2016-2017学年北京市通州区高三（上）期末数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．）

1．（5分）（2015秋•通州区期末）已知集合M={x|x<﹣1或x>2}，N={x|1<x<3}，则M∩N等于（　　）

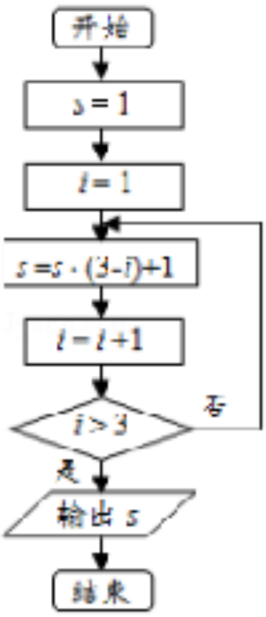
A．{x|x<﹣1或x>1}　B．{x|2<x<3}　C．{x|﹣1<x<3}　D．{x|x<﹣1或x>3}

【解答】解：∵M={x|x<﹣1或x>2}，N={x|1<x<3}，

∴M∩N={x|2<x<3}，

故选：B．

2．（5分）（2016秋•通州区期末）执行如图所示的程序框图，输出的s值为（　　）



A．0　B．1　C．3　D．4

【解答】解：模拟程序的运行，可得

s=1，i=1

s=3，i=2

不满足条件i>3，执行循环体，s=4，i=3

不满足条件i>3，执行循环体，s=1，i=4

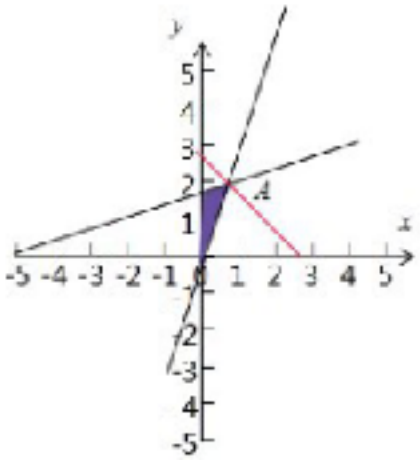
满足条件i>3，退出循环，输出s的值为1．

故选：B．

3．（5分）（2016秋•通州区期末）若变量x，y满足条件$\begin{cases}3x-y\leqslant 0\\x-3y+5\geqslant 0\\x\geqslant 0\end{cases}$则z=x+y的最大值为（　　）

A．0　B．$\frac{5}{3}$　C．2　D．$\frac{5}{2}$

【解答】解：由约束条件$\begin{cases}3x-y\leqslant 0\\x-3y+5\geqslant 0\\x\geqslant 0\end{cases}$作出可行域如图，



由$\begin{cases}3x-y=0\\x-3y+5=0\end{cases}$可知，A（$\frac{5}{8}$，$\frac{15}{8}$），

化目标函数z=x+y为y=－x+z，

由图可知，当直线y=－x+z过A时，直线在y轴上的截距最大，z有最大值为$\frac{5}{2}$．

故选：D．

4．（5 分）（2016 秋•通州区期末）下列函数中，既是偶函数又在区间（0，1）内单调递减的是（　　）

A．$y=x^2$ B．$y=2^x$ C．y=cosx　D．y=lnx

【解答】解：A．$y=x^2$ 是偶函数，在区间（0，1）内单调递增，不满足条件．

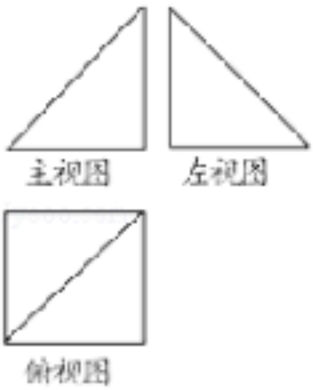
B．$y=2^x$ 是非奇非偶函数，在区间（0，1）内单调递增，不满足条件．

C．y=cosx 是偶函数，在区间（0，1）内单调递减，满足条件．

D．y=lnx 是非奇非偶函数，在区间（0，1）内单调递增，不满足条件．

故选：C．

5．（5 分）（2016 秋•通州区期末）如图，已知某几何体的主视图和左视图是全等的等腰直角三角形，俯视图是边长为 2 的正方形，那么它的体积是（　　）



A．$\frac{4}{3}$　B．$\frac{8}{3}$　C．4　D．$\frac{16}{3}$

【解答】解：由已知中的三视图，可得：该几何体是一个以俯视图为底面的四棱锥，

其底面的面积 S=2×2=4，

高 h=2，

故三棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{8}{3}$，

故选：B

6．（5 分）（2016 秋•通州区期末）"数列{a_n}为等比数列"是"$a_{n+1}^{\ 2}=a_n\cdot a_{n+2}$"的（　　）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

【解答】解：若数列$\{a_n\}$为等比数列，则${a_{n+1}}^2=a_n\cdot a_{n+2}$成立，即充分性成立，

反之不一定成立，比如数列0，0，0，…，满足${a_{n+1}}^2=a_n\cdot a_{n+2}$成立，但数列$\{a_n\}$不是等比数列，即必要性不成立，

故"数列$\{a_n\}$为等比数列"是"${a_{n+1}}^2=a_n\cdot a_{n+2}$"的充分不必要条件，

故选：A．

7．（5分）（2016秋•通州区期末）过点（2，2）的直线l与圆$x^2+y^2+2x-2y-2=0$相交于A，B两点，且$|AB|=2\sqrt{3}$，则直线l的方程为（　　）

A．$3x-4y+2=0$　B．$3x-4y+2=0$，或$x=2$

C．$3x-4y+2=0$，或$y=2$　D．$y=2$，或$x=2$

【解答】解：∵圆$x^2+y^2+2x-2y-2=0$，即$(x+1)^2+(y-1)^2=4$，圆心（-1，1），半径为2，

若$|AB|=2\sqrt{3}$，则圆心（-1，1）到直线l距离d=1，

若直线l的斜率不存在，即x=2，

此时圆心（-1，1）到直线l距离为3不满足条件，

若直线l的斜率存在，则可设直线l的方程为$y-2=k(x-2)$，

即$kx-y-2k+2=0$，

则$d=\frac{|-3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，

解得k=0或$\frac{3}{4}$，

此时直线l的方程为$3x-4y+2=0$，或$y=2$，

故选C．

8．（5分）（2016秋•通州区期末）已知函数$f(x)=\begin{cases}2^x(x\leqslant 0)\\ \sqrt{x}(x>0)\end{cases}$若函数$g(x)=f(x)-k(x-1)$有且只有一个零点，则实数k的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,-1)$　B．$(0,+\infty)$　C．$(-1,0)$　D．$(-\infty,-1)\cup(0,+$

∞)

【解答】解：函数 g（x）=f（x）﹣k（x﹣1）有且只有一个零点，

∴f（x）﹣k（x﹣1）=0，

即：f（x）=k（x﹣1），

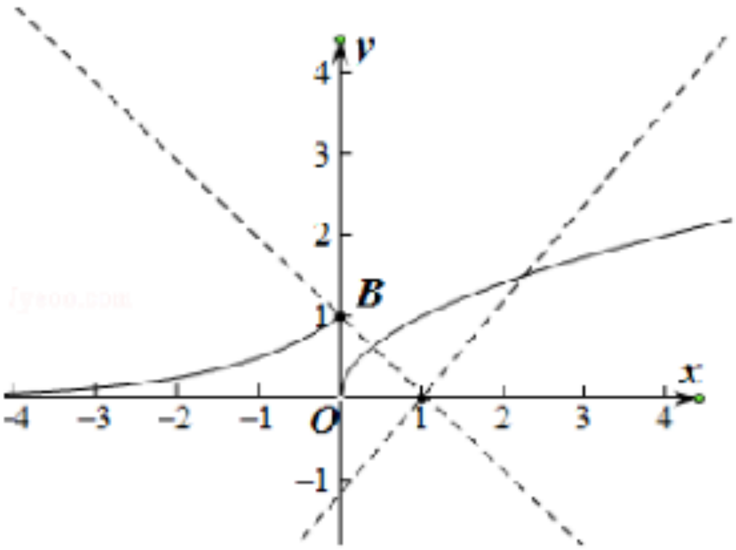
分别画出 y=f（x），与 y=k（x﹣1）的图象，如图所示：

而 y=k（x﹣1）的图象恒过点（1，0），

当过点 B 时此时 k=﹣1，有两个交点，

结合图象可得当 k<﹣1 或 x>0 时，函数 g（x）=f（x）﹣k（x﹣1）有且只有一个零点，

故选：D



二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.）

9.（5 分）（2016 秋•通州区期末）复数 $z=\frac{2}{1-i}$，则复数 z 的模是 $\underline{\sqrt{2}}$.

【解答】解：由 $z=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$，

得 $|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{2}$.

10.（5 分）（2016 秋•通州区期末）在△ABC 中，已知 b=3，A=45°，B=60°，则 a= $\underline{\sqrt{6}}$.

【解答】解：∵b=3，A=45°，B=60°，

∴由正弦定理可得：$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{3\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{6}$.

故答案为：$\sqrt{6}$.

11.（5 分）（2016 秋•通州区期末）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一条渐近线过点（2，2），则双曲线的离心率等于__$\sqrt{2}$__．

【解答】解：双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一条渐近线过点（2，2），

可得一条渐近线方程为：$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$，则$\frac{2}{a}=\frac{2}{b}$，即 a=b，$c=\sqrt{2}a$，

双曲线的离心率为：$\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

故答案为：$\sqrt{2}$.

12.（5 分）（2016 秋•通州区期末）已知$y=x+\frac{1}{x-1}$（x＞1），那么 y 的最小值是__3__．

【解答】解：∵x＞1，则 $y=x-1+\frac{1}{x}+1\geqslant2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+1=3$，当且仅当 x=2 时取等号．

故答案为：3．

13.（5 分）（2016 秋•通州区期末）将函数$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，得到函数 g（x）的图象，则 g（0）=__2__．

【解答】解：将函数$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，

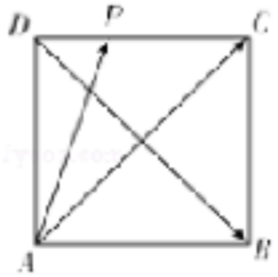
得到函数 g（x）$=2\sin[2(x+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{6}]=2\sin(2x+\frac{\pi}{2})=2\cos 2x$ 的图象，

则 g（0）=2cos0=2，

故答案为：2．

14.（5 分）（2016 秋•通州区期末）如图，在正方形 ABCD 中，P 为 DC 边上的动

点，设向量$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{DB}+\mu\overrightarrow{AP}$，则λ+μ的取值范围是__[1，3]__．



【解答】解：以A为原点，以AB、AD分别为x，y轴建立直角坐标系，设正方形的边长为2，

则C（2，2），B（2，0），D（0，2），P（x，2），x∈[0，2]

∴$\overrightarrow{AC}$=（2，2），$\overrightarrow{DB}$=（2，－2），$\overrightarrow{AP}$=（x，2），

∵$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{DB}+\mu\overrightarrow{AP}$，

∴$\begin{cases}2\lambda+x\mu=2\\-2\lambda+2\mu=2\end{cases}$，

∴$\begin{cases}\lambda=\dfrac{2-x}{2+x}\\\mu=\dfrac{4}{2+x}\end{cases}$，

∴$\lambda+\mu=\dfrac{6-x}{2+x}$，

令$f(x)=\dfrac{6-x}{2+x}$，（0≤x≤2）

∵f（x）在[0，2]上单调递减，

∴$f(x)_{max}=f(0)=3$，$f(x)_{min}=f(2)=1$，

故λ+μ的取值范围是[1，3]，

故答案为：[1，3]．

三、解答题（共6小题，共80分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．）

15．（13分）（2015秋•通州区期末）已知函数$f(x)=\sin2x+2\cos^2x-1$．

（Ⅰ）求f（x）最小正周期；

（Ⅱ）求f（x）在区间$[0,\dfrac{\pi}{2}]$上的最大值和最小值．

【解答】解：函数$f(x)=\sin2x+2\cos^2x-1$

$=\sin2x+\cos2x$

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$；…（4 分）

（Ⅰ）函数 f（x）的最小正周期为：

$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；…（6 分）

（Ⅱ）∵$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

∴ $2x+\frac{\pi}{4}\in[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$；…（7 分）

∴$\sin(2x+\frac{\pi}{4})\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},1]$；…（9 分）

∴当$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即$x=\frac{\pi}{2}$时，f（x）取得最小值﹣1；…（11 分）

∴当$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{8}$时，f（x）取得最大值$\sqrt{2}$．…（13 分）

16.（13 分）（2016 秋•通州区期末）已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=6n+5(n\in N^*)$，数列$\{b_n\}$是等差数列，且$a_n=b_n+b_{n+1}$

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的前 n 项和；

（Ⅱ）求数列$\{b_n\}$的通项公式．

【解答】解：（Ⅰ）∵$a_n=6n+5(n\in N^*)$

∴ $a_{n+1}-a_n=[6(n+1)+5]-(6n+5)=6$，$(n\in N^*)$

∴数列$\{a_n\}$是等公差为 6 的等差数列．

又∵$a_1=11$

∴数列$\{a_n\}$的前 n 项和：$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n[11+(6n+5)]}{2}=3n^2+8n$

（Ⅱ）∵$a_n=b_n+b_{n+1}$

∴$a_1=b_1+b_2$，$a_2=b_2+b_3$

∴$\begin{cases}b_1+b_2=11\\b_2+b_3=17\end{cases}$

设数列$\{b_n\}$的公差为 d，

则$\begin{cases}2b_1+d=11\\2b_1+3d=17\end{cases}$∴$\begin{cases}b_1=4\\d=3\end{cases}$．

∴数列$\{b_n\}$的通项公式：$b_n=3n+1$．

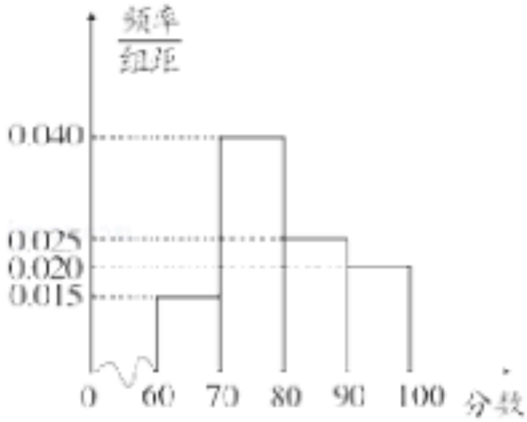
17．（13 分）（2016 秋•通州区期末）2016 年年底，某商业集团根据相关评分标准，对所属 20 家商业连锁店进行了年度考核评估，并依据考核评估得分（最低分 60 分，最高分 100 分）将这些连锁店分别评定为 A，B，C，D 四个类型，其考核评估标准如表：

评估得分	[60，70）	[70，80）	[80，90）	[90，100]
评分类型	D	C	B	A

考核评估后，对各连锁店的评估分数进行统计分析，得其频率分布直方图如下：

（Ⅰ）评分类型为 A 的商业连锁店有多少家；

（Ⅱ）现从评分类型为 A，D 的所有商业连锁店中随机抽取两家做分析，求这两家来自同一评分类型的概率．



【解答】（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）评分类型为 A 的商业连锁店所占的频率为 0.020×10=0.2，

所以评分类型为 A 的商业连锁店共有 0.2×20=4 家；….（4 分）

（Ⅱ）依题意评分类型为 D 的商业连锁店有 3 家，

设评分类型为 A 的 4 商业连锁店为 a_1，a_2，a_3，a_4，

评分类型为 D 的 3 商业连锁店为 b_1，b_2，b_3，….（6 分）

从评分类型为 A，D 的所有商业连锁店中随机抽取两家的所有可能情况有：

（a_1，a_2），（a_1，a_3），（a_1，a_4），（a_1，b_1），（a_1，b_2），（a_1，b_3），

（a_2，a_3），（a_2，a_4），（a_2，b_1），（a_2，b_2），（a_2，b_3），（a_3，a_4），

（a_3，b_1），（a_3，b_2），（a_3，b_3），（a_4，b_1），（a_4，b_2），（a_4，b_3），

（b_1，b_2），（b_1，b_3），（b_2，b_3）共 21 种，….（10 分）

其中满足条件的共有9种，....（12分）

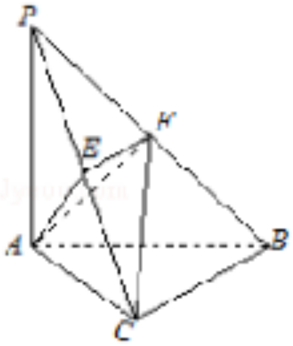
所以这两家来自同一评分类型的概率为$\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$. ....（13分）

18.（14分）（2016秋•通州区期末）如图，在三棱锥P﹣ABC中，PA⊥平面ABC，E，F分别为PC，PB中点，∠ACB=90°.

（Ⅰ）求证：EF∥平面ABC；

（Ⅱ）求证：EF⊥AE；

（Ⅲ）若PA=AC=CB，AB=4，求几何体EFABC的体积.



【解答】（本小题满分14分）

（Ⅰ）证明：∵E，F分别为PC，PB的中点.

∴EF∥BC，....（2分）

又∵EF⊄平面ABC，BC⊂平面ABC，

∴EF∥平面ABC....（4分）

（Ⅱ）证明：∵PA⊥平面ABC，∴PA⊥BC，...（5分）

又∵AC⊥BC，PA∩AC=A，

∴BC⊥平面PAC，...（7分）

∴BC⊥AE，

∵EF∥BC，

∴EF⊥AE. ....（10分）

（Ⅲ）解：∵PA⊥平面ABC，∴PA⊥AC，

∴$S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}PA\bullet AC=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4$

∵BC⊥平面PAC，

∴三棱锥P﹣ABC的体积：$V_1=\frac{1}{3}\bullet S_{\triangle PAC}\bullet BC=\frac{1}{3}\times 4\times 2\sqrt{2}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$，

∵EF⊥平面 PAE，$S_{\triangle PAE}=\frac{1}{2}S_{\triangle PAC}=2$，$EF=\frac{1}{2}BC=\sqrt{2}$，

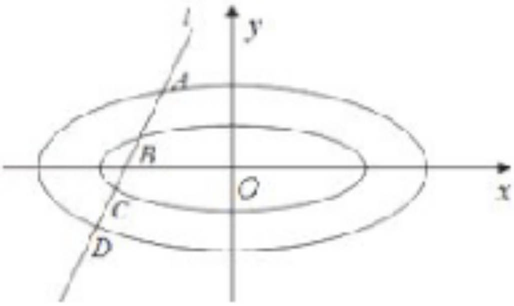
∴三棱锥 P－AEF 的体积：$V_2=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle PAE}\cdot EF=\frac{1}{3}\times 2\times\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

∴几何体 EFABC 的体积：$V=V_1-V_2=2\sqrt{2}$．…（14 分）

19．（14 分）（2016 秋•通州区期末）已知椭圆 C_1，C_2 均为中心在原点，焦点在 x 轴上的椭圆，离心率均为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，其中 C_1 的焦点坐标分别为（﹣1，0），（1，0），C_2 的左右顶点坐标为（﹣2，0），（2，0）．

（Ⅰ）求椭圆 C_1，C_2 的方程；

（Ⅱ）若直线 l 与 C_1，C_2 相交于 A，B，C，D 四点，如图所示，试判断 |AC|和|BD|的大小，并说明理由．



【解答】（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）设椭圆 C_1 的焦距为 $2c_1$，长轴为 $2a_1$，短轴为 $2b_1$，设椭圆 C_2 的焦距为 $2c_2$，长轴为 $2a_2$，短轴为 $2b_2$，

依题意得$\begin{cases}\frac{c_1}{a_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ c_1=1\\ a_1^2=b_1^2+c_1^2\end{cases}$，$\begin{cases}\frac{c_2}{a_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a_2=2\\ a_2^2=b_2^2+c_2^2\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}a_1=\sqrt{2}\\ b_1=1\end{cases}$，$\begin{cases}a_2=2\\ b_2=\sqrt{2}\end{cases}$，

所以椭圆 C_1 的标准方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

所以椭圆 C_2 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．….（4 分）

（Ⅱ）|AC|=|BD|．….（5 分）

①当直线 l 的斜率不存在时，显然有|AC|=|BD|．….（6 分）

②当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，

设点 A 坐标为（x_1，y_1），点 B 坐标为（x_2，y_2），

点 C 坐标为（x_3，y_3），点 D 坐标为（x_4，y_4），

将直线 l 的方程与椭圆 C_1 方程联立可得$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，．….（8 分）

消去 y 得（$1+2k^2$）$x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

所以有 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，．….（9 分）

将直线 l 的方程与椭圆 C_2 方程联立可得$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$，

消去 y 得（$1+2k^2$）$x^2+4kmx+2m^2-4=0$，

所以有 $x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，．….（11 分）

所以有弦 AD 的中点与弦 BC 的中点重合．….（13 分）

所以有|AC|=|BD|．….（14 分）

20.（13 分）（2015 秋•通州区期末）已知函数 f（x）$=x^3-3x^2$，g（x）$=ax^2-4$．

（Ⅰ）求函数 f（x）的极值；

（Ⅱ）若对任意的 $x\in[0，+\infty)$，都有 f（x）≥g（x），求实数 a 的取值范围；

（Ⅲ）函数 f（x）的图象是否为中心对称图形，如果是，请写出对称中心；如果不是，请说明理由．

【解答】解：（Ⅰ）$f'(x)=3x^2-6x$，

由 $f'(x)=0$，

可得 x=0 或 x=2

$f'(x)$，f（x）随 x 变化情况如下表：

x	（﹣∞，0）	0	（0，2）	2	（2，+∞）
$f'(x)$	+	0	-	0	+

f（x）	增	极大值	减	极小值	增

所以，当 x=0 时，f（x）有极大值 0，

当 x=2 时，f（x）有极小值﹣4，

（Ⅱ）令 F（x）=f（x）﹣g（x），则 F（x）=x^3﹣（3+a）x^2+4，

法一：F′（x）=$3x^2$﹣2（3+a）x，由 F′（x）=0，可得 $x=0$ 或 $x=\frac{2(3+a)}{3}$

①当$\frac{2(3+a)}{3}\leqslant 0$，即 a≤﹣3 时，F′（x）≥0 在[0，+∞）上恒成立，

所以，此时 F（0）=4 为最小值，所以 F（x）≥0 恒成立，即 f（x）≥g（x）

②当$\frac{2(3+a)}{3}>0$，即 a>﹣3 时，

x	0	$(0,\ \frac{2(3+a)}{3})$	$\frac{2(3+a)}{3}$	$(\frac{2(3+a)}{3},\ +\infty)$
f′（x）	0	﹣	0	+
f（x）		减		增

所以，当 $x=\frac{2(3+a)}{3}$时，F（x）取得最小值，若要满足 f（x）≥g（x），则

$F(\frac{2(3+a)}{3})\geqslant 0$，$F(\frac{2(3+a)}{3})=[\frac{2(3+a)}{3}]^3-(3+a)[\frac{2(3+a)}{3}]^2+4=-\frac{4}{27}(3+a)^3+4$

由$-\frac{4}{27}(3+a)^3+4\geqslant 0$，得 a≤0，

所以﹣3<a≤0，

由①②可得 a 的取值范围是 a≤0.

法二：由 f（x）≥g（x），得$a\leqslant x+\frac{4}{x^2}-3$，

令$G(x)\leqslant x+\frac{4}{x^2}-3$ $G'(x)\leqslant 1-\frac{8}{x^3}$，

由 G′（x）=0，得 x=2，当 0<x<2 时，G′（x）<0，

当 x>2 时，G′（x）<0，

所以，当 x=2 时，G（x）在[0，+∞）上取得最小值，即 G（2）=0

因为 a≤G（x），以 a≤0

（Ⅲ）函数 f（x）的图象是中心对称图形，

其对称中心是（1，﹣2）