2016-2017学年北京市昌平区高三（上）期末数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

1．（5分）（2016秋•昌平区期末）设全集U={1，2，3，4，5，6}，A={3，4}，B={2，4，5}，则（$\complement_U$A）∩B=（　　）

A．{1，2，4，5，6}　B．{2，3，4，5}　C．{2，5}　D．{1，6}

【解答】解：∵U={1，2，3，4，5，6}，A={3，4}，B={2，4，5}，

∴$\complement_U$A={1，2，5，6}，

则（$\complement_U$A）∩B={2，5}，

故选：C

2．（5分）（2016秋•昌平区期末）已知直线3x+（1－a）y+1=0与直线x－y+2=0平行，则a的值为（　　）

A．4　B．－4 C．2　D．－2

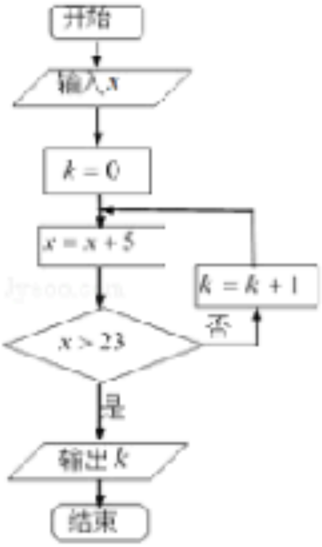
【解答】解：可得直线x－y+2=0的斜率为1，

由于直线平行，故有斜率相等，

故可得$\frac{3}{a-1}$=1，解得a=4

故选：A

3．（5分）（2016秋•昌平区期末）执行如图所示的程序框图，若输入的x值为1，则输出的k值为（　　）



A．3　B．4　C．5　D．6

【解答】解：若输入 x=1．

则第一次，x=1+5=6，不满足条件，x>23，k=1，

第二次，x=6+5=11，不满足条件，x>23，k=2，

第三次，x=11+5=16，不满足条件，x>23，k=3，

第四次，x=16+5=21，不满足条件，x>23，k=4，

第五次，x=21+5=26，满足条件，x>23，程序终止，

输出 k=4．

故选：B

4．（5 分）（2016 秋•昌平区期末）下列四个函数中，在其定义域上既是奇函数又是单调递增函数的是（　　）

A．$y=e^x$ B．$y=\log_2x$　C．$y=\sin x$　D．$y=x^3$

【解答】解：A．$y=e^x$ 是非奇非偶函数，不满足条件．

B．$y=\log_2x$ 是非奇非偶函数，不满足条件．

C．$y=\sin x$ 是奇函数，在定义域上不是单调函数，不满足条件．

D．$y=x^3$ 是奇函数，定义域上单调递增，满足条件．

故选：D

5．（5 分）（2016 秋•昌平区期末）在平行四边形 ABCD 中，若 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|$，

则平行四边形 ABCD 是（　　）

A．矩形　　B．梯形　　C．正方形　D．菱形

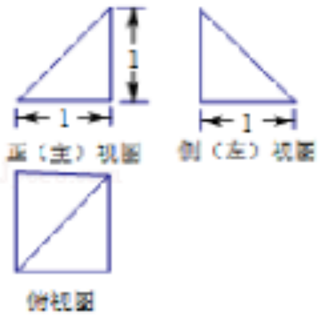
【解答】解：由 $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|$，平方得 $\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2$，

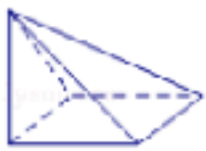
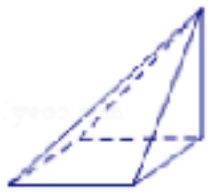
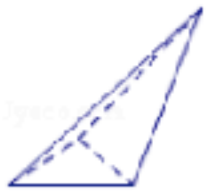
得得 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}=0$，即得 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$，

则平行四边形 ABCD 是矩形，

故选：A

6.（5 分）（2016 秋•昌平区期末）一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体的直观图为（　　）



A. 　B. 　C. 　D. 

【解答】解：由已知的三视图可得：该几何体是一个以俯视图为底面的四棱锥，

而且有一侧棱垂直与底面，结合俯视图，可知 B 满足，

故选 B．

7.（5 分）（2016 秋•昌平区期末）已知直线 m，n 和平面 α，且 m⊥α．则"n⊥m"是"n∥α"的（　　）

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

【解答】解：当 m⊥α 时，若 n⊥m，则 n∥α 或 n⊂α．即充分性不成立，

若 n∥α，则 n⊥m 成立，

即"n⊥m"是"n∥α"的必要不充分条件，

故选：B

8.（5 分）（2016 秋•昌平区期末）甲袋中有 16 个白球和 17 个黑球，乙袋中有 31 个白球，现每次任意从甲袋中摸出两个球，如果两球同色，则将这两球放进乙袋，并从乙袋中拿出一白球放回甲袋；如果两球不同色，则将白球放进乙袋，并把黑球放回甲袋．那么这样拿次后，甲袋中只剩一个球，这个球的颜色是（　　）

A．16，黑色　B．16，白色或黑色

C．32，黑色　D．32，白色

【解答】解：由题意知，每摸球一次后，甲袋中的球减少一个，

∵甲袋中原有 16 个白球和 17 个黑球，

∴当甲袋中只剩一个球时，摸球次数为 32．

当每次取走两个黑球时，甲袋中黑球减少 2 个，白球个数增加 1 个，

当每次取走两个球中有白球时，甲袋中黑球个数不变，白球个数减少一个，

由此循环，当摸球 31 次后，甲袋中还剩两个球，且这两球不同色，

∴当摸球 32 次后甲袋中只剩一个黑球．

故选：C．

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．）

9．（5 分）（2016 秋•昌平区期末）已知 i 为虚数单位，则复数 i（1﹣i）= 1+i ．

【解答】解：复数 i（1﹣i）=i+1，

故答案为：1+i．

10．（5 分）（2016 秋•昌平区期末）已知数列{a_n}的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n^2+n$，则 a_3= 6 ．

【解答】解：∵数列{a_n}的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n^2+n$，

∴$a_3=S_3-S_2$=（9+3）﹣（4+2）=6．

故答案为：6．

11．（5 分）（2016 秋•昌平区期末）e^{-2}，$2^{\frac{1}{e}}$，ln2三个数中最大的数是__$2^{\frac{1}{e}}$__．

【解答】解：∵e^{-2}∈（0，1），$2^{\frac{1}{e}}>1$，ln2∈（0，1），

因此三个数中最大的数是$2^{\frac{1}{e}}$．

故答案为：$2^{\frac{1}{e}}$．

12．（5 分）（2016 秋•昌平区期末）在△ABC 中，$c=\sqrt{2}$，$\angle B=\frac{\pi}{4}$，$b=2$，则∠A=__105°__．

【解答】解：由题意：已知$c=\sqrt{2}$，$\angle B=\frac{\pi}{4}$，$b=2$，

由正弦定理$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，则有$\sin C=\frac{\sqrt{2}\sin 45^{\circ}}{2}=\frac{1}{2}$

∵0°＜C＜135°

∴C=30°

则 A=180°－30°－45°=105°

故答案为：105°

13．（5 分）（2016 秋•昌平区期末）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的一条渐近线的倾斜角为$\frac{\pi}{6}$，则双曲线的渐近线的方程为__$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$__；该双曲线的离心率为__$\frac{2\sqrt{3}}{3}$__．

【解答】解：∵一条渐近线的倾斜角为$\frac{\pi}{6}$，

∴渐近线的斜率为$k=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴双曲线的渐近线的方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

∴$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故答案为：$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

14.（5 分）（2016 秋•昌平区期末）若函数$f(x)=\begin{cases}2^{-x}, & -1\leqslant x<1\\ \ln x, & 1\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$

①当 a=2 时，若 f（x）=1，则 x=__0__；

②若 f（x）的值域为[0，2]，则 a 的取值范围是__$[\sqrt{e}, e^2]$__.

【解答】解：函数 $y=2^{-x}$（$-1\leqslant x<1$）的值域为（$\frac{1}{2}$，2]，函数 y=lnx （$1\leqslant x\leqslant a$）的值域为：[0，lna]

①当 a=2 时，若 f（x）=1，即 $2^{-x}=1$，则 x=0

②若 f（x）的值域为[0，2]，$\frac{1}{2}\leqslant\ln a\leqslant2$，则 a 的取值范围是$\sqrt{e}\leqslant a\leqslant e^2$.

故答案为：0，$\sqrt{e}\leqslant a\leqslant e^2$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

15.（13 分）（2016 秋•昌平区期末）已知函数 f（x）=$\sqrt{3}\sin2x+2\cos^2x-1$.

（Ⅰ）求 f（x）的最小正周期；

（Ⅱ）求 f（x）在区间$[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$上的最大值和最小值.

【解答】解：（Ⅰ）∵$f(x)=\sqrt{3}\sin2x+2\cos^2x-1=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

∴ω=2，

∴f（x）的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$.

（Ⅱ）∵ $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，

∴ $-\frac{\pi}{6}\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}$.

于是，当$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{\pi}{6}$时，$f_{max}(x)=2\sin\frac{\pi}{2}=2$；

当$2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即$x=-\frac{\pi}{6}$时，$f_{min}(x)=2\sin(-\frac{\pi}{6})=-1$.

16.（13 分）（2016 秋•昌平区期末）已知$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是正项的等比数列，且$a_1=b_1=2$，$a_5=14$，$b_3=a_3$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求数列$\{a_n\}$中满足$b_4<a_n<b_5$的各项的和.

【解答】（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为$a_1=2$，$a_5=14$，

所以$a_1+4d=14$.

所以$d=3$.

所以$a_n=3n-1$.

所以$b_3=a_3=8$.

因为$b_1=2$，

因为$b_3=b_1q^2$，

所以$q^2=4$.

因为$b_n>0$，

所以$q=2$.

所以$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$.…（6 分）

（Ⅱ）因为$b_4<a_n<b_6$，即$2^4<3n-1<2^6$，

所以$\frac{17}{3}<n<\frac{65}{3}$，$n\in N^*$.

即 n=6，7，8，…，21.

所以满足$b_4<a_n<b_6$的各项的和为$a_6+a_7+\ldots+a_{21}=S_{21}-S_5=\frac{21(a_1+a_{21})}{2}-\frac{5(a_1+a_5)}{2}=\frac{21(2+62)}{2}-\frac{5(2+14)}{2}=632$.…（13 分）

17.（14 分）（2016 秋•昌平区期末）昌平区在滨河公园举办中学生冬季越野赛．按年龄段将参赛学生分为 A，B，C 三个组，各组人数如下表所示．组委会用分层抽样的方法从三个组中选出 6 名代表．

组别	A	B	C
人数	100	150	50

（I） 求A，B，C三个组各选出代表的个数；

（II） 若从选出的6名代表中随机抽出2人在越野赛闭幕式上发言，求这两人来自同一组的概率 P_1；

（III）若从所有参赛的300名学生中随机抽取2人在越野赛闭幕式上发言，设这两人来自同一组的概率为 P_2，试判断 P_1 与 P_2 的大小关系（不要求证明）.

【解答】（本小题满分14分）

解：（I）因为样本容量与总体容量的比是 $\frac{6}{100+150+50}=\frac{1}{50}$，

所以A，B，C三个组各选出的代表的数量分别为：$100\times\frac{1}{50}=2$，$150\times\frac{1}{50}=3$，$50\times\frac{1}{50}=1$.

所以A，B，C三个组各选出的代表的个数分别为2，3，1. …（4分）

（II）设来自A，B，C三个组的代表分别为 a_1，a_2，b_1，b_2，b_3，c.

则从6名代表中任意取出两人的所有结果所构成的基本事件空间：

$\Omega=\{(a_1, a_2), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, c), (a_2, b_1),$

$(a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, c), (b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_1, c),$

$(b_2, b_3), (b_2, c), (b_3, c)\}$，共15个基本事件.

记事件D="抽出的两个代表来自同一组".

则 $D=\{(a_1, a_2), (b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_2, b_3)\}$，共4个基本事件.

所以这两名代表来自同一组的概率 $P_1=\frac{4}{15}$. …（11分）

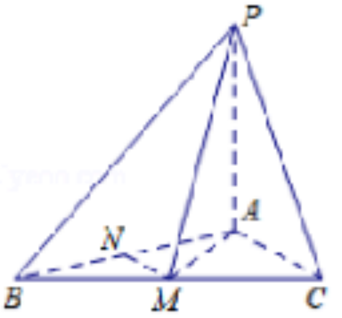
（III）$P_2>P_1$. …（14分）

18.（13分）（2016秋•昌平区期末）在三棱锥P－ABC中，PA⊥平面ABC，AB=AC=2，$BC=2\sqrt{3}$，M，N分别为BC，AB中点.

（I）求证：MN∥平面PAC

（II）求证：平面PBC⊥平面PAM

（III）在AC上是否存在点E，使得ME⊥平面PAC，若存在，求出ME的长，若不存在，请说明理由.



【解答】(I) 证明：因为 M，N 分别为 BC，AB 中点，

所以 MN∥AC.

因为 MN⊄平面 PAC，AC⊂平面 PAC，

所以 MN∥平面 PAC. …（4 分）

(II) 证明：因为 PA⊥平面 ABC，BC⊂平面 ABC，

所以 PA⊥BC.

因为 AB=AC=2，M 为 BC 的中点，

所以 AM⊥BC.

因为 AM∩PA=A，

所以 BC⊥平面 PAM.

因为 BC⊂平面 PBC，

所以平面 PBC⊥平面 PAM. …（8 分）

(III) 解：存在.

过点 M 作 ME⊥AC，交 AC 于点 E，

因为 PA⊥平面 ABC，BC⊂平面 ABC，

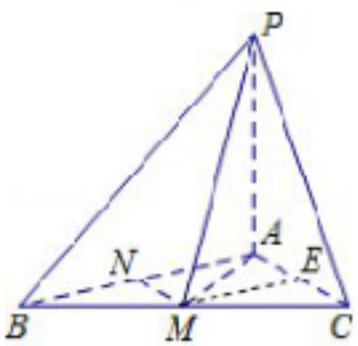
所以 PA⊥ME.

因为 ME⊥AC，AC∩PA=A，

所以 ME⊥平面 PAC.

因为在△ABC 中，AB=AC=2，BC=$2\sqrt{3}$，M 为 BC 的中点，

所以 ME=$\frac{\sqrt{3}}{2}$. …（13 分）



19．（13 分）（2016 秋•昌平区期末）已知函数 f（x）=lnx﹣mx（m＞0）．

（I） 若 m=1，求曲线 y=f（x）在点（1，f（1））处的切线方程；

（II）求函数 f（x）的最大值 g（m），并求使 g（m）＞m﹣2 成立的 m 取值范围．

【解答】解：（I）若 m=1，则 f（x）=lnx﹣x．

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-1(x>0)$．

所以 f'（1）=0，f（1）=﹣1．

所以曲线 y=f（x）在点（1，f（1））处的切线方程为 y=﹣1．…（5 分）

（II） 因为 $f'(x)=\frac{1}{x}-m(x>0)$，

当 $x\in(0,\frac{1}{m})$时，f'（x）＞0；$x\in(\frac{1}{m},+\infty)$时，f'（x）＜0．

所以 f（x）在 $(0,\frac{1}{m})$上单调递增；在 $(\frac{1}{m},+\infty)$上单调递减．

所以 f（x）的最大值 $g(m)=f(\frac{1}{m})=-\ln m-1$．g（m）＞m﹣2，即 g（m）﹣（m﹣2）＞0．．

设 h（m）=g（m）﹣（m﹣2）=﹣lnm﹣m+1．

因为 $h'(x)=-\frac{1}{m}-1<0$，

所以 h（m）在（0，+∞）上单调递减．

又因为 h（1）=0

所以当 0＜m＜1 时，h（m）＞h（1）=0．

所以 m 取值范围为（0，1）．…（13 分）

20．（14 分）（2016 秋•昌平区期末）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左右焦点分别为 F_1，F_2，且经过点 P（0，$\sqrt{5}$），离心率为$\frac{2}{3}$，过点 F_1 的直线 l 与直线 x=4 交于点 A

（I） 求椭圆 C 的方程；

（II） 当线段 F_1A 的垂直平分线经过点 F_2 时，求直线 l 的方程；

（III）点 B 在椭圆 C 上，当 OA⊥OB，求线段 AB 长度的最小值．

【解答】解：（Ⅰ）由$\begin{cases} b=\sqrt{5} \\ e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3} \\ a^2=b^2-c^2. \end{cases}$ 解得$\begin{cases} a=3 \\ c=2. \end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

（Ⅱ）法一：设 A（4，y），F_1（﹣2，0），

因为线段 F_1A 的垂直平分线经过点 F_2，

所以$|F_1F_2|=|F_2A|$.

由 $2c=4=\sqrt{(4-2)^2+y^2}$，解得 $y=\pm2\sqrt{3}$.

所以直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$（x+2）.

（Ⅱ）法二

设过点 F_1（﹣2，0）的直线 l 的斜率为 k，显然 k 存在.

则直线 l 的方程为 y=k（x+2）.

所以 A（4，6k）.

设 AF_1 的中点 P（x_0，y_0）.

则 $x_0=\frac{-2+4}{2}=1$，$y_0=\frac{0+6k}{2}=3k$.

所以 P（1，3k）.

因为 $PF_2\perp F_1A$，

所以$\frac{3k-0}{1-2}\cdot k=-1$.

所以$k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$（x+2）.

（Ⅲ）点 B 在椭圆 C 上，设 B（m，n），$n\in[-\sqrt{5},0)\cup(0,\sqrt{5}]$，A（4，y）.

因为 OA⊥OB，

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，即 4m+ny=0.

因为点 B 在椭圆 C 上，

所以$\frac{m^2}{9}+\frac{n^2}{5}=1$，

所以$|AB|^2=(m-4)^2+(n-y)^2=m^2-8m+16+n^2-2ny+y^2=m^2-8m+16-n^2-8m+y^2$，

$=m^2+16+n^2+y^2=m^2+16-n^2-\left(\frac{-4m}{n}\right)^2$，

$=9\left(1-\frac{n^2}{5}\right)+16+n^2+\frac{16\times 9\left(1-\frac{n^2}{5}\right)}{n^2}$，

$=\frac{144}{n^2}-\frac{4n^2}{5}-\frac{19}{5}$

设 $t=n^2$，$t\in(0，5]$

设$g(t)=\frac{144}{t}-\frac{4t}{5}-\frac{19}{5}$.

因为$g'(t)=\frac{-144}{t^2}-\frac{4}{5}<0$，

所以$g(t)$在$(0，5]$上单调递减.

所以当$t=5$，即$n=\pm\sqrt{5}$时，$|AB|_{min}=\sqrt{21}$.