

数学(文)

本试卷共 4 页, 满分 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{-1, 0\}$, $B = \{x | -1 < x < 1\}$, 则 $A \cap B =$

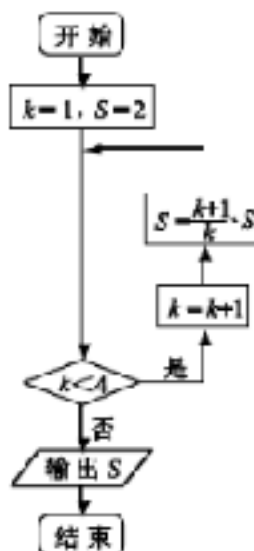
- (A) $\{-1\}$ (B) $\{0\}$
(C) $\{-1, 0\}$ (D) $\{-1, 0, 1\}$

(2) 下列函数中, 在定义域上为减函数的是

- (A) $y = x^2$ (B) $y = \cos x$
(C) $y = x^{-\frac{1}{2}}$ (D) $y = -\ln x$

(3) 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为

- (A) 3 (B) 4
(C) 5 (D) 6



(4) 已知 $x, y \in \mathbf{R}$, 下列不等式不能恒成立的是

- (A) $|x| \geq 0$ (B) $x^2 - 2x - 3 \leq 0$
(C) $2^x > 0$ (D) $x^2 + y^2 \geq 2xy$

(5) 与圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ 相切于原点的直线方程是

- (A) $x - 2y = 0$ (B) $x + 2y = 0$
(C) $2x - y = 0$ (D) $2x + y = 0$

(6) 设 m, n 为实数, 则“ $mn > 0$ ”是“曲线 $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = 1$ 为双曲线”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(7) 已知函数 $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$, $g(x) = x^2 - 2$, 若对任意的实数 x_1 , 总存在实数 x_2 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 则 x_2 的取值范围是

- (A) $[-1, 1]$ (B) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
 (C) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ (D) $[-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$

(8) 某电信运营商推出每月资费套餐业务, 服务和收费标准如下表:

套餐费 (元)	免费主叫时长 (分钟)	超出主叫时长收费 (元/分钟)	免费数据流量 (MB)	超出数据流量收费 (元/MB)
38	30	0.25	300	0.29
48	50	0.25	500	0.29
58	100	0.19	500	0.29
88	220	0.19	700	0.29

小明根据自己每月平均主叫时长和使用数据流量的情况 (其它费用不计), 认为选择 58 元套餐最省钱, 则他每月平均主叫时长和使用数据流量可能为

- (A) 60 分钟和 300 MB (B) 70 分钟和 500 MB
 (C) 100 分钟和 650 MB (D) 150 分钟和 550 MB

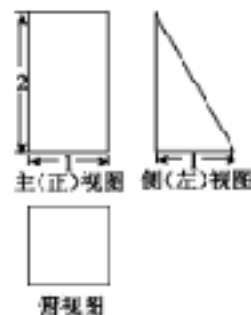
第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

(9) 复数 $\frac{2}{1+i} =$ _____.

(10) 设 $f(x) = \begin{cases} \square\square\square\square\square\square\square\square & x < 0 \\ \log_2 x & x > 0 \end{cases}$ 则 $f(f(-1)) =$ _____.

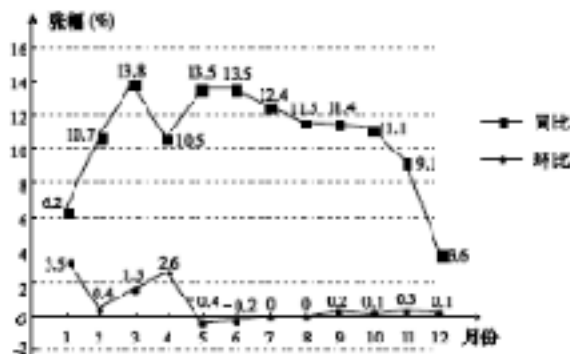
(11) 某三棱柱的三视图如图所示, 该三棱柱的表面积为 _____.



(12) 若 $\vec{OA} \perp \vec{AB}$, $|\vec{OA}| = 2$, 则 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} =$ _____.

(13) 若 x, y 满足 $\begin{cases} x \geq 0, \\ x - y < 1, \text{ 且 } z = x + ay \text{ 的最大值为 } 2, \\ x + y < 1, \end{cases}$ 则 $a =$ _____.

(14) 某市 2016 年各月平均房价同比 (与上一年同月比较) 和环比 (与相邻上月比较) 涨幅情况如下图所示.



根据此图考虑该市 2016 年各月平均房价:

① 同比 2015 年有涨有跌; ② 同比涨幅 3 月份最大, 12 月份最小;

③ 1 月份最高; ④ 5 月比 9 月高, 其中正确结论的编号为_____.

三、解答题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

(15) (本小题 13 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_2 + a_4 = 8$.

(I) 若 a_1, a_3, a_m 成等比数列, 求 m 的值;

(II) 设 $b_n = a_n + 2^{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

(16) (本小题 13 分)

在如图所示的平面图形中, 已知 $CD = \sqrt{2}$, $\angle BCA = 45^\circ$, $\angle ACD = 105^\circ$, $\angle CDB = 15^\circ$,

$\angle BDA = 30^\circ$.

(I) 求 $\triangle BCD$ 的面积;

(II) 求 AC, AB 的长.



(17) (本小题 13 分)

某公司拥有多家连锁店, 所有连锁店共有 1800 名员工, 为调查他们的年龄分布情况, 现随机抽取该公司其中一家连锁店, 将该店所有员工的年龄记录如下:

24, 31, 25, 41, 28, 39, 25, 27, 47,

32, 29, 36, 24, 34, 23, 37, 45, 22.

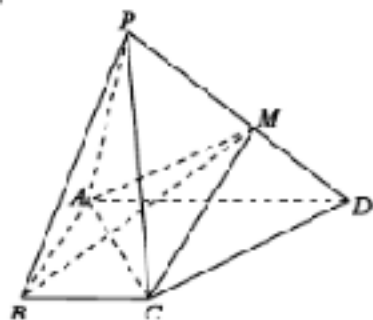
(I) 试估计该公司所有连锁店的员工中年龄超过 40 岁的人数;

(II) 在被抽到的连锁店中, 从年龄在区间 $[30, 40)$ 的员工中, 随机选取 2 人, 求这 2 人年龄相差 5 岁的概率;

(III) 现从被抽到的连锁店的所有员工中, 选派 3 人参加活动, 当这 3 人年龄的方差最大时, 写出这 3 人的年龄. (结论不要求证明)

(18) (本小题 14 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$, $AD = 2BC$, 四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 10, 点 M 在 PD 上.



(I) 求证: $BC \parallel$ 平面 PAD ;

(II) 若 $AM \perp PD$, 求证: $PD \perp$ 平面 ABM ;

(III) 若点 M 是棱 PD 的中点, 求三棱锥 $B-ACM$ 的体积.

(19) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

(I) 求由线 $y = f(x)$ 在点 $A(\pi, f(\pi))$ 处的切线方程;

(II) 证明: 若 $x \in (0, \pi)$, 则 $f(x) < 0$;

(III) 若 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < 2\pi$, 判定 $f(\alpha)$ 与 $f(\beta)$ 的大小关系, 并证明你的结论.

(20) (本小题 13 分)

已知椭圆 $G: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的短轴端点到右焦点 $F_2(c, 0)$ 的距离为 2, 平行四边形 $ABCD$ 的四个顶点都在椭圆 G 上.

(I) 求椭圆 G 的方程;

(II) 若直线 AB 和 AD 的斜率存在且分别为 k_1, k_2 , 证明: $k_1 \cdot k_2$ 为定值;

(III) 当直线 AB 和 DC 分别过椭圆 G 的左焦点 F_1 和右焦点 F_2 时, 求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.