

数学 (理)

本试卷共 4 页, 满分 150 分, 考试时长 120 分钟, 考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | x > 0\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} A =$

(A) $\{x | x < 0\}$ (B) $\{x | x \leq 0\}$

(C) $\{x | x > 0\}$ (D) $\{x | x \geq 0\}$

(2) 下列函数中, 既是偶函数又有零点的是

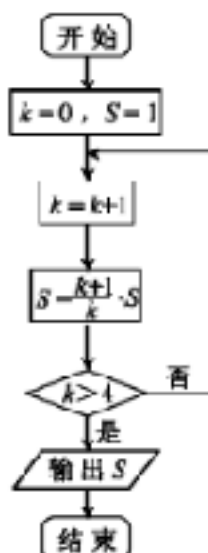
(A) $y = x^{\frac{1}{2}}$ (B) $y = \tan x$

(C) $y = e^x + e^{-x}$ (D) $y = |n|x|$

(3) 执行如图所示的程序框图, 输出的 S 值为

(A) 4 (B) 5

(C) 6 (D) 7



(4) 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 则“ $a > b$ ”是“ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ”的

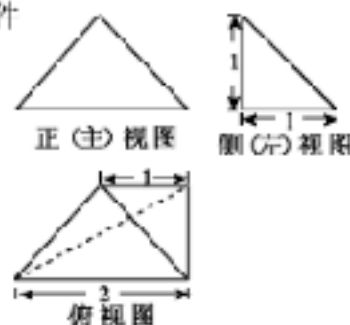
(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件

(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(5) 某三棱锥的三视图如图所示, 该三棱锥体积为

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$

(C) 1 (D) $\frac{3}{2}$



(6) 若 x, y 满足 $\begin{cases} 2x - y + 2 \geq 0, \\ x - y + 2 \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$ 且 $z = -kx + y$ 有最大值, 则 k 的取值范围为

(A) $k, 1$ (B) $1, 2$

(C) $k, 1$ (D) $k, 2$

(7) 设函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ (φ 是常数), 若 $f(0) = f(\frac{2\pi}{3})$, 则 $f(\frac{\pi}{12})$, $f(\frac{4\pi}{3})$,

$f(\frac{\pi}{2})$ 之间的大小关系可能是

- (A) $f(\frac{\pi}{2}) < f(\frac{4\pi}{3}) < f(\frac{\pi}{12})$ (B) $f(\frac{4\pi}{3}) < f(\frac{\pi}{2}) < f(\frac{\pi}{12})$
 (C) $f(\frac{\pi}{2}) < f(\frac{\pi}{12}) < f(\frac{4\pi}{3})$ (D) $f(\frac{\pi}{12}) < f(\frac{4\pi}{3}) < f(\frac{\pi}{2})$

(8) 某公司有 4 家直营店 a, b, c, d , 现需将 6 箱货物运送至直营店进行销售, 各直营店出售该货物以往所得利润统计如下表所示.

利润 箱数	直营店 a	b	c	d
0	0	0	0	0
1	4	2	2	4
2	6	4	5	5
3	7	7	6	6
4	8	8	8	8
5	9	9	8	8
6	10	10	8	8

根据此表, 该公司获得最大总利润的运送方式有

- (A) 1种 (B) 2种 (C) 3种 (D) 4种

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

(9) 复数 $(1+i)^2 =$ _____.

(10) 设 $f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & x \leq 0 \\ \log_2 x & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(f(-1)) =$ _____.

(11) 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$) 的离心率为 2, 则 $b =$ _____.

(12) 在极坐标系中, 点 $A(2, \frac{\pi}{3})$ 到直线 $\rho \cos \theta = 2$ 的距离是 _____.

(13) 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的弦 AB 长为 $\sqrt{2}$, 若线段 AP 是圆 O 的直径, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} =$ _____;
 若点 P 为圆 O 上的动点, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 _____.

(14) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \frac{1}{k}$, $k \geq 2, k \in \mathbf{N}^+$, $[a_n]$ 表示不超过 a_n 的最大整数 (如 $[1.6] = 1$), 记 $b_n = [a_n]$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

①若数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, 则 $T_n =$ _____;

②若数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $k+1$ 的等比数列, 则 $T_n =$ _____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应与文字说明，演算步骤或证明过程，

(15) (本小题 13 分)

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } a=2\sqrt{3}, b=3, \cos A=-\frac{1}{3}.$$

(I) 求 $\sin B$;

(II) 设 BC 的中点为 D , 求中线 AD 的长.

(16) (本小题 13 分)

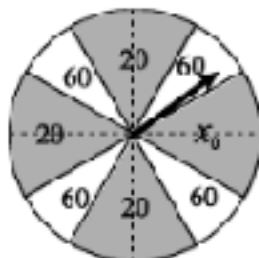
某大型超市拟对店庆当天购物满 288 元的顾客进行回馈奖励. 规定: 顾客转动十二等分且质地均匀的圆形转盘 (如图), 待转盘停止转动时, 若指针指向扇形区域, 则顾客可领取此区域对应面额 (单位: 元) 的超市代金券. 假设转盘每次转动的结果互不影响.

(I) 若 $x_0 \neq 60$, 求顾客转动一次转盘获得 60 元代金券的概率;

(II) 某顾客可以连续转动两次转盘并获得相应奖励, 当 $x_0 = 20$ 时, 求该顾客第一次获得代金券的面额不低于第二次获得代金券的面额的概率;

(III) 记顾客每次转动转盘获得代金券的面额为 X , 当 x_0 取何值时, X 的方差最小?

(结论不要求证明)



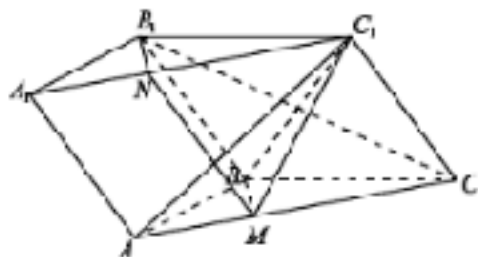
(17) (本小题 14 分)

如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABC , 四边形 BCC_1B_1 为菱形, 点 M 是棱 AC 上不同于 A, C 的点, 平面 B_1BM 与棱 A_1C_1 交于点 N , $AB=BC=2$, $\angle ABC=90^\circ$, $\angle BB_1C_1=60^\circ$.

(I) 求证: $B_1N \parallel$ 平面 C_1BM ;

(II) 求证: $B_1C \perp$ 平面 ABC_1 ;

(III) 若二面角 $A-BC_1-M$ 为 30° , 求 AM 的长.



(18) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \frac{mx^2}{x^2 - m}$, 且 $m \neq 0$.

(I) 当 $m=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(III) 若函数 $f(x)$ 有最值, 写出 m 的取值范围. (只需写出结论)

(19) (本小题 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴端点到右焦点 $F(1,0)$ 的距离为 2.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 过点 F 的直线交椭圆 C 于 A, B 两点, 交直线 $l: x=4$ 于点 P , 若 $|PA| = \lambda_1 |AF|$,

$|PB| = \lambda_2 |BF|$, 求证: $\lambda_1 - \lambda_2$ 为定值.

(20) (本小题 13 分)

已知集合 A_1, A_2, \dots, A_n 为集合 U 的 n 个非空子集, 这 n 个集合满足: ① 从中任取 m 个集合都有 $A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_m} \neq U$ 成立; ② 从中任取 $m+1$ 个集合都有 $A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \dots \cup A_{j_m} \cup A_{j_{m+1}} = U$ 成立.

(I) 若 $U = \{1, 2, 3\}$, $n=3$, $m=1$, 写出满足题意的一组集合 A_1, A_2, A_3 ;

(II) 若 $n=4$, $m=2$, 写出满足题意的一组集合 A_1, A_2, A_3, A_4 以及集合 U ;

(III) 若 $n=10$, $m=3$, 求集合 U 中的元素个数的最小值.