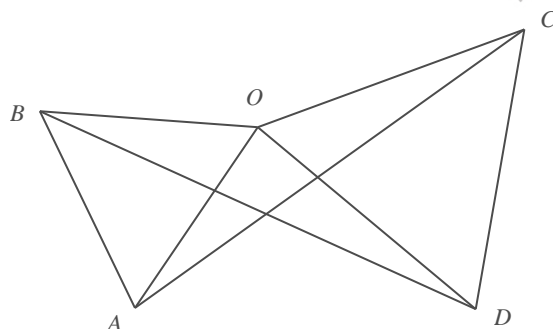
结论: $EG = FG$, $EG \perp FG$



7、等边三角形共顶点旋转常见的变式

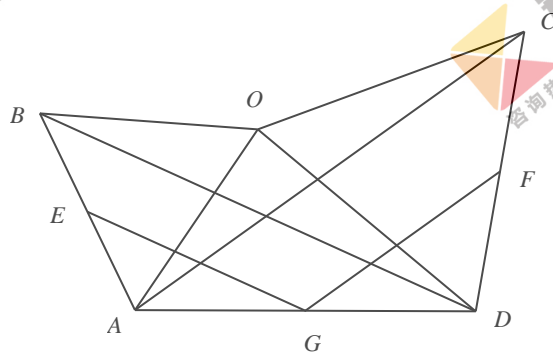
(1) 基本模型: $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 均为等边三角形

结论: $BD = AC$, BD 与 AC 所夹角为 60°



(2) 变式: 在上面模型的基础上连接 AD , 分别取 AB 、 CD 、 AD 的中点 E 、 F 、 G , 连接 EG 、 FG

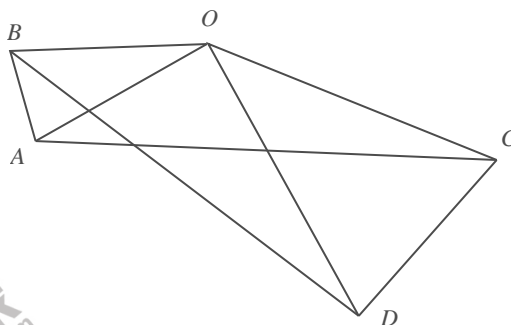
结论: $EG = FG$, $\angle EGF = 120^\circ$



8、等腰三角形共顶点旋转常见的变式

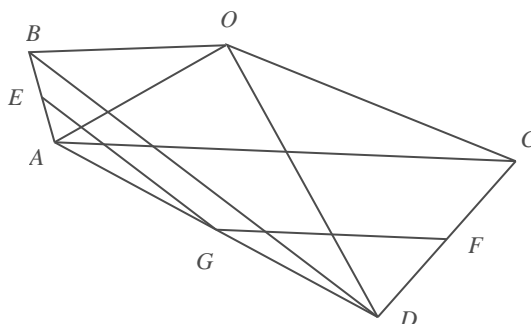
(1) 基本模型: $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 均为等腰三角形, $\angle BOA = \angle COD$

结论: $BD = AC$, BD 与 AC 的夹角等于 $\angle AOB$



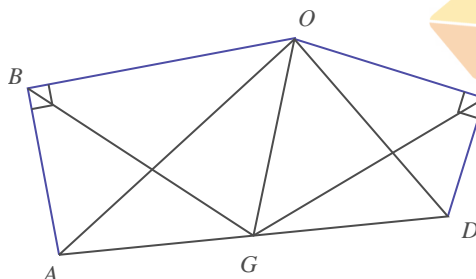
(2) 变式: 在上面模型的基础上连接 AD , 分别取 AB 、 CD 、 AD 的中点 E 、 F 、 G , 连接 EG 、 FG

结论: $EG = FG$, $\angle EGF = 2\angle BAO$



9、终极模型提炼: 只要 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 相似, G 为 AD 中点, 且 $\angle BOA = \angle COD$, $\angle OBA = \angle OCD = 90^\circ$

结论: $BG = CG$, $\angle BGC = 2\angle BAO$





易错点辨析

- 1、找旋转中心时是对应点连线垂直平分线的交点，要注意和对称中心相区别。
- 2、找共顶点全等三角形时，要注意找旋转图形的对应点。
- 3、遇到正方形的共顶点旋转，基本上都可以转化成等腰直角三角形的共顶点旋转。

