

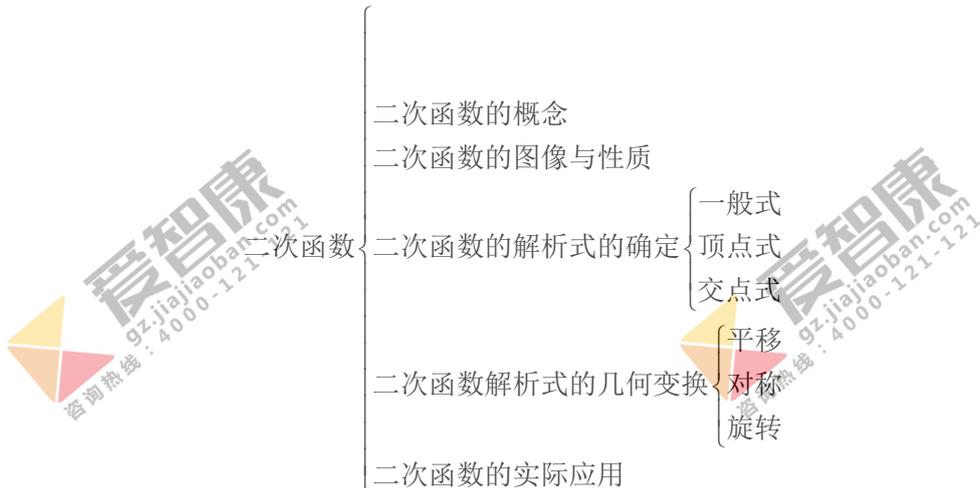


二次函数

大纲

内容	要求		
	A	B	C
二次函数	了解二次函数的意义; 会用描点法画二次函数的图象	能通过分析实际问题的 情境确定二次函数的表 达式; 能从借助图象上 认识理解二次函数的性 质; 会根据二次函数的 表达式解析式求其图象 与其图像与坐标轴的交 点坐标, 会确定图像的 顶点、开口方向和对称 轴; 会利用二次函数的 图象求一元二次方程的 近似解	能用二次函数解决简单 的实际问题; 能够解决 二次函数与其他知识综 合的有关问题

知识网络图



知识精讲

一、二次函数的概念

一、二次函数的定义

1、一般地, 形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 的函数称为 x 的二次

函数, 其中 x 为自变量, y 为因变量, a, b, c 分别为二次函数的二次项、一次项和常数项系数.

【注意】抛物线的另一定义: 在平面内, 到一个定点 F 和一条定直线 l 距离相等的点的集合成为抛物线, F 称为抛物线的焦点. l 称为抛物线的准线.

2、任何二次函数都可以整理成 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 的形式.

3、判断函数是否为二次函数的方法:

- (1) 含有一个变量, 且自变量的最高次数为 2;
- (2) 二次项系数不等于 0;
- (3) 等式两边都是整式.

4、二次函数自变量 x 的取值范围是全体实数.

二、二次函数图象的画法: 五点绘图法

1、利用配方法将二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 化为顶点式 $y = a(x-h)^2 + k$;

2、确定其开口方向、对称轴及顶点坐标;

3、在对称轴两侧, 左右对称地描点画图. 一般我们选取的五点为: 顶点、与 y 轴的交点 $(0, c)$ 以及 $(0, c)$ 关于对称轴对称的点 $(2h, c)$ 、与 x 轴的交点 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ (若与 x 轴没有交点, 则取两组关于对称轴对称的点).

二、二次函数的图象性质

一、二次函数 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 的性质

1、抛物线 $y = ax^2$ 的顶点是坐标原点 $(0, 0)$, 对称轴是 $x = 0$ (y 轴).

2、函数 $y = ax^2$ 的图象与 a 的符号关系.

- (1) 当 $a > 0$ 时 \Leftrightarrow 抛物线开口向上 \Leftrightarrow 顶点为其最低点;
- (2) 当 $a < 0$ 时 \Leftrightarrow 抛物线开口向下 \Leftrightarrow 顶点为其最高点.

二、二次函数 $y = ax^2 + c$ ($a \neq 0$) 的性质

1、抛物线 $y = ax^2 + c$ 的顶点是坐标原点 $(0, c)$, 对称轴是 $x = 0$ (y 轴).

2、函数 $y = ax^2 + c$ 的图象与 a 的符号关系.

- (1) 当 $a > 0$ 时 \Leftrightarrow 抛物线开口向上 \Leftrightarrow 顶点为其最低点;
- (2) 当 $a < 0$ 时 \Leftrightarrow 抛物线开口向下 \Leftrightarrow 顶点为其最高点.

3、函数 $y = ax^2 + c$ 的图象可以看做是由函数 $y = ax^2$ 的图象向上或向下平移 $|c|$ 个单位得到的.

三、二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的性质

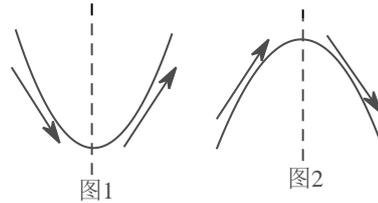
1、对称轴: $x = -\frac{b}{2a}$.

2、顶点坐标: $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

(1) 最值:

当 $a > 0$ 时有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ (如图).

当 $a < 0$ 时有最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$ (如图).



(2) 单调性: 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的变化情况 (增减性).

当 $a > 0$ 时, 对称轴左侧 $x < -\frac{b}{2a}$, y 随着 x 的增大而减小, 在对称轴的右侧

$x > -\frac{b}{2a}$, y 随 x 的增大而增大;

当 $a < 0$ 时, 对称轴左侧 $x < -\frac{b}{2a}$, y 随着 x 的增大而增大, 在对称轴的右侧

$x > -\frac{b}{2a}$, y 随 x 的增大而减小.

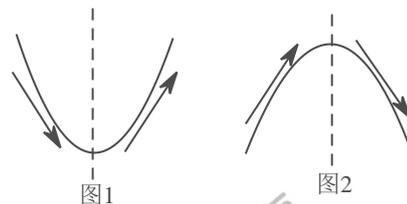
四、二次函数 $y = a(x - h)^2 + k$ ($a \neq 0$) 的性质

1、对称轴: $x = h$

2、顶点坐标: (h, k)

3、最值:

$a > 0$ 时有最小值 k ; (如图 1) $a < 0$ 时有最大值 k ; (如图 2)



五、二次函数 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ ($a \neq 0$) 的性质

1、对称轴: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

2、与 x 轴的交点坐标为 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$.

六、二次函数的图象与系数的关系

1、 a 的符号决定抛物线的开口方向:

当 $a > 0$ 时, 抛物线开口向上;

当 $a < 0$ 时, 抛物线开口向下.

2、 $|a|$ 决定抛物线的开口大小:

$|a|$ 越大, 抛物线开口越小;

$|a|$ 越小, 抛物线开口越大.

3、 a 和 b 共同决定抛物线对称轴的位置 (抛物线的对称轴: $x = -\frac{b}{2a}$)

当 $b=0$ 时, 抛物线的对称轴为 y 轴;

当 a 、 b 同号时, 对称轴在 y 轴的左侧;

当 a 、 b 异号时, 对称轴在 y 轴的右侧.

简要概括为“左同右异” .

4、 c 的大小决定抛物线与 y 轴交点的位置 (抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0, c)$)

当 $c=0$ 时, 抛物线与 y 轴的交点为原点;

当 $c>0$ 时, 交点在 y 轴的正半轴;

当 $c<0$ 时, 交点在 y 轴的负半轴.

七、根据二次函数的图象判断代数式符号

1、 $b^2 - 4ac$ 决定了函数图象与 x 轴的交点情况:

当 $b^2 - 4ac > 0$, 有两个交点;

当 $b^2 - 4ac = 0$, 有一个交点;

当 $b^2 - 4ac < 0$, 没有交点.

2、当 $x=1$ 时, 可以得到 $a+b+c$ 的值;

当 $x=-1$ 时, 可以得到 $a-b+c$ 的值.

三、二次函数解析式的确定

一、待定系数法

1、一般式: $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.

如果已知二次函数的图象上的三点坐标 (或称函数的三对对应值) (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) , 那么方程组

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$$
 就可以唯一确定 a 、 b 、 c , 从而求得函数解

析式 $y = ax^2 + bx + c$.

【注意】1、任何二次函数都可以整理成一般式 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的形式;

2、已知任意 3 点坐标, 可用一般式求解二次函数解析式.

2、顶点式: $y = a(x-h)^2 + k (a \neq 0)$.

由于 $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$, 所以当已知二次函数图象的顶点坐标

$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ 时, 就可以设二次函数形如 $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$, 从而利用其他

条件, 容易求得此函数的解析式. 这里直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 又称为二次函数图象的对称轴.

【注意】1、已知顶点坐标或对称轴时, 可用顶点式求解二次函数解析式.

2、已知二次函数的顶点和图象上的任意一点, 都可以用顶点式来确定解析式.

3、交点式: $y = a(x-x_1)(x-x_2) (a \neq 0)$.

我们知道, $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a(x-x_1)(x-x_2)$, 这里 x_1 , x_2 分别

是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根. 当已知二次函数的图象与 x 轴有交点 (或者说方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有实根) 时, 就可以令函数解析式为 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, 从而求得此函数的解析式.

- 【注意】1、已知抛物线与 x 的两个交点坐标, 可用交点式求解二次函数解析式.
 2、已知二次函数与 x 轴的交点坐标, 和图象上任意一点时, 可用交点式求解二次函数解析式.

3、已知二次函数与 x 轴的交点坐标 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, 可知二次函数的对称轴为 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

4、根据二次函数的对称性可知, 对于函数图象上的两点 (x_1, a) , (x_2, a) , 如果它们有相同的纵坐标, 则可知二次函数的对称轴为 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

5、对于任意的二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, 若设抛物线与 x 轴的交点为 A 、 B , 则 AB 的长度求法为: 当 $x = 0$ 时, 利用求根公式可得 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, 可知

$$|x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}. \text{ 所以 } AB = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}.$$

4、对称式: $y = a(x - x_1)(x - x_2) + k (a \neq 0)$.

总结: 当抛物线经过点 (x_1, k) 、 (x_2, k) 时, 可以用对称式来求二次函数的解析式.

【注意】任何二次函数的解析式都可以化成一般式或顶点式, 但并非所有的二次函数都可以写成交点式,

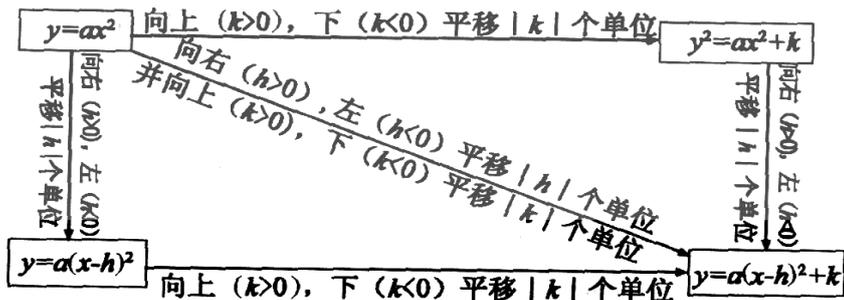
只有抛物线与 x 轴有交点, 即 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时, 抛物线的解析式才可以用交点式表示. 二次函数解析式的这三种形式可以互化.

四、二次函数的几何变换

一、平移变换

1、具体步骤:

先利用配方法把二次函数化成 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式, 确定其顶点 (h, k) , 然后做出二次函数 $y = ax^2$ 的图象, 将抛物线 $y = ax^2$ 平移, 使其顶点平移到 (h, k) . 具体平移方法如图所示:



2、平移规律: 在原有函数的基础上“左加右减, 上加下减”.

二、对称变换

二次函数图象的对称一般有五种情况, 可以用一般式或顶点式表达.

1、关于 x 轴对称 $y = ax^2 + bx + c$ 关于 x 轴对称后, 得到的解析式是 $y = -ax^2 - bx - c$;

$y = a(x-h)^2 + k$ 关于 x 轴对称后, 得到的解析式是 $y = -a(x-h)^2 - k$;

2、关于 y 轴对称 $y = ax^2 + bx + c$ 关于 y 轴对称后, 得到的解析式是 $y = ax^2 - bx + c$;

$y = a(x-h)^2 + k$ 关于 y 轴对称后, 得到的解析式是 $y = a(x+h)^2 + k$;

根据对称的性质, 显然无论作何种对称变换, 抛物线的形状一定不会发生变化, 因此 $|a|$ 永远不变. 求抛物线的对称抛物线的表达式时, 可以依据题意或方便运算的原则, 选择合适的形式, 习惯上是先确定原抛物线 (或表达式已知的抛物线) 的顶点坐标及开口方向, 再确定其对称抛物线的顶点坐标及开口方向, 然后再写出其对称抛物线的表达式.

三、旋转变换

在二次函数的旋转变换中, 将抛物线绕顶点旋转 90° 或 180° , 之后抛物线的开口大小不变, 方向改变, 但是顶点坐标不改变, 这也是解题的关键, 具体如下:

1、关于原点对称

$y = ax^2 + bx + c$ 关于原点对称后, 得到的解析式是 $y = -ax^2 + bx - c$;

$y = a(x-h)^2 + k$ 关于原点对称后, 得到的解析式是 $y = -a(x+h)^2 - k$;

2、关于顶点对称

$y = ax^2 + bx + c$ 关于顶点对称后, 得到的解析式是 $y = -ax^2 - bx + c - \frac{b^2}{2a}$;

$y = a(x-h)^2 + k$ 关于顶点对称后, 得到的解析式是 $y = -a(x-h)^2 + k$.

3、关于点 (m, n) 对称

$y = a(x-h)^2 + k$ 关于点 (m, n) 对称后, 得到的解析式是 $y = -a(x+h-2m)^2 + 2n - k$.

五、二次函数与实际应用

1、二次函数求最值的应用

依据实际问题中的数量关系, 确定二次函数的解析式, 结合方程、一次函数等知识解决实际问题.

【注意】对二次函数的最大 (小) 值的确定, 一定要注意二次函数自变量的取值范围, 同时兼顾实际问题中对自变量的特殊要求, 结合图像进行理解.

2、利用图像信息解决问题

两种常见题型:

- (1) 观察点的特点, 验证满足二次函数的解析式及其图像, 利用二次函数的性质求解;
- (2) 由图文提供的信息, 建立二次函数模型解题.

【注意】获取图像信息, 如抛物线的顶点坐标, 与坐标轴的交点坐标等.

3、建立二次函数模型解决问题

利用二次函数解决抛物线的隧道、大桥和拱门等实际问题时, 要恰当地把这些实际问题中的数据落实到平面直角坐标系中的抛物线上, 从而确定抛物线所对应的函数解析式, 通过解析式解决一些测量问题或其他问题.

【注意】构建二次函数模型时, 建立适当的平面直角坐标系是关键.



解题方法技巧

1、抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 是以直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 为对称轴的轴对称图形, 不难得到如下性质:

- (1) 抛物线上对称两点的纵坐标相等; 抛物线上纵坐标相同的两点对称点.
- (2) 如果抛物线交 x 轴于两点, 那么这两点对称点.
- (3) 若设抛物线上对称两点的横坐标分别为 x_1 、 x_2 , 则抛物线的对称轴为 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.
- (4) 若已知抛物线与 x 轴相交的其中一个交点是 $A(x_1, 0)$, 且其对称轴是 $x = m$, 则另一个交点 B 的坐标可以用 x_1 , m 表示出来.

2、当自变量 x 的值以相等间隔值均匀增加时, 对对应函数值连续两次求差, 得到的值相等.

3、图形中的质点运动可以确定两个变量间的函数关系, 探寻这类函数图像的基本方法是:

- (1) 通过解析式确定;
- (2) 运用图形性质确定;
- (3) 关注变化趋势确定;
- (4) 利用特殊点确定.

4、解与平面几何图形相关最值问题的一般步骤是:

- (1) 确定自变量 x 和因变量 y ;
- (2) 利用几何中的一些公式、定理或全等、相似建立函数关系式所需要的等式, 将其中的各量带换为变量 x , y , 通过化简、整理得函数关系式.
- (3) 利用顶点坐标公式或配方法求最值.

5、二次函数的最值问题需在数学思想方法的高位引领下进行, 常见的方法有:

- (1) 由顶点确定最值;
- (2) 在自变量取值范围内确定最值;
- (3) 依对称性确定最值.

【注意】应用二次函数解实际问题最值时, 不可盲目套用公式, 需考虑自变量的取值范围.