

## 深圳市 2018 届高三年级第一次调研考试

## 数学（理科）

2018.3

第 I 卷（选择题共 60 分）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | \log_2 x < 1\}$ ,  $B = \{x | \sqrt{x^3 - 1}\}$ , 则  $A \cap B =$

- A. (0, 3]    B. [1, 2)    C. [-1, 2)    D. [-3, 2)

2. 已知  $a \in \mathbb{R}$ ,  $i$  为虚数单位, 若复数  $z = \frac{a+i}{1-i}$ ,  $|z|=1$  则  $a=$

- A.  $\pm\sqrt{2}$     B. 1    C. 2    D.  $\pm 1$

3. 已知  $\sin(\frac{p}{6} - x) = \frac{1}{2}$ , 则  $\sin(\frac{19p}{6} - x) + \sin^2(-\frac{2p}{3} + x) =$

- A.  $\frac{1}{4}$     B.  $\frac{3}{4}$     C.  $-\frac{1}{4}$     D.  $-\frac{1}{2}$

4. 夏秋两季, 生活在长江口外浅海域的中华舞回游到长江, 历经三千多公里的溯流搏击, 回到金沙江一带产卵繁殖, 产后待幼鱼长大到 15 厘米左右, 又携带它们旅居外海。一个环保组织曾在金沙江中放生一批中华鱼苗, 该批鱼苗中的雌性个体能长成熟的概率为 0.15, 雌性个体长成熟又能成功溯流产卵繁殖的概率为 0.05, 若该批鱼苗中的一个雌性个体在长江口外浅海域已长成熟, 则其能成功溯流产卵繁殖的概率为

- A. 0.05    B. 0.0075    C.  $\frac{1}{3}$     D.  $\frac{1}{6}$

5. 已知双曲线  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$  的一条渐近线与圆  $x^2 + (y-a)^2 = \frac{a^2}{9}$ , 则该双曲线的离心率为

- A. 3    B.  $\sqrt{3}$     C.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$     D.  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

6. 设有下面四个命题:

$p_1$ :  $\exists n \in N, n^2 > 2^n$ ;

$p_2$ :  $x \in \mathbb{R}$ , “ $x>1$ ” 是 “ $x>2$ ” 的充分不必要条件;

$p_3$ : 命题“若  $x=y$ , 则  $\sin x=\sin y$ ”的逆否命题是“若  $\sin x \neq \sin y$ , 则  $x \neq y$ ”;

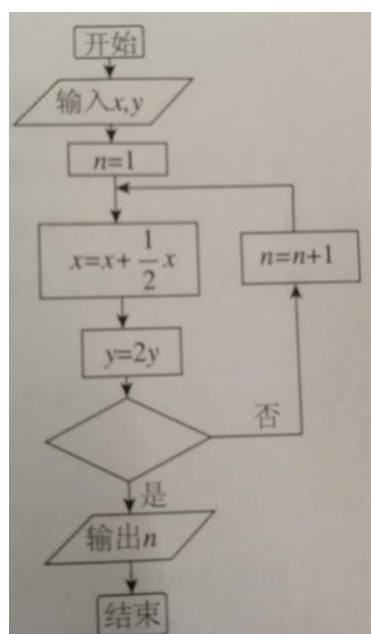
$p_4$ : 若 “ $p \vee q$ ” 是真命题, 则  $p$  一定是真命题。

其中为真命题的是

- A.  $p_1, p_2$     B.  $p_2, p_3$     C.  $p_2, p_4$     D.  $p_1, p_3$

7. 中国古代数学著作《算学启蒙》中有关于“松竹并生”的问题: 松长五尺, 竹长两尺, 松日自半, 竹日自倍, 松竹何日而长等。意思是现有松树高 5 尺, 竹子高 2 尺, 松树每天长自己高度的一半, 竹子每天长自己高度的一倍, 问在第几天会出现松树和竹子一般高?

如图是源于其思想的一个程序框图, 若输入的  $x=5$ ,  $y=2$ , 输出的  $n$  为 4,



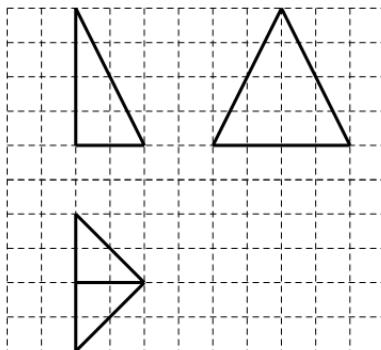
则程序框图中的◇中应填入

- A.  $y < x$     B.  $y \leq x$     C.  $x \leq y$     D.  $x = y$

8. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的外接球表面积为

- A.  $\frac{16}{9}\pi$     B.  $\frac{25}{4}\pi$   
C.  $16\pi$     D.  $25\pi$

9. 在  $\triangle ABC$  中  $AB \perp AC$ ,  $|AC| = \sqrt{2}$ ,  $BC = \sqrt{3}BD$ , 则  $\angle ADB =$



- A.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$     B.  $2\sqrt{2}$     C.  $2\sqrt{3}$     D.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 且在区间  $(0, +\infty)$  上有  $3f(x) + xf'(x) > 0$

恒成立, 若  $g(x) = x^3f(x)$ , 令  $a = g(\log_2(\frac{1}{e}))$ ,  $b = g(\log_5 2)$ ,  $c = g(e^{-\frac{1}{2}})$  则

- A.  $a < b < c$     B.  $b < a < c$     C.  $b < c < a$     D.  $c < b < a$

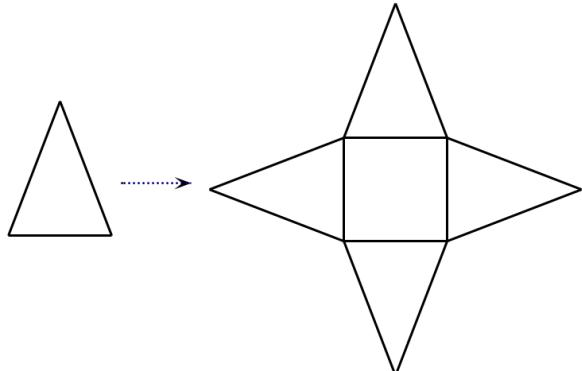
11. 设等差数列  $\{a_n\}$  满足:  $3a_7 = 5a_{13}$ ,  $\cos^2 a_4 - \cos^2 a_4 \sin^2 a_7 + \sin^2 a_4 \cos^2 a_7 - \sin^2 a_4$

$= -\cos(a_5 + a_6)$  公差  $d \in (-2, 0)$ , 则数列  $\{a_n\}$  的前项和  $S_n$  的最大值为

- A.  $100\pi$     B.  $54\pi$     C.  $77\pi$     D.  $300\pi$

12. 一个等腰三角形的周长为 10, 四个这样相同等腰三角形底边围成正方形, 如图, 若这四个三角形都绕底边旋转, 四个顶点能重合在一起, 构成一个四棱锥, 则围成的四棱锥的体积的最大值为

- A.  $\frac{500\sqrt{2}}{81}$     B.  $\frac{500\sqrt{2}}{27}$   
C.  $5\sqrt{3}$     D.  $15\sqrt{2}$



## 第 II 卷 (非选择题共 90 分)

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13~21 题为必考题, 每道试题考生都必须作答, 第 22~23 题为选考题, 考生根据要求作答。

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

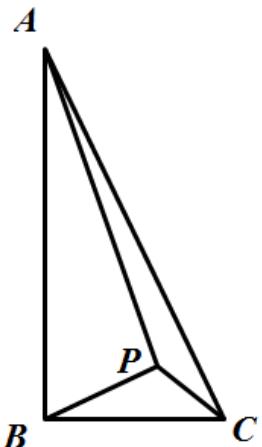
$$\begin{cases} 2x + y + 2 \geq 0 \\ x + 2y - 2 \geq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$$

13. 若实数  $x$ ,  $y$  满足约束条件  $\begin{cases} 2x + y + 2 \geq 0 \\ x + 2y - 2 \geq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$ , 则  $z = 2x - y$  的最小值为 \_\_\_\_.

14.  $(x^2 + 1)(2x + 1)^6$  展开式的  $x^3$  的系数是\_\_\_\_\_.

15. 已知 F 为抛物线  $y^2 = 4\sqrt{3}x$  的焦点，过点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点，若  $\frac{|AF|}{|FB|} = 3$ ，则  $|AB| =$  \_\_\_\_\_.

16. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $\angle ABC=90^\circ$ ， $AC=2CB=2\sqrt{3}$ ，P 是  $\triangle ABC$  内一动点， $\angle BPC=120^\circ$ ，则 AP 的最小值为\_\_\_\_\_.



三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。请将解答过程书写在答题纸上，并写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

设数列  $\{a_n\}$  的前 n 项和为  $S_n$ ， $a_1 = 2$ ， $a_{n+1} = 2 + S_n$ ，( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

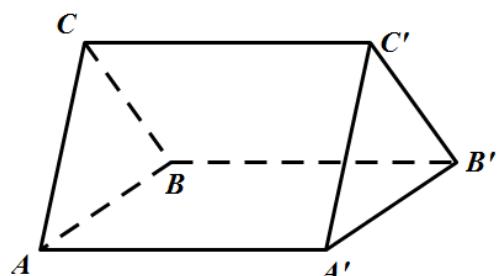
(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

(II) 设  $b_n = 1 + \log(\varphi_n^2)$ ，求数列  $\frac{1}{b_n b_{n+1}}$  的前 n 项和  $T_n < \frac{1}{6}$

18. (本小题满分 12 分)

如图，在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中，底面  $ABC$  为边长为  $2\sqrt{2}$  等边三角形， $BB_1=4$ ， $AC_1 \perp BB_1$ ，且  $\angle A_1B_1B=45^\circ$ .

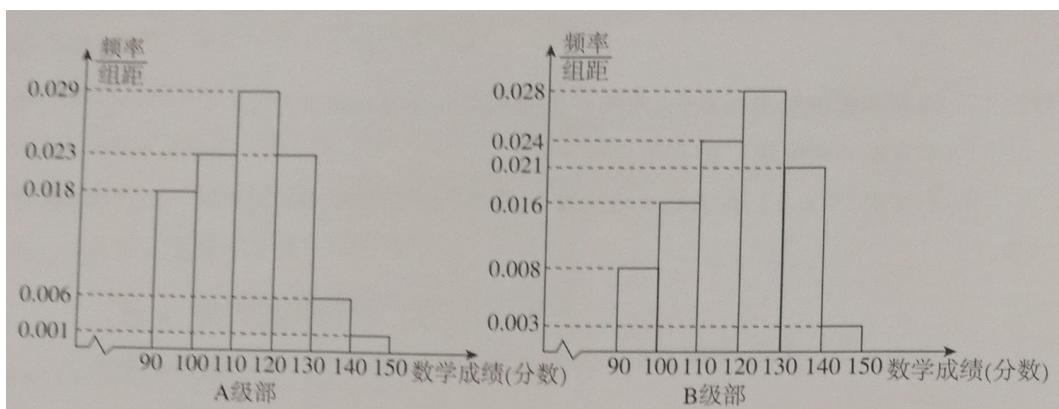
- (I) 证明：平面  $BCC_1B_1 \perp$  平面  $ABB_1A_1$ ；  
 (II) 求  $B-AC-A_1$  二面角的余弦值。



19. (本小题满分 12 分)

某重点中学将全部高一新生分成 A, B 两个成绩相当（成绩的均值、方差都相同）的级部，A 级部采用传统形式的教学方式，B 级部采用新型的基于信息化的自主学习教学方式。

期末考试后分别从两个级部中各随机抽取 100 名学生的数学成绩进行统计，得到如下频率分布直方图：



若记成绩不低于 130 分者为“优秀”。

(I) 根据频率分布直方图，分别求出 A, B 两个级部的中位数和众数的估计值（精确到 0.01）；请根据这些数

据初步分析 A, B 两个级部的数学成绩的优劣.

(II) 填写下面的列联表，并根据列联表判断是否有 99% 的把握认为“优秀”与教学方式有关?

级部 是否优秀	优秀	不优秀	合计
A 部			
B 部			
合计			

(III) ①现从所抽取的 B 级部的 100 人中利用分层抽样的方法再抽取 25 人，再从这 25 人中随机抽出 2 人去参加“信息化的自主学习”的学习体会座谈，求抽出的两人中至少有一个为“优秀”的概率；

②将频率视为概率，从 B 级部所有学生中随机抽取 25 人去参加“信息化的自主学习”的学习体会座谈，记其中为“优秀”的人数为  $X$ ，求  $X$  的数学期望和方差。

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.05	0.025	0.010	0.001
$k$	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{1}{2}$ ，直线  $l: x + 2y = 4$  与椭圆有且只有一个交点 T.

(I) 求椭圆 C 的方程和点 T 的坐标；

(II) O 为坐标原点，与 OT 平行的直线  $l'$  与椭圆 C 交于不同的两点 A, B，直线  $l'$  与直线  $l$  交于点 P，试判断

$$\frac{|PT|^2}{|PA| \cdot |PB|}$$
 是否为定值，若是请求出定值，若不是请说明理由。

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = ax - b(x+1)\ln(x+1) + 1$ ，曲线在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $x - y + b = 0$ .

(I) 求  $a, b$  的值；

(II) 若当  $x \geq 0$  时，关于  $x$  的不等式  $f(x) \leq kx^2 - x + 1$  恒成立，求  $k$  的取值范围.

请考生在第 22、23 题中任选一道作答，如果多做，则按所做的第 1 题计分。作答时。

请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目题号后的方框涂黑。

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为  

$$\begin{cases} x = a + \frac{3}{5}t \\ y = 1 + \frac{4}{5}t \end{cases}$$
 $(t \text{ 为参数})$ . 在以 0 为极点、

$x$  轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线  $C$  的方程为  $r\cos^2 q + 8\cos q - r = 0$

- (I) 求直线  $l$  的普通方程和曲线  $C$  的直角坐标方程;
- (II) 已知点  $P(a, 1)$ , 设直线  $l$  与曲线  $C$  的两个交点为  $A, B$ , 若  $|PA| = 3|PB|$ . 求  $a$  的值。

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知  $a > 0, b > 0$ , 且  $a^2 + b^2 = 2$ .

(I) 若是  $\frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} \geq |2x - 1| - |x - 1|$  恒成立, 求  $x$  的取值范围;

(II) 证明:  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a^5 + b^5) \geq 4$ .

# 深圳市 2018 届高三年级第一次调研考试

## 数学(理科)试卷参考答案与评分标准

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. B 2. D 3. A 4. C 5. D 6. D 7. B 8. D 9. D 10. C 11. C 12. A

2. 解析:  $z = \frac{(a+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{a-1+(a+1)i}{2}$ ,  $|z| = \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+1}{2}\right)^2} = 1$ , 所以  $a^2 = 1$ , 故  $a = \pm 1$ .

4. 解析: 由条件概率  $P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.05}{0.15} = \frac{1}{3}$ .

9. 解析:  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$ ,

又  $AB \perp AC$ , 所以  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AC}|^2 = 2$ , 故  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

10. 解析:  $g(x) = x^3 f(x)$  为偶函数,  $(0, +\infty)$  上是增函数,  $\left| \log_2 \left( \frac{1}{e} \right) \right| = |- \log_2 e| \in (1, 2)$ .

$\log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}}$ , 所以  $b < c < a$ .

11. 解析:  $3a_7 = 5a_{13}$ ,  $3(a_1 + 6d) = 5(a_1 + 12d)$ ,  $a_1 = -21d$ ,

$$\begin{aligned} &\cos^2 a_4 - \cos^2 a_4 \sin^2 a_7 - \sin^2 a_4 + \sin^2 a_4 \cos^2 a_7 \\ &= \cos^2 a_4 (1 - \sin^2 a_7) - \sin^2 a_4 (1 - \cos^2 a_7) \\ &= \cos^2 a_4 \cos^2 a_7 - \sin^2 a_4 \sin^2 a_7 \\ &= (\cos a_4 \cos a_7 - \sin a_4 \sin a_7)(\cos a_4 \cos a_7 + \sin a_4 \sin a_7) \\ &= \cos(a_4 + a_7) \cos(a_4 - a_7) = -\cos(a_5 + a_6). \end{aligned}$$

又  $a_4 + a_7 = a_5 + a_6$ ,

所以  $\cos(a_4 - a_7) = -1$ , 故  $a_4 - a_7 = -3d = \pi + 2k\pi$ , 所以  $d = -\frac{\pi + 2k\pi}{3}$ .

又公差  $d \in (-2, 0)$ , 所以  $d = -\frac{\pi}{3}$ ,  $a_1 = 7\pi$ ,  $a_n = 7\pi + (n-1)\left(-\frac{\pi}{3}\right) \geqslant 0$ , 所以  $n \leqslant 22$ ,

故  $S_{22}$  或  $S_{21}$  最大, 最大值为  $S_{22} = 22 \times 7\pi + \frac{22 \times 21}{2} \times \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 77\pi$ .

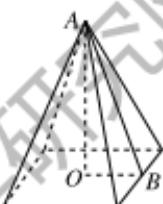
12. 解析: 四棱锥如图, 设底面正方形的边长的一半为  $x$ ,

$$\text{则有 } AO = \sqrt{(5-x)^2 - x^2 - x^2} = \sqrt{-x^2 - 10x + 25}.$$

$$V = \frac{4}{3}x^2\sqrt{-x^2 - 10x + 25} = \frac{4}{3}\sqrt{-x^6 - 10x^5 + 25x^4}.$$

$$\text{设 } y = -x^6 - 10x^5 + 25x^4, y' = -6x^5 - 50x^4 + 100x^3 = 2x^3(-3x^2 - 25x + 50) = 2x^3(3x^2 + 25x - 50)$$

$(x+10)(-3x+5)=0$ , 解得  $x_1 = -10$  (舍去),  $x_2 = \frac{5}{3}$  (能形成四棱锥), 故  $V_{\max} = \frac{500\sqrt{2}}{81}$ .



**二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。**

$$13. -6 \quad 14. 172 \quad 15. \frac{16\sqrt{3}}{3} \quad 16. \sqrt{13}-1$$

16. 解析：设 $\angle PBC = \theta$ ,  $\angle ACP + \angle BCP = 60^\circ$ ,  $\angle PBC + \angle BCP = 60^\circ$ , 所以 $\angle ACP = \angle PBC = \theta$ .

在 $\triangle PBC$ 中,由正弦定理 $\frac{BC}{\sin \angle BPC} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2 = \frac{PC}{\sin \angle PBC}$ ,

所以  $PC = 2 \sin \theta$ ,

在 $\triangle CPA$ 中， $AP^2 = PC^2 + AC^2 - 2 \times PC \times AC \cos \theta$ ，

$$\text{所以 } AP^2 = 4 \sin^2 \theta + 12 - 8\sqrt{3} \sin \theta \cos \theta = 14 - 2(2\sqrt{3} \sin 2\theta + \cos 2\theta) = 14 - 2\sqrt{13} \sin(2\theta + \varphi).$$

其中  $\tan \varphi = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ ,  $0 < \theta < 60^\circ$ , 所以  $0 < 2\theta < 120^\circ$ .

因为  $AP^2$  的最小值为  $14 - 2\sqrt{13}$ , 所以  $AP$  的最小值  $\sqrt{14-2\sqrt{13}} = \sqrt{1+(\sqrt{13})^2-2\sqrt{13}} = \sqrt{13}-1$ .

**三、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.**

$$17. \text{解: (I)} a_2 = 2 + s_1 = 4,$$

由  $a_{n+1} = 2 + S_n$  ①, 可得  $a_n = 2 + S_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ) ②.

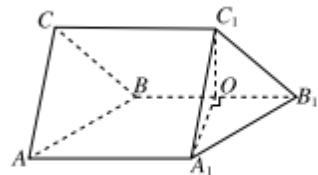
当  $n=1$  时,  $a_1=2^1$ , 所以  $a_n=2^n(n\in \mathbb{N}^*)$ . ..... 6 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得  $b_n = 1 + \log_2 (2^n)^2 = 2n+1$ ,

$$\frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right), \dots \quad 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) < \frac{1}{6}. \quad \dots \dots \dots \quad 12 \text{ 分}$$

18. 解：(I) 过点  $A_1$  在平面  $ABB_1A_1$  内作  $BB_1$  的垂线，垂足为  $O$ ，连接



C<sub>1</sub>O<sub>2</sub>

$\because A_1C_1 \perp B_1B, A_1O \perp B_1B, A_1C_1 \cap A_1O = A_1$ ,

$\therefore B_1B \perp$ 平面  $A_1OC_1$ . ..... 1分

$\because OC_1 \subset \text{平面 } A_1OC_1, \therefore B_1B \perp OC_1$ . ..... 2分

由题可知  $A_1B_1 = A_1C_1 = B_1C_1 = 2\sqrt{2}$ . 在  $\triangle A_1OB_1$  中，

$$\because A_1O \perp OB_1, \angle A_1B_1B = 45^\circ, A_1B_1 = 2\sqrt{2},$$

$\therefore OA_1 = OB_1 = 2$ , 在  $\triangle OB_1C_1$  中,  $\because C_1O \perp OB_1$ ,  $B_1C_1 = 2\sqrt{2}$ ,  $OB_1 = 2$ ,  $\therefore OC_1 = 2$ . ..... 3 分

$$\therefore OC_1^2 + OA_1^2 = A_1C_1^2.$$

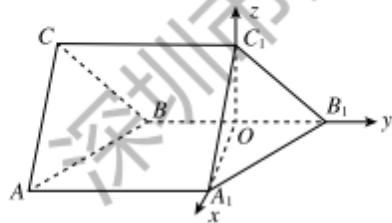
$\therefore OC_1 \perp OA_1$ ,  $\because OA_1 \cap OB_1 = O$ ,

$\therefore OC_1 \perp$ 平面  $ABB_1A_1$ . ..... 4分

$\therefore OC_1 \subset$  平面  $BCC_1B_1$ .

$\therefore$  平面  $BCC_1B_1 \perp$  平面  $ABB_1A_1$ . ..... 5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知  $OC_1$ ,  $OA_1$ ,  $OB_1$  两两垂直, 故以  $O$  为坐标原点,  $OA_1$  的方向为  $x$  轴正方向,  $OB_1$  的方向为  $y$  轴正方向,  $OC_1$  的方向为  $z$  轴正方向, 建立如图所示空间直角坐标系  $O-xyz$ .



$$\text{又 } AB=2\sqrt{2}, BB_1=4, OC_1=2, OA_1=2, OB_1=2.$$

$$A_1(2,0,0), B_1(0,2,0), C_1(0,0,2), B(0,-2,0), A(2,-4,0), C(0,-4,2).$$

$$\overrightarrow{BA} = (2, -2, 0), \overrightarrow{BC} = (0, -2, 2), \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2), \overrightarrow{AA_1} = (0, 4, 0). \quad \dots \quad 7 \text{ 分}$$

设  $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$  为平面  $ABC$  的法向量, 则有

$$\text{则} \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{BA} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} 2x_1 - 2y_1 = 0, \\ -2y_1 + 2z_1 = 0, \end{cases} \text{可取 } n = (1, 1, 1). \dots \quad 9 \text{ 分}$$

设  $m = (x_2, y_2, z_2)$  为平面  $A_1AC$  的法向量, 则有

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -2x_2 + 2z_2 = 0, \\ 4y_2 = 0, \end{cases} \text{可取 } \mathbf{m} = (1, 0, 1), \dots \quad 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos\langle n, m \rangle = \frac{n \cdot m}{|n||m|} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

所以二面角  $B-AC-A_1$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ . ..... 12 分

19. 解:(I) 设 A 级部的数学成绩的中位数为  $x$ ,

$$则 0.18 + 0.23 + (x - 110) \times 0.029 = 0.5.$$

解得  $x \approx 113$ , 10 分.

众数： $\frac{110+120}{2}=115$  分， ..... 2分

设 B 级部的数学成绩的中位数为  $y$ ,

$$则 0.08 + 0.16 + 0.24 + (y - 120) \times 0.028 = 0.5.$$

解得  $y \approx 120.71$  分.

$$\text{众数: } \frac{120+130}{2} = 125 \text{ 分.}$$

从 A、B 两个级部的数学成绩的中位数和众数的估计值看, B 级部的数学成绩的三个数据都大于 A 级部的数据, 故初步分析 B 级部的数学成绩优于 A 级部的数学成绩. ..... 4 分

( II )

是否优秀 级部	优秀	不优秀	合计
A 级部	7	93	100
B 级部	24	76	100
合计	31	169	200

5 分

由列联表可知  $K^2$  的观测值

$$k = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200 \times (93 \times 24 - 76 \times 7)^2}{169 \times 31 \times 100 \times 100} \approx 11.033 > 6.635,$$

所以有 99% 的把握认为“优秀”与教学方式有关。 ..... 8 分

(Ⅲ)①依题意 B 级部的 100 个样本利用分层抽样的方法再抽取的 25 人中“优秀”的有 6 人，“不优秀”的有 19 人，则这 25 人中随机抽出 2 人至少有一个为“优秀”的概率为

②由题意可知,随机变量  $X$  服从二项分布  $X \sim B(25, 0.24)$ ,

则  $E(X)=6$ ;  $D(X)=25 \times 0.24 \times 0.76=4.56$ . ..... 12分

20. 解:(I)由 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ ,得 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$ , $b^2=\frac{3}{4}a^2$ ,则椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{3a^2}=1$ ,则 $\begin{cases} x+2y=4, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{3a^2}=1. \end{cases}$

消去  $x$ , 得  $\frac{16}{3}y^2 - 16y + 16 - a^2 = 0$  ①, 由  $\Delta = 0$ , 得  $a^2 = 4$ .

椭圆 C 的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . .... 4 分

由①得  $y_T = \frac{3}{2}$ , 所以点  $T$  的坐标为  $(1, \frac{3}{2})$ . ..... 5分

(II) 设直线  $l'$  的方程为  $y = \frac{3}{2}x + t$ ,

由  $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + t, \\ x + 2y = 4, \end{cases}$  得点  $P$  的坐标为  $(1 - \frac{t}{2}, \frac{3}{2} + \frac{t}{4})$ , 所以  $|PT|^2 = \frac{5}{16}t^2$ . ..... 6 分

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + t, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{消去 } y \text{ 得 } x^2 + tx + \frac{t^2}{3} - 1 = 0.$$

$$\Delta = t^2 - 4 \times \left( \frac{t^2}{3} - 1 \right) > 0, \text{ 所以 } t^2 < 12.$$

$$y_1 = \frac{3}{2}x_1 + t, y_2 = \frac{3}{2}x_2 + t,$$

$$|PA| = \sqrt{\left(1 - \frac{t}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{t}{4} - y_1\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2} \left|\frac{2-t}{2} - x_1\right|. \quad \dots \quad 9 \text{ 分}$$

$$\text{同理 } |PB| = \frac{\sqrt{13}}{2} \left|\frac{2-t}{2} - x_2\right|,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |PA| \cdot |PB| &= \frac{13}{4} \left| \left(\frac{2-t}{2} - x_1\right) \left(\frac{2-t}{2} - x_2\right) \right| \\ &= \frac{13}{4} \left| \left(\frac{2-t}{2}\right)^2 - \left(\frac{2-t}{2}\right)(x_1 + x_2) + x_1 x_2 \right| \\ &= \frac{13}{4} \left| \left(\frac{2-t}{2}\right)^2 - \left(\frac{2-t}{2}\right)(-t) + \frac{t^2 - 3}{3} \right| = \frac{13}{48} t^2. \end{aligned} \quad \dots \quad 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \frac{|PT|^2}{|PA| \cdot |PB|} = \frac{\frac{5}{16}t^2}{\frac{13}{48}t^2} = \frac{15}{13} \text{ 为定值.} \quad \dots \quad 12 \text{ 分}$$

21. 解:(I)  $f(0)=1$ , 所以直线  $x-y+b=0$  过点  $(0,1)$ , 故  $b=1$ .

$$\text{又 } f'(x) = a - b - b \ln(1+x), f'(0) = a - b = a - 1,$$

由于直线  $x-y+b=0$  的斜率为 1, 所以  $f'(0) = a - 1 = 1$ , 所以  $a = 2$ ,

综上  $a=2, b=1$ . 4 分

(II) 由(I)可知  $f(x) \geq kx^2 + x + 1$ , 即  $2x - (x+1)\ln(x+1) + 1 \geq kx^2 + x + 1$ ,

所以  $kx^2 - x + (x+1)\ln(x+1) \leq 0$  在  $x \geq 0$  时, 恒成立.

$$\text{设 } g(x) = kx^2 - x + (x+1)\ln(x+1), x \geq 0.$$

显然  $g(0)=0$ .

$$\text{又 } g'(x) = 2kx + \ln(x+1), \text{ 设 } h(x) = g'(x) = 2kx + \ln(x+1),$$

$$\text{则 } h'(x) = 2k + \frac{1}{x+1}. \quad \dots \quad 6 \text{ 分}$$

当  $2k \geq 0$  时,  $h'(x) > 0$ , 故  $y=h(x)$  单调递增, 所以  $h(x) \geq h(0)=0$ , 故  $y=g(x)$  也单调递增,

所以  $g(x) \geq g(0)=0$ , 与题设矛盾; 8 分

$$\text{当 } 2k < 0 \text{ 时, } h'(x) = 0, \text{ 故 } x = -1 - \frac{1}{2k},$$

① 当  $k \leq -\frac{1}{2}$  时,  $-1 - \frac{1}{2k} < 0$ , 在  $x \geq 0$  上  $h'(x) \leq 0$ , 故  $y=h(x)$  单调递减, 又  $h(x) \leq h(0)=0$ ,

故  $y=g(x)$  也单调递减, 所以  $g(x) \leq g(0)=0$  恒成立; ..... 10 分

②当  $k > -\frac{1}{2}$  时,  $-1 - \frac{1}{2k} > 0$ , 当  $x \in (0, -1 - \frac{1}{2k})$  时,  $h'(x) > 0$ , 当  $x \in (-1 - \frac{1}{2k}, +\infty)$  时,  $h'(x) < 0$ , 此时函数  $h(x)$  在  $x \in (0, -1 - \frac{1}{2k})$  上单调递增,  $h(x)$  在  $x \in (-1 - \frac{1}{2k}, +\infty)$  上单调递减; 又  $h(0)=0$ , 所以在  $x \in (0, -1 - \frac{1}{2k})$  时  $h(x) > h(0)=0$ , 故在  $x \in (0, -1 - \frac{1}{2k})$  上  $g(x)$  单调递增, 所以  $g(x) \geq g(0)=0$ , 与题设矛盾.

综上,  $k \leq -\frac{1}{2}$ . ..... 12 分

22. 解: (I) 因为  $\begin{cases} x = a + \frac{3}{5}t, \\ y = 1 + \frac{4}{5}t, \end{cases}$  所以  $\begin{cases} x - a = \frac{3}{5}t, \\ y - 1 = \frac{4}{5}t, \end{cases}$  所以  $4x - 3y - 4a + 3 = 0$ .

故直线  $l$  的直角坐标方程为  $4x - 3y - 4a + 3 = 0$ . ..... 2 分

由  $\rho \cos^2 \theta + 8 \cos \theta - \rho = 0$ , 得  $\rho^2 \cos^2 \theta + 8\rho \cos \theta - \rho^2 = 0$ .

又  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$  所以  $x^2 + 8x - x^2 - y^2 = 0$ , 所以  $y^2 = 8x$ .

故  $C$  的直角坐标方程为  $y^2 = 8x$ . ..... 4 分

(II) 设  $A, B$  的两个参数分别为  $t_1, t_2$ ,

所以  $\begin{cases} y^2 = 8x, \\ x = a + \frac{3}{5}t, \\ y = 1 + \frac{4}{5}t, \end{cases}$  所以  $\left(1 + \frac{4}{5}t\right)^2 = 8\left(a + \frac{3}{5}t\right)$ , 所以  $\frac{16}{25}t^2 + \frac{16}{5}t - 8a + 1 = 0$ .

所以  $\begin{cases} t_1 + t_2 = 5, \\ t_1 t_2 = \frac{25}{16}(1 - 8a), \end{cases}$  ..... 6 分

由  $\Delta = \left(\frac{16}{5}\right)^2 - 4 \times \frac{16}{25} \times (1 - 8a) > 0$ , 得  $a > -\frac{3}{8}$ .

因为  $|PA| = 3|PB|$ , 所以  $t_1 = 3t_2$  或  $t_1 = -3t_2$ . ..... 8 分

当  $t_1 = 3t_2$  时,  $\begin{cases} t_1 + t_2 = 4t_2 = 5, \\ t_1 t_2 = 3t_2^2 = \frac{25}{16}(1 - 8a), \end{cases}$  解得  $a = -\frac{1}{4} > -\frac{3}{8}$ ,

$$\text{当 } t_1 = -3t_2 \text{ 时,} \begin{cases} t_1 + t_2 = -2t_2 = 5, \\ t_1 t_2 = -3t_2^2 = \frac{25}{16}(1-8a), \end{cases} \text{解得 } a = \frac{13}{8} > -\frac{3}{8},$$

综上,  $a = \frac{13}{8}$  或  $a = -\frac{1}{4}$ . ..... 10 分

$$23. \text{解: (I) 设 } y = |2x-1| - |x-1| = \begin{cases} x, & x \geq 1, \\ 3x-2, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ -x, & x < \frac{1}{2}, \end{cases} \text{..... 1 分}$$

由  $a^2 + b^2 = 2$ , 得  $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = 1$ .

$$\text{故 } \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} \right) (a^2 + b^2) = \frac{1}{2} \left( 1 + 4 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{4a^2}{b^2} \right) \geq \frac{1}{2} \left( 1 + 4 + 2\sqrt{\frac{b^2}{a^2} \times \frac{4a^2}{b^2}} \right) = \frac{9}{2}. \text{..... 3 分}$$

所以  $\frac{9}{2} \geq |2x-1| - |x-1|$ .

当  $x \geq 1$  时,  $x \leq \frac{9}{2}$ , 得  $1 \leq x \leq \frac{9}{2}$ ;

当  $\frac{1}{2} \leq x < 1$  时,  $3x-2 \leq \frac{9}{2}$ ,  $x \leq \frac{13}{6}$ , 得  $\frac{1}{2} \leq x < 1$ ;

当  $x < \frac{1}{2}$  时,  $-x \leq \frac{9}{2}$ ,  $x \geq -\frac{9}{2}$ , 得  $-\frac{9}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ ,

综上  $-\frac{9}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$ . ..... 5 分

$$(II) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (a^5 + b^5)$$

$$= a^4 + b^4 + \frac{b^5}{a} + \frac{a^5}{b}$$

$$= (a^2 + b^2)^2 + \frac{b^5}{a} + \frac{a^5}{b} - 2a^2b^2$$

$$\geq (a^2 + b^2)^2 + 2\sqrt{\frac{b^5 a^5}{a b}} - 2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 = 4. \text{..... 10 分}$$

另解: 由柯西不等式可得

$$\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) (a^5 + b^5) = \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{b}} \right)^2 \right] \times [(a^{\frac{5}{2}})^2 + (b^{\frac{5}{2}})^2] \geq (a^2 + b^2)^2 = 4.$$