2018 年南京市中考指导书

数学参考答案

（赠品，供教师参考）

第一章　数与式

1.1　实数

例 1　**解**：(1) ∵ 一个数的相反数是 2，∴ 这个数是 -2. ∴ 这个数的倒数是 $-\frac{1}{2}$. ∴ 填 $-\frac{1}{2}$　(2) 1.2×10^{-7}　(3) ±3　$-\frac{2}{3}$　(4) ∵ $|a|=3$，$\sqrt{b}=2$，∴ $a=\pm3$，$b=4$. 又 ∵ $ab<0$，∴ $a=-3$，$b=4$. ∴ $a-b=-3-4=-7$. ∴ 填 -7.　**说明**：本例考查了相反数、倒数、科学记数法、平方根、立方根、绝对值的概念以及简单有理数运算，虽难度不大，但知识覆盖面较大，可作为建构实数部分知识结构前的引例.　**思考**：第(2)题可改为大数再进行训练；第(3)题，教学中可整理平方根的等价说法：开平方、$\pm\sqrt{2}$ 等等；若将本例的第(4)小题中条件“$ab<0$”去掉，结果将如何？

例 2　**解**：根据有理数 a、b 在数轴上的对应点的位置，可知 $a>0$，$b<0$，$|a|>|b|$. ∴ $a+b>0$，$a-b>0$. ∴ 选 B.　**说明**：本例用数轴上的点表示有理数，同时考查了有理数加减运算的符号法则，观察数轴上表示有理数 a、b 的点的位置，分析它们的正负性以及绝对值的大小关系是解题的关键.　**思考**：① 请将 $a+b$、$a-b$、$b-a$ 按从小到大的顺序，用“$<$”连接起来；② 若表示 -1 的点在表示 b 的点的左侧，请将 ab、$-ab$、$\frac{a}{b}$、$-\frac{a}{b}$ 按从小到大，用“$<$”连接起来.

例 3　**解**：(1) 原式 $=-8+6\times\frac{1}{2}-1=-8+3-1=-6$　(2) 原式 $=-1+27\times\left(-\frac{8}{27}\right)-[4\times(-0.25)]^2=-1-8-1=-10$　(3) 原式 $=\frac{9}{2}\times\left[-9\times\frac{1}{9}-0.8\right]\times\left(-\frac{4}{21}\right)=\frac{9}{2}\times[-1-0.8]\times\left(-\frac{4}{21}\right)=\frac{9}{2}\times(-1.8)\times\left(-\frac{4}{21}\right)=\frac{9}{2}\times\frac{9}{5}\times\frac{4}{21}=\frac{54}{35}$　**说明**：本例考查了有理数的混合运算，弄清有理数加、减、乘、除及乘方运算的运算法则，和混合运算的运算顺序是正确解题的前提，准确确定各级运算结果的符号是正确解题的关键.　**思考**：结合本例，分析有理数混合运算的易错点有哪些，在以后的计算中要注意防范.

复习练习

1. (1) -2　-3　(2) $|a|>|b|$　(3) 3　(4) 如：$-\frac{1}{2}$，$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　(5) ±2　8　$-\frac{3}{4}$　(6) 2.3×10^6　(7) 1　-5　-6　-8　$\frac{1}{8}$　$3-\sqrt{5}$　(8) 31　2. (1) B　(2) B　(3) B　(4) C　(5) C　3. (1) -1　(2) -3　(3) $\frac{2}{3}$　4. (1) -6　(2) -2　(3) 12　(4) 1.4　5. (1) 第 4 个数是 $\frac{1}{5}-\left(1+\frac{-1}{2}\right)\left[1+\frac{(-1)^2}{3}\right]\left[1+\frac{(-1)^3}{4}\right]\left[1+\frac{(-1)^4}{5}\right]\left[1+\frac{(-1)^5}{6}\right]\left[1+\frac{(-1)^6}{7}\right]\left[1+\frac{(-1)^7}{8}\right]$　(2) 在第 10 个数、第 11 个数、第 12 个数、第 13 个数中最大的数是第 10 个数.

1.2　整式(一)

例 1　**解**：(1) $60\%a$　(2) $ab-\pi r^2$　**说明**：本例考查了用代数式表示简单的数量关系，须注意代数式的书写规范.　**思考**：对于第(1)题，若改为“某种常用药降价 40%后价格为 a 元”，则该药的原价为多少？

例 2　**解**：(1) $a-b$　(2) $4x^4y^2$　(3) $4a^2-b^2$　(4) $-3-6a$　**说明**：本例考查了去括号法则、合并同类

项法则、整式的乘法法则和乘法公式，正确运用法则和公式是保证计算正确性的前提，可作为建构整式运算知识结构前的引例. **思考**：教学中总结乘法公式的特点和易混淆的地方；本例第(4)小题有几种计算方法？

例3 解：(1) 原式 $=3x^2-10x+4x^2=7x^2-10x$；(2) 原式 $=4x^2y^4\cdot 3x^2y\div(-x^3y^4)=-12xy$；(3) 原式 $=a^2-2a+1-(1-a^2)=a^2-2a+1-1+a^2=2a^2-2a$；(4) 原式 $=[x-(2y-1)][(x+(2y-1)]=x^2-(2y-1)^2=x^2-(4y^2-4y+1)=x^2-4y^2+4y-1$ (5) 原式 $=a^4-6a^2-5a^2+30=a^4-11a^2+30$ (6) 原式 $=x^3+x^2+x-x^2-x-1=x^3-1$. **说明**：本例考查了整式的运算，在整式的运算中，要注意运算顺序，正确运用相关运算法则和公式. **思考**：结合本例，分析整式运算的易错点有哪些，在以后的计算中要注意防范.

例4 解：铁皮盒的长为 $(a^2+a)-(a-1)=a^2+1$，宽为 $2a-(a-1)=a+1$，高为 $\frac{a-1}{2}$. $(a^2+1)(a+1)\left(\frac{a-1}{2}\right)=\frac{1}{2}(a^2+1)[(a+1)(a-1)]=\frac{(a^2+1)(a^2-1)}{2}=\frac{a^4-1}{2}$. 所以，铁皮盒的体积为 $\frac{a^4-1}{2}$. **说明**：本例考查了根据问题中的数量关系列出代数式，并运用乘法公式进行计算，其中分析制成铁皮盒的长、宽、高是解题的首要步骤，合理运用平方差公式是计算的关键. **思考**：你能快速计算出 $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdot\cdots\cdot(2^{32}+1)$ 的值吗？

复习练习

1. (1) $(3m+5n)$ (2) $2x+4y+6z$ (3) $(-2)^{n-1}a^n$ (4) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 2. (1) 4 1, -2, 3 (2) 1 $-\frac{1}{4}a^2b^4$ $12a^3b^3c-8a^3bc$ (3) $4-4x+x^2$ x^2-1 (4) $\frac{1}{6}$ 3. (1) D (2) A (3) A 4. (1) $20a^4b^7$ (2) $5x^6+3x^5$ (3) 3^{2n+1} (4) $x-y$ (5) a^2-4b^2+4b-1 (6) m^3+8n^3 5. 2 1 3 6. (1) $4\times6-5^2=24-25=-1$，$5\times7-6^2=35-36=-1$ (2) $n(n+2)-(n+1)^2=-1$ 左边 $=n^2+2n-n^2-2n-1=-1=$ 右边 7. (1) 5 9 (2) 将一根绳子对折 n 次后从中间剪一刀，绳子变成 (2^n+1) 段.

1.3 整式(二)

例1 解：(1) $3x^2-9x=3x\cdot x-3x\cdot 3=3x(x-3)$ (2) $-8a^2b^2-4a^2b+2ab=-(8a^2b^2+4a^2b-2ab)=-(2ab\cdot 4ab+2ab\cdot 2a-2ab)=-2ab(4ab+2a-1)$ (3) $m^3(a-2)+m(2-a)=m(a-2)\cdot m^2-m(a-2)\cdot 1=m(a-2)(m^2-1)=m(a-2)(m+1)(m-1)$ **说明**：本例考查了运用提公因式法分解因式，找准、找全公因式是完成因式分解的前提，注意多项式首项的系数是负数，一般要提出“－”号. **思考**：教师应当提醒学生，我们习惯多项式按照以某字母的降幂排列，这样为分式的计算打下基础；把 $-8a^2b(a-b)+4ab(b-a)^2-2a(b-a)$ 分解因式，并归纳如何找准公因式，提公因式法分解因式要注意防范哪些常见错误.

例2 解：(1) $25(m+n)^2-4(m-n)^2=[5(m+n)]^2-[2(m-n)]^2=(5m+5n+2m-2n)(5m+5n-2m+2n)=(7m+3n)(3m+7n)$ (2) $16-24(x-y)+9(x-y)^2=4^2-2\times4\times3(x-y)+[3(x-y)]^2=[4-3(x-y)]^2=(4-3x+3y)^2$ (3) $(x-1)(x-3)+1=x^2-4x+3+1=x^2-4x+4=(x-2)^2$ **说明**：本例考查了运用公式法分解因式，观察多项式是否可变形为两数平方差或两数平方和加(或减)这两数乘积的2倍，是使用平方差公式或完全平方公式进行分解因式的前提. **思考**：可以考虑增加第(4)小题为两步分解因式的题目，先提公因式再用公式；本例第(3)小题，还有其他方法可以得出因式分解的结果吗？

例3 解：[解法一] $(2a+1)^2-2(2a+1)+3=4a^2+4a+1-4a-2+3=4a^2+2$. 当 $a=\sqrt{2}$ 时，原式 $=4\times(\sqrt{2})^2+2=10$. [解法二] $(2a+1)^2-2(2a+1)+3=(2a+1)(2a+1-2)+3=(2a+1)(2a-1)+3=4a^2-1+3=4a^2+2$. 当 $a=\sqrt{2}$ 时，原式 $=4\times(\sqrt{2})^2+2=10$. [解法三] $(2a+1)^2-2(2a+1)+3=(2a+1)^2-2(2a+1)+1+2=(2a+1-1)^2+2=4a^2+2$. 当 $a=\sqrt{2}$ 时，原式 $=4\times(\sqrt{2})^2+2=10$. **说明**：本例考查了整式的运算化简和求代数式的值，三种解法体现了整式变形方法的多样性，化简后再求值，体现了求代数式值的计算方法优化的原则. **思考**：同样的问法，不同的条件，所选择的简便方法不一定一样.

复习练习

1. (1) $mn(1+2n)$ (2) $(2x+y)(2x-y)$ (3) $a(a-2)^2$ 2. (1) C (2) C 3. (1) $x(x+3)(x-3)$ (2) $(2x+1)(2x-1)(4x^2+1)$ (3) $(x-y)(3x+2y)$ (5) $(a+2)^2$ (6) $(x+1)(x-1)(x-y)$ (6) $(ab+2)^2(ab-2)^2$ 4. $[(x+3)-(x+1)](x-1)=2(x-1)$，当 $x=\sqrt{2}$ 时，$2(x-1)=2(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-2$

5. 略 6. 略 7. 这条彩边应剪成18分米，2分米长的两段.

1.4 分式

例1 解：(1) 要使分式 $\frac{2}{x-1}$ 有意义，则分母 $x-1\neq0$，即 $x\neq1$. (2) 要使分式 $\frac{3}{x-2}$ 无意义，则分母 $x-2=0$，即 $x=2$. (3) 要使分式 $\frac{x-3}{x}$ 的值为零，则分子 $x-3=0$，且分母 $x\neq0$，即 $x=3$. **说明**：本例考查了分式的概念(有无意义)、分式的值为零，注意分母不为零，即分式有意义是分式值为零的前提条件. **思考**：当 x 为何值时，分式 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 的值为零.

例2 解：(1) 原式 $=\frac{3b}{a}\cdot\frac{a\cdot a}{9b\cdot b}=\frac{a}{3b}$ (2) 原式 $=\frac{x(x-y)}{(x+y)^2}\cdot\frac{x+y}{x-y}=\frac{x}{x+y}$ **说明**：本例考查了分式的乘除运算，其中除法可转化为乘法，而乘法运算的重要步骤是约分，通常将多项式的分子、分母分解因式是首要步骤. **思考**：当 $x=2$，$y=-1$ 时，求 $\frac{y(x-y)-x(x+y)}{x^2-y^2}\div\frac{x^2+y^2}{x+y}$ 的值.

例3 解：(1) 原式 $=\frac{3(a+2)}{(a+2)(a-2)}-\frac{12}{(a+2)(a-2)}=\frac{3(a+2)-12}{(a+2)(a-2)}=\frac{3(a-2)}{(a+2)(a-2)}=\frac{3}{a+2}$ (2) 原式 $=\left[\frac{a^2+1}{a(a+1)}-\frac{a}{a+1}\right]\times\frac{a+1}{a}=\frac{1}{a(a+1)}\times\frac{a+1}{a}=\frac{1}{a^2}$ **说明**：本例考查了分式的加减及四则混合运算，其中分式的加减运算中渗透着转化的思想，即异分母分式的加减，先通分，转化为同分母分式的加减，四则混合运算要注意运算顺序并能合理运用运算律简便运算. **思考**：先化简，再求值：$\frac{x^2-2x}{x}\div\left(x-\frac{4}{x}\right)$，其中 $x=3$. 解方程 $\frac{3}{a-2}-\frac{12}{a^2-4}=0$ 并与例3的(1)比较有何异同.

例4 解：A玉米试验田面积是 (a^2-1) 米^2，单位面积产量是 $\frac{500}{a^2-1}$ 千克/米^2； B玉米试验田面积是 $(a-1)^2$ 米^2，单位面积产量是 $\frac{500}{(a-1)^2}$ 千克/米^2. ∵ $(a^2-1)-(a-1)^2=2(a-1)$，又∵ $a-1>0$，∴ $(a^2-1)-(a-1)^2>0$. ∴ $0<(a-1)^2<a^2-1$. ∴ $\frac{500}{a^2-1}<\frac{500}{(a-1)^2}$. ∴ B玉米试验田的单位面积产量高. **说明**：本例考查了根据问题中数量关系列出代数式，并运用作差法比较大小，作差法就是将比较的两个式子相减，根据差的正负性，判断被减数与减数的大小. **思考**：总结比较两个数或式大小的常用方法. 甲、乙两工程队分别承担一条2千米公路的维修工作，甲队有一半时间每天维修公路 x 千米，另一半时间每天维修公路 y 千米. 乙队维修前1千米公路时，每天维修 x 千米；维修后1千米公路时，每天维修 y 千米 $(x\neq y)$. 问：(1)甲、乙两队完成任务需要的时间(用含 x、y 的代数式表示)；(2)甲、乙两队哪队先完成任务？

复习练习

1. (1) 2 (2) -1 (3) $\frac{y-x}{xy}$ $\frac{n}{2m^2}$ (4) $\frac{2sb}{a^2-b^2}$ 2. (1) A (2) C 3. (1) $\frac{1}{m-2}$ (2) ab (3) $-x^2-x$ 4. $x-1$，当 $x=2$ 时，$x-1=2-1=1$ 5. $\frac{1}{a-3}$，代入求值略(a 不能取 ±3). 6. x^2+4，当 $x=\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$ 时，x^2+4 都等于7.

1.5 二次根式

例1 解：由 $2x+1\geqslant0$，得 $x\geqslant-\frac{1}{2}$. 所以，填 $x\geqslant-\frac{1}{2}$. **说明**：本例考查了二次根式的概念(在实数范围内有意义，要求被开方数大于或等于零)，所以求解此类问题通常根据二次根式的概念，将之转化为一个解不等式的问题. **思考**：要使代数式 $\frac{\sqrt{2x+1}}{x}$ 在实数范围内有意义，x 的取值范围是什么？你知道 $1-\sqrt{x-1}+\sqrt{2-2x}$ 的值是多少吗？

例 2 解:(1) $\sqrt{50}=\sqrt{2\times25}=\sqrt{2}\times\sqrt{25}=\sqrt{2}\times5=5\sqrt{2}$ (2) 当 $b\geqslant0$, $a+b\geqslant0$ 时, $\sqrt{ab^2+b^3}=\sqrt{b^2(a+b)}=\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{a+b}=b\sqrt{a+b}$ **说明**:本例考查了二次根式的化简,要求被开方数中不含能开尽方的因数或因式、分母中不含根号、根号中不含分母,分解或变形出平方数或完全平方式是其重要步骤. **思考**:将 $\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$ 化简,如果你能找到两个数 m、n,使 $m^2+n^2=a$ 且 $mn=\sqrt{b}$,则将 $a\pm2\sqrt{b}$ 将变成 $m^2+n^2\pm2mn$,即变成 $(m\pm n)^2$ 开方,从而使得 $\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$ 化简. 例如, $5+2\sqrt{6}=3+2+2\sqrt{6}=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$, $\therefore\ \sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$. 请仿照上例化简:(1) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;(2) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

例 3 解:(1) [解法一]原式 $=\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ [解法二]原式 $=\frac{3}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ (2) 原式 $=2\sqrt{12\times6}-\sqrt{\frac{1}{3}\times6}=12\sqrt{2}-\sqrt{2}=11\sqrt{2}$ (3) 原式 $=[(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})+(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})][(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})-(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})]=6\sqrt{2}\cdot(-4\sqrt{3})=-24\sqrt{6}$ (4) 当 $a\geqslant0$, $b>0$ 时,原式 $=a\sqrt{b}-a\sqrt{b}+b\cdot\frac{a\sqrt{b}}{b}-\frac{ab\sqrt{b}}{b}=a\sqrt{b}-a\sqrt{b}+a\sqrt{b}-a\sqrt{b}=0$ **说明**:本例考查了二次根式的加减乘除四则运算,在正确运用二次根式运算法则的同时,注意运算顺序,合理运用运算律,并保证将运算的结果化简为最简二次根式. **思考**: $x=\frac{1}{2}(\sqrt{3a+5b}+\sqrt{3a-5b})$, $y=\frac{1}{2}(\sqrt{3a+5b}-\sqrt{3a-5b})$,求 x^2+xy+y^2 的值.

例 4 解:(1) $\because\sqrt{2+\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{4\times2}{3}}=\sqrt{4}\times\sqrt{\frac{2}{3}}=2\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\therefore$ ①打"√"; $\because\sqrt{3+\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{27}{8}}=\sqrt{\frac{9\times3}{8}}=\sqrt{9}\times\sqrt{\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}$, $\therefore$ ②打"√"; $\because\sqrt{4+\frac{4}{15}}=\sqrt{\frac{64}{15}}=\sqrt{\frac{16\times4}{15}}=\sqrt{16}\times\sqrt{\frac{4}{15}}=4\sqrt{\frac{4}{15}}$, $\therefore$ ③打"√"; $\because\sqrt{5+\frac{5}{24}}=\sqrt{\frac{125}{24}}=\sqrt{\frac{25\times5}{24}}=\sqrt{25}\times\sqrt{\frac{5}{24}}=5\sqrt{\frac{5}{24}}$, $\therefore$ ④打"√".
(2) $\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}=n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}$ ($n\geqslant2$,且 n 为整数). **说明**:本例考查了根据二次根式的性质进行变形,并探求用字母表示一组二次根式变形的规律,纵向分析这组变形式的结构特点,横向分析各变形式中每个数字与相应式子序号之间的关系是寻找等式规律的常规思路. **思考**:(1) 请证明本例中你发现的规律. (2) 观察下列等式: $\sqrt[3]{2\frac{2}{7}}=2\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$, $\sqrt[3]{3\frac{3}{26}}=3\sqrt[3]{\frac{3}{26}}$, $\sqrt[3]{4\frac{4}{63}}=4\sqrt[3]{\frac{4}{63}}$. 你有何发现,归纳一个猜想,并验证你的猜想. (3) 综合分析(1)、(2)的发现,你有新猜想吗?

复习练习

1. (1) 3 $3\sqrt{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $2xy\sqrt{y}$ (2) $<$ $>$ $>$ $>$ (3) $2\sqrt{3}$ 3 $x^2\sqrt{y}$ (4) $2-\sqrt{2}$ 2. (1) B (2) C (3) A (4) D 3. (1) $12-6\sqrt{2}$ (2) $6a\sqrt{2b}$ (3) $\frac{11\sqrt{2}}{4}$ (4) $1^2-(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-4\sqrt{3}+1^2=2-4\sqrt{3}$ 4. 略 5. (1) 1.7 (2) 1.7

第二章 方程与不等式

2.1 一次方程(组)

例 1 解:去分母,得 $18x+3(x-1)=18-2(2x-1)$.
去括号,得 $18x+3x-3=18-4x+2$.
移项,得 $18x+3x+4x=18+2+3$.
合并同类项,得 $25x=23$.
系数化为 1,得 $x=\frac{23}{25}$. **说明**:解方程时怎样"移项",你知道这样做的依据吗? **思考**:体会从方程 $3x+\frac{x-1}{2}=3-\frac{2x-1}{3}$ 到 $x=\frac{23}{25}$ 的化归过程.

例 2 解:①×3,得 $3x+9y=15$. ③, ③−②,得 $8y=16$, $y=2$. 把 $y=2$ 代入①,得 $x=-1$. $\therefore$ 原方程组的解是 $\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$ **说明**:本例可以用加减消元法或者代入消元法解这个方程组. **思考**:观察方程组的特征,你还有其他的消元方法吗?结合本例体会从原方程组到 $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$ 的化归过程.

例 3 解:本题答案不唯一. [解法一] 问题:普通公路和高速公路各为多少千米?解:设普通公路长为 x km,高速公路长为 y km. 根据题意,得 $\begin{cases}2x=y,\\\frac{x}{60}+\frac{y}{100}=2.2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=60,\\y=120.\end{cases}$ 答:普通公路长为 60 km,高速公路长为 120 km. [解法二] 问题:汽车在普通公路和高速公路上各行驶了多少小时?解:设汽车在普通公路上行驶了 x h,高速公路上行驶了 y h. 根据题意,得 $\begin{cases}x+y=2.2,\\60x\times2=100y.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=1.2.\end{cases}$ 答:汽车在普通公路上行驶了 1 h,高速公路上行驶了 1.2 h. **说明**:本例是以二元一次方程组的应用作为问题背景的一道有限开放型题型,要让学生体会方程是刻画现实世界的一个有效的数学模型,渗透数学建模的思想. 讲解时要尊重学生的个体差异,给学生发挥的空间,培养学生的发散思维能力. **思考**:编制一个应用题,可以建立数学模型. $\begin{cases}x+y=50,\\6x+4y=230.\end{cases}$

例 4 解:因为 $3.1\times20=62$, $3.1\times20+3.81\times(30-20)=100.1$,而 $62<69.62<100.1$,所以李老师家九月份用水超过 20 立方米且低于 30 立方米. 设李老师家九月份用水 x 立方米. 根据题意,得 $3.1\times20+3.81(x-20)=69.62$. 解这个方程,得 $x=22$. 答:李老师家九月份用水 22 立方米. **说明**:应根据交纳水费判断李老师家九月份用水量为第几级,然后按分段收费的方法列出方程解决问题. **思考**:若王老师家九月份交纳水费 122.7 元,则王老师家九月份比李老师家多用水多少立方米?

复习练习

1. (1) $x=5$ (2) $x=5$ (3) 3 (4) 4 日、11 日、18 日 (5) 860 (6) $\frac{x}{5}-\frac{x}{9}=4$ 2. (1) $x=-\frac{1}{3}$ (2) $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ (3) $\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$ 3. $m=-2$, $x=-4$ 4. 胜 18 场,负 4 场. 5. 设每块地砖的长和宽分别是 x cm、y cm. $\begin{cases}x+y=60,\\x=3y.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=45,\\y=15.\end{cases}$ 6. $\begin{cases}x=6.3,\\y=2.2.\end{cases}$ 7. 设该经营户当天批了西红柿 x kg,豆角 y kg. $\begin{cases}x+y=40,\\3.6x+4.8y=180.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=10,\\y=30.\end{cases}$ $10\times(5.4-3.6)+30\times(7.5-4.8)=99$(元) 8. 本题答案不唯一. 例如,问题:$A$、$B$ 两地之间的路程是多少?设 A、B 两地之间的路程是 x km,根据题意,得 $\frac{x}{45}+\frac{x}{60}=2.1$. 解得 $x=54$. 9. $\begin{cases}x=1,\\y=2,\\z=3.\end{cases}$

2.2 分式方程

例 1 解:方程两边都乘以 $x-3$,得 $x=2(x-3)+3$. 解这个方程,得 $x=3$. 检验:当 $x=3$ 时, $x-3=0$. 所以, $x=3$ 是增根,原方程无解. **说明**:分式方程转化为整式方程时,可能产生增根,所以解分式方程必须验根. **思考**:分式方程产生增根的原因是什么?解方程 $\frac{15}{x}-\frac{15}{3x}=\frac{2}{3}$,并体会从原方程到 $x=15$ 的化归过程.

例 2 解:根据题意,得 $\frac{1}{x-2}=\frac{3}{x}$. 方程两边都乘以 $x(x-2)$,得 $x=3(x-2)$. 解这个方程,得 $x=3$. 经检验, $x=3$ 是所列方程的根. 所以,当 $x=3$ 时,分式 $\frac{1}{x-2}$ 与 $\frac{3}{x}$ 的值相等. **思考**:计算 $\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x}$ 与解方

程$\frac{1}{x-2}-\frac{3}{x}=0$有何不同?

例3 解:设抢修车每小时行 x 千米,则吉普车每小时行 $1.5x$ 千米.根据题意,得 $\frac{15}{x}-\frac{15}{1.5x}=\frac{15}{60}$. 解这个方程,得 $x=20$. 经检验,$x=20$ 是所列方程的根.所以 $1.5x=30$. 答:抢修车每小时行 20 千米,吉普车每小时行 30 千米. **说明**:本例的等量关系是:抢修车行驶时间－吉普车行驶时间＝15 分钟. **思考**:结合本例,在解分式方程中,你是如何优化运算的?

例4 解:(1) 设第一批购进书包的单价是 x 元,根据题意,得 $\frac{2\,000}{x}\times 3=\frac{6\,300}{x+4}$. 解这个方程,得 $x=80$. 经检验,$x=80$ 是所列方程的根.(2) $\frac{2\,000}{80}\times(120-80)+\frac{6\,300}{84}\times(120-84)=3\,700$(元). **说明**:本例可根据两次购买的数量之间的关系列出方程,求出单价和数量,进而求出利润. **思考**:结合本例,归纳应用题的解题策略.

复习练习

1. (1) $x=\frac{1}{3}$ (2) $x=-5$ (3) $x=1$ 是增根,原方程无解. 2. 设原计划每天生产化肥 x 吨. $\frac{120}{x}=\frac{180}{x+3}$,得 $x=6$ 3. 设乙操作员平均每天能输入 x 份会计报表. $\frac{1\,200}{1.2x}=\frac{1\,200}{x}-2$. 得 $x=100$ 4. 设这列货车原来的速度为 x 千米/时. $\frac{450}{x}=3+\frac{1}{2}+\frac{450-3x}{1.2x}$,得 $x=75$ 5. 去分母得,$(x-1)^2-2(x+3)=(x+3)(x-1)$.(等式的基本性质 2)去括号得,$x^2-2x+1-2x-6=x^2+2x-3$.(整式乘法)合并同类项得,$x^2-4x-5=x^2+2x-3$.(合并同类项法则)移项得,$-6x=2$.(等式的基本性质 1)系数化为 1 得,$x=-\frac{1}{3}$.(等式的基本性质 2)检验:当 $x=-\frac{1}{3}$ 时,$(x+3)(x-1)\neq 0$,所以 $x=-\frac{1}{3}$ 是原方程的解. 6. 设原来规定修好这条路需 x 个月. $\frac{4}{x}+\frac{x}{x+6}=1$,得 $x=12$ 说明:本题还可以列出其他方程. 7. (1) 设甲工厂每天加工 x 件新产品. $\frac{960}{x}=\frac{960}{1.5x}+20$,得 $x=16$ $1.5x=24$ (2) 甲、乙合作完成天数 $\frac{960}{16+24}=24$(天). 费用 $24\times(120+80)=4\,800$(元)

2.3 一元二次方程

例1 解:(1) 移项,得 $x^2-6x=-7$. 配方,得 $x^2-6x+9=-7+9$,$(x-3)^2=2$. 解这个方程,得 $x-3=\pm\sqrt{2}$. 所以 $x_1=3+\sqrt{2}$,$x_2=3-\sqrt{2}$. (2) 原方程可变形为 $3x(x-1)+2(x-1)=0$,$(x-1)(3x+2)=0$. $x-1=0$,或 $3x+2=0$. $\therefore x_1=1$,$x_2=-\frac{2}{3}$. **说明**:解一元二次方程时,可以根据方程的特征,灵活选用解法. **思考**:解一元二次方程的关键是什么?结合本例(2)体会从原方程到 $x_1=1$,$x_2=-\frac{2}{3}$ 的化归过程.

例2 解:不同意,理由如下:当 $x^2-10x+36=12$ 时,可得 $x_1=4$,$x_2=6$. 故当 $x=4$ 或 $x=6$ 时,$x^2-10x+36$ 的值为 12. 所以,小明的说法是错误的. **说明**:方程 $x^2-10x+36$ 的值能否等于 12,关键是看方程 $x^2-10x+36=12$ 有无实数解. **思考**:小明认为二次三项式 $x^2-10x+36$ 的值不可能小于 11,他的说法对吗?

例3 解:设这种药品平均每次降价的百分率是 x. 根据题意,得 $200(1-x)^2=128$,解这个方程,得 $x_1=0.2$,$x_2=1.8$(舍去). 答:这种药品平均每次降价 20%. **思考**:如果该药品经过连续三次降价后,由每盒 200 元下调至 128 元,设该种药品平均每次降价的百分率为 x,试列出关于 x 的方程.

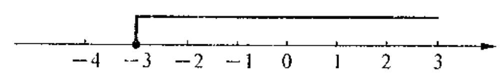
例4 解:设这种运输箱底部宽为 x 米,则长为$(x+2)$米,根据题意,得 $x(x+2)\times 1=15$. 化简,得 $x^2+2x-15=0$. $\therefore x_1=-5$(舍去),$x_2=3$. $\therefore x+2=5$. $\therefore$ 做一个这样的水箱要花费:$(5+2)\times(3+2)\times 20=700$(元). 答:张大叔共花了 700 元钱. **说明**:本例先把"容积为 15 米³"作为等量关系,再把运输箱底部宽设为未知数,求出它的长,进而求出这块铁皮的面积. **思考**:结合本例,对应用题应如何审题?

复习练习

1. (1) $x_1=0$,$x_2=2$ (2) 本题答案不唯一,例如:$x^2=1$ (3) -2,-3 (4) 9 (5) $\frac{9}{4}$ 2. (1) $x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$,$x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ (2) $x_1=\frac{1}{2}$,$x_2=-3$ 3. $t_1=1$,$t_2=4$ 4. 1 800 万元 5. 设道路的宽为 x 米. $(20-x)(32-x)=540$. 得 $x_1=50$(舍去),$x_2=2$ 6. $x_1=4$,$x_2=5$ 7. (1) $t_1=\frac{2}{5}$,$t_2=2$(舍去) (2) $t_1=\frac{6-3\sqrt{2}}{2}$,$t_2=\frac{6+3\sqrt{2}}{2}$(舍去) 8. 设应将每千克西瓜的售价降低 x 元. $(3-2-x)\left(200+\frac{40x}{0.1}\right)-24=200$,解得 $x_1=0.2$,$x_2=0.3$.

2.4 不等式

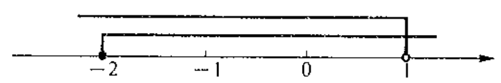
例1 解:去分母,得 $2x-3(x-1)\leqslant 6$. 去括号,得 $2x-3x+3\leqslant 6$. 移项,得 $2x-3x\leqslant 6-3$. 合并同类项,得 $-x\leqslant 3$. 系数化为 1,得 $x\geqslant -3$. 这个不等式的解集在数轴上表示如下:



(例 1)

思考:该不等式的负整数解是什么?

例2 解:解不等式①,得 $x<1$. 解不等式②,得 $x\geqslant -2$. 在数轴上表示不等式①、②的解集:



(例 2)

所以,这个不等式组的解集是 $-2\leqslant x<1$. 因此,它的整数解是 -2,-1,0. **思考**:结合本例,解不等式(组)的易错点有哪些?

例3 解:设明年比去年空气质量良好的天数增加了 x. 去年有 $365\times 60\%$ 天空气质量良好,明年有$(x+365\times 60\%)$天空气质量良好,并且 $\frac{x+365\times 60\%}{365}>70\%$. 去分母,得 $x+219>255.5$. 移项,合并同类项,得 $x>36.5$. 由 x 应为正整数,得 $x\geqslant 37$. 答:明年空气质量良好的天数要比去年至少增加 37 天 **说明**:"明年这样的比值要超过 70%"指出了这个问题中蕴含的不等关系,转化为不等式,即 $\frac{\text{明年空气质量良好的天数}}{\text{明年天数}}>70\%$.

例4 解:(1) 当累计购物不超过 50 元时,在甲、乙两商场购物都不享受优惠,且两商场以同样价格出售同样的商品,因此到两商场购物花费一样. (2) 当累计购物超过 50 元而不超过 100 元时,享受乙商场的购物优惠,不享受甲商场的购物优惠,因此到乙商场购物花费少. (3) 当累计购物超过 100 元时,设累计购物 x($x>100$)元. ① 若到甲商场购物花费少,则 $50+0.95(x-50)>100+0.9(x-100)$. 解得 $x>150$. 这就是说,累计购物超过 150 元时,到甲商场购物花费少. ② 若到乙商场购物花费少,则 $50+0.95(x-50)<100+0.9(x-100)$. 解得 $x<150$. 这就是说,累计购物超过 100 元而不到 150 元时,到乙商场购物花费少. ③ 若 $50+0.95(x-50)=100+0.9(x-100)$,解得 $x=150$. 这就是说,累计购物为 150 元时,到甲、乙两商场购物花费一样. **说明**:在甲商场购物超过 100 元后享受优惠,在乙商场购物超过 50 元后享受优惠. 因此,我们需要分三种情况讨论:(1) 累计购物不超过 50 元;(2) 累计购物超过 50 元而不超过 100 元;(3) 累计购物超过 100 元.

复习练习

1. (1) $\frac{1}{2}x-4\geqslant 5x$,$x\leqslant -\frac{8}{9}$ (2) $x>y$(答案不唯一) (3) $x>1$ (4) 2 2. (1) $x\leqslant 4$,图略 (2) $-1\leqslant x<3$ 3. 设小明购买钢笔 x 支. $5x+2(30-x)\leqslant 100$,$x\leqslant 13\frac{1}{3}$. 故最多购买 13 支钢笔. 4. 当这批光盘多于 30 张时,自刻费用省;当这批光盘少于 30 张时,到电脑公司刻录费用省;当这批光盘为 30 张时,到电脑公司与自刻费用一样. 5. (1) 设购进甲种商品 x 件,乙种商品$(20-x)$

件. 根据题意，得 $12x+8(20-x)\geqslant 190$，得 $x\geqslant 7.5$，又 $x\leqslant 10$. ∴ x 取 8、9、10. 有三种进货方案：购进甲种商品 8 件，乙种商品 12 件；购进甲种商品 9 件，乙种商品 11 件，购进甲种商品 10 件，乙种商品 10 件. (2) 购甲种商品 10 件，乙种商品 10 件，可获得最大利润，最大利润是 45 万元.　6. (1) $-1<x<\frac{1}{2}$　$-1<x<1$　无解　(2) 当 $k\leqslant -1$ 时，不等式组无解；当 $-1<k<1$ 时，$-1<x<k$；当 $k\geqslant 1$ 时，$-1<x<1$.

第三章　函　　数

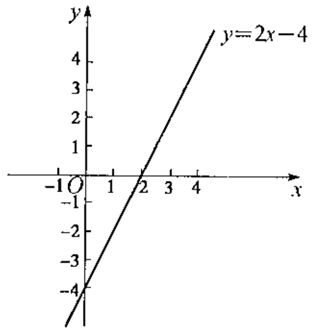
3.1　一次函数

例 1　**解**：(1) 这一天的 3 时、10 时和 14 时的气温分别为 -3℃、2℃和 5℃. (2) 这一天中，最高气温是 5℃，最低气温是 -3℃. (3) 这一天中，从 3 时到 14 时这一时段的气温在逐渐升高，从 0 时到 3 时，以及从 14 时到 24 时这两个时段气温在逐渐降低. (4) 对于给定的一个 t 值，都相应地确定一个 T 值，所以气温 T(℃)可以看作是时间 t(时)的函数.　**说明**：本题通过图像呈现一天中气温 T(℃)与时间 t(时)之间的函数关系. 问题(1)解决当 t 为某一具体数时的对应的 T 的值，通过对应关系理解函数定义；问题(2)中的最值、问题(3)中 T 随 t 的变化而变化的趋势是关于函数性质的理解；问题(4)是全面理解函数的本质，对照定义做出判断，四个问题层层递进，将函数概念的复习落到实处.　**思考**：在教学中可以回到函数定义，抓住两个变量之间的对应关系进行分析. 对问题(2)可以和二次函数的最值进行比较，对问题(3)可以引导学生关注函数的增减性，帮助学生建立研究函数性质的经验(最值、增减性等)，问题(4)的拓展可以问：函数关系的表示方法有哪几种？各有什么特点？本题的函数关系能否通过表达式表示？能否通过表格表示？

例 2　**解**：(1) 根据题意，得 $\begin{cases}k+b=-2,\\b=-4.\end{cases}$ 解得 $k=2$，$b=-4$.

(2) 列表：

x	0	2
y	-4	0



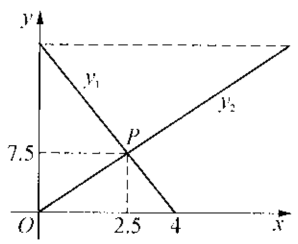
(例 2)

过点(0，-4)和(2，0)作直线，此直线即为函数 $y=2x-4$ 的图像，如图所示. (3) 观察图可知，当 $x<2$ 时，$y<0$.　**说明**：本题主要通过待定系数法确定一次函数表达式中的系数，借助列表、描点画出函数图像，利用函数图像回答函数值的取值范围，达到巩固基本概念与技能、理解性质的目标.　**思考**：在教学中要引导学生理解一次函数的定义、图像和性质. 问题(1)可以拓展为：另一个一次函数 $y=k_1x+b_1$ 的图像经过原点且与 $y=kx+b$ 的图像平行，求 k_1 和 b_1 的值. 以理解图像平移的意义，同时复习正比例函数. 问题(2)的教学中可以让学生体会画一次函数图像的一般列表方法，即一般取图像与坐标轴的交点以方便计算. 问题(3)可以拓展为：一次函数 $y=kx+b$ 的性质有哪些？一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过哪些象限(与 k、b 的符号的关系等)？

例 3　**解**：(1) 设 s 与 t 之间的表达式是 $s=kt+b$. 根据题意，得 $\begin{cases}24=b,\\18=10k+b.\end{cases}$ 解得 $k=-0.6$，$b=24$. 所以 s 与 t 之间的函数表达式是 $s=-0.6t+24$　(2) 当 $s=0$ 时，$0=-0.6t+24$，解得 $t=40$. 所以这支蜡烛 40 min 燃尽.　**说明**：本题是一次函数的简单应用问题，需要建立一次函数模型，并利用待定系数法确定表达式，再利用建立的一次函数关系解决实际问题，体现函数的应用价值，渗透模型思想.　**思考**：问题(1)可以引导学生进一步理解 k 的实际意义——变化率，$k=\frac{18-24}{10-0}=-0.6$，即蜡烛长度的变化速度，从而得到 $s=-0.6t+24$. 问题(2)可以拓展为：时间 t 的取值范围是什么？画出该函数的图像等，引导学生关注实际问题中自变量取值范围的意义.

例 4　**解**：(1) 本题答案不唯一，例如当 $x=2.5$ 时，小东离 B 地的距离 $y_1=7.5$ 等. (2) 设 $y_1=kx+b$. 将 $x=2.5$，$y=7.5$；$x=4$，$y=0$ 代入得到 $\begin{cases}2.5k+b=7.5,\\4k+b=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-5,\\b=20.\end{cases}$ 所以 y_1 与 x 之间的函数表达式是 $y_1=-5x+20$. (3) 当 $x=0$ 时，$y=20$，即 AB 两地之间的距离是 20 千米. (4) 如图：点 P 是两个图像的交点，其实际意义表示出发 2.5 小时后，小东与小明在离 B 地 7.5 千米处相遇.　**说明**：问题(1)要求从图像

获取信息，理解 y_1 与 x 的函数关系，结论具有一定开放性；问题(2)、(3)是根据图像提供的信息确定表达式并根据图像中信息解决实际问题；问题(4)是两个人运动过程中的两个函数的关系问题，根据意义画出函数图像并理解图像交点的实际意义. 教学中应规范学生的语言表述.　**思考**：问题(2)的解法可以利用变化率解决：$k=\frac{0-7.5}{4-2.5}=-5$，$y_1=7.5-5(x-2.5)=20-5x$. 问题(4)可以拓展为：y_2 关于 x 的函数表达式是什么？自变量 x 的取值范围是什么？解决此类问题可以用哪些方法分析运动的过程？(引导学生能够利用线型示意图分析两个人的运动过程，形成解决此类问题的经验和策略)



(例 4)

复习练习

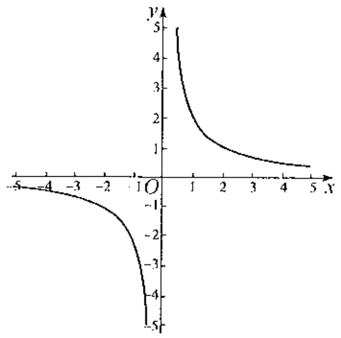
1. (1) $y=0.52x$，电费 y(元)与用电千瓦时数 x(千瓦时)之间的关系是函数关系. (2) $S=3h$，面积 S(cm²)与这边上的高 h(cm)之间的关系是函数关系. (3) $V=8x^2$，体积 V(cm³)与底面边长 x(cm)之间的关系是函数关系.　2. (1) $y=2x$　(2) $<$　(3) $y=2x-5$　(4) $<$　3. (1) 港内的水深 h(m)是时间 t(时)的函数.　(2) 9 小时.　4. (1) $y=-2x+3$　(2) 略　(3) 当 $x<\frac{3}{2}$ 时，$y>0$　5. (1) $y_1=5x$，$y_2=20-4x$　(2) 略　6. (1) 因为小丁每天从报社以每份 0.5 元买入报纸 200 份，然后以每份 1 元卖给读者，报纸卖不完，当天可退回报社，但报社只按每份 0.3 元退给小丁，所以如果均每天卖出报纸 x 份时，纯收入为 y 元，则 $y=(1-0.5)x-0.2(200-x)$，即 $y=0.7x-40$，其中 $0\leqslant x\leqslant 200$. 且 x 为整数.　(2) 因为每月以 30 天计，根据题意可得 $30(0.7x-40)\geqslant 2\,000$，解得 $x\geqslant 152\frac{8}{21}$.　故小丁至少要卖出 153 份.　7. (1) 设 y 与 x 的函数表达式为 $y=kx+b$，根据题意，得 $\begin{cases}10k+b=60,\\20k+b=55,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\b=65.\end{cases}$　∴ y 与 x 之间的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+65(10\leqslant x\leqslant 70)$.　(2) 设该机器的生产数量为 x 台，根据题意，得 $x\left(-\frac{1}{2}x+65\right)=2\,000$，解得 $x_1=50$，$x_2=80$. ∵ $10\leqslant x\leqslant 70$，∴ $x=50$. 答：该机器的生产数量为 50 台.　(3) 设销售量 z 与售价 a 之间的函数表达式为 $z=k_1a+b_1$，根据题意，得 $\begin{cases}55k_1+b_1=35,\\75k_1+b_1=15,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-1,\\b_1=90.\end{cases}$　∴ $z=-a+90$.　当 $z=25$ 时，$a=65$.　所以该厂第一个月销售这种机器的利润为：$25\times\left(65-\frac{2\,000}{50}\right)=625$(万元).　8. (1) 设 $y_{甲}=k_1x$，把(6，120)代入，得 $k_1=20$，∴ $y_{甲}=20x$. 当 $x=3$ 时，$y_{甲}=60$. 设 $y_{乙}=k_2x+b$，把(0，30)、(3，60)代入，得 $\begin{cases}b=30,\\k_2=10.\end{cases}$ ∴ $y_{乙}=10x+30$.　(2) 当 $x=8$ 时，$y_{甲}=160$，$y_{乙}=110$. ∵ $160+110>260$，∴ 当 $x=8$ 时，甲、乙两班植树的总量之和能超过 260 棵. (3) 设乙班增加人数后平均每小时植树 a 棵.　当乙班比甲班多植树 20 棵时，有 $6\times 10+30+2a-20\times 8=20$. 解得 $a=45$. 当甲班比乙班多植树 20 棵时，有 $20\times 8-(6\times 10+30+2a)=20$. 解得 $a=25$. 所以乙班增加人数后平均每小时植树 45 棵或 25 棵.　9. 本题答案不唯一，下列解法供参考：该函数图像表示小明骑车离出发地的路程 y(单位：km)与他所用的时间 x(单位：min)的关系. 小明以 400 m/min 的速度匀速骑了 5 min，在原地休息了 6 min，然后以 500 m/min 的速度匀速骑回出发地.

3.2　反比例函数

例 1　**解**：(1) 因为函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过点 $A(2,-4)$，把 $x=2$，$y=-4$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=-8$　(2) 因为 $k=-8$，所以根据反比例函数的性质知道，函数 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像在第二、四象限，在每一个象限内，y 随 x 的增大而增大.　(3) 将 $x=-3$ 时，$y=\frac{8}{3}$. 因为 $\frac{8}{3}\neq 5$，所以 $B(-3,5)$ 不在这个函数的图像上.　**说明**：问题(1)、(2)根据反比例函数的定义，通过待定系数法确定表达式，并通过理解函数图像的位置、增减性等加深对函数性质的理解；问题(3)巩固图像的画法(列表、描点、连线等)，根据图像和表达式判断点是否在图像

上. **思考**:问题(1)拓展为:确定反比例函数的表达式需要几个条件? 问题(2)拓展为:反比例函数的 $y=\frac{k}{x}$ 的性质是什么?或设 $D(-3, y_1)$、$E(-1, y_2)$、$F(2, y_3)$ 在这个反比例函数图像上,比较 y_1、y_2、y_3 的大小(引导学生以题归类,全面梳理 $k>0$ 和 $k<0$ 的性质). 问题(3)拓展为:反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 中自变量 x、函数值 y 的取值范围分别是什么(引导学生关注反比例函数图像的两条渐近线 x 轴和 y 轴、函数图像的变化趋势等)?点 $A'(-2, 4)$ 是否在图像上?反比例函数 $y=-\frac{8}{x}$ 的图像是否具有对称性(或将反比例函数的图像绕原点旋转 $180°$,你发现什么)? 可以增加在图像上的点的判断,例如点 $\left(32, -\frac{1}{4}\right)$ 是否在这个函数的图像上?

例 2 解:(1) 因为表中 $xy=2$,所以适合上表的 y 与 x 之间的一个表达式是 $y=\frac{2}{x}$. 其图像如图所示. (2) 当 $x=10$ 时,$y=\frac{2}{10}=0.2$. **说明**:本题条件是通过表格给出 y 与 x 的函数关系,通过对应关系的分析,确定一个符合该规律的函数模型,即表格中 x 与 y 的对应值的积为常数 2,可以写出一个表达式 $y=\frac{2}{x}$. **思考**:问题(1)拓展为:表格中 y 与 x 的对应关系有什么特点? 若描出这些点,可能具有什么特征? 也可以减少表格中的数,让学生体会模拟的函数可能不唯一,也可以是二次函数或一次函数,表格如下:



(例 2)

x	…	-2	1	4	…
y	…	-1	2	0.5	…

或:

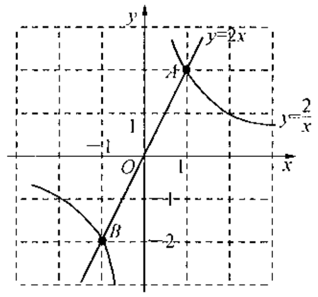
x	…	-2	1	…
y	…	-1	2	…

例 3 解:(1) 设 $p=\frac{k}{S}(k>0)$. 因为点 $A(0.1, 1000)$ 在函数图像上,所以 $1000=\frac{k}{0.1}$,$k=100$. 所以 p 与 S 之间的表达式是 $p=\frac{100}{S}$ (2) 当 $p=200$ Pa 时,$S=\frac{100}{200}=0.5(\mathrm{m}^2)$. 根据图 3-3 知,物体的受力面积至少为 $0.5\ \mathrm{m}^2$. **说明**:本题是以反比例函数为模型的实际问题. 问题(1)是根据待定系数法确定表达式,要注意 k 的取值范围;问题(2)利用反比例函数的性质解决实际问题. 学生通常会通过方程和观察图像的方法解决问题,也有学生会通过不等式解决,但这里需要提醒学生注意字母的取值范围的说明. **思考**:问题(1)拓展为:自变量 x 的取值范围是什么? p 随 S 的变化如何变化? 实际生活还有哪些问题以反比例函数为模型(例速度与时间(路程一定)、长方形的长与宽(面积一定)等)? 问题(2)拓展为:根据图像回答当 $p\leqslant 200$ 时,S 的取值范围是什么(明确利用反比例函数的增减性和函数图像解决问题,帮助学生理解"不超过""至少""至多"等不等关系的意义)?

例 4 解:(1) 将点 $A(2, 1)$ 的坐标代入 $y=x+m$,$y=\frac{k}{x}$,得到 $m=-1$,$k=2$ (2) 由题意得,关于 x、y 的方程组 $\begin{cases}y=x+m,\\ y=\frac{k}{x}\end{cases}$ 的解为坐标的点是函数 $y=x+m$ 与 $y=\frac{k}{x}$ 的图像的交点. 根据函数图像的对称性,得到函数 $y=x+m$ 与 $y=\frac{k}{x}$ 的图像相交的另一个交点 B 的坐标是 $(-1, -2)$. **说明**:通过观察两个函数的图像,把关于 x、y 的方程组(数的表现)与图像(形的表现)联系起来,并且按"不解方程组"的方式来解决点 B 的坐标,在理解两者之间关系的前提下解决本题,突出数形结合思想. **思考**:本题要理解函数与方程的关系,即以方程 $y=x+m$ 的解为坐标的点在函数 $y=x+m$ 图像上(完备性),函数 $y=x+m$ 图像上的点的坐标是方程 $y=x+m$ 的解(纯粹性),即数与形的完美统一,方程组 $\begin{cases}y=x+m,\\ y=\frac{k}{x}\end{cases}$ 的解就是函数 $y_1=x+m$ 图像与函数 $y_2=\frac{k}{x}$ 图像的交点的坐标,再根据图像的对称性解决问题. 可以拓展为:当 x 取何值时,$y_1>y_2$ 或设函数 $y=\frac{2}{x}$ 与 $y=x-1$ 的图像的交点坐标为 (a, b),则 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ 的值为________.

复习练习

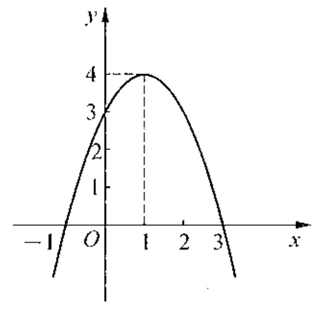
1. (1) 7 (2) -1 (3) $y_1<y_2$ (4) 一、三 (5) 6 (6) ①③ 2. (1) $y=\frac{2S}{x}$,是反比例函数 (2) $t=\frac{2000}{Q}$,是反比例函数 (3) $y=\frac{24}{x}$,是反比例函数 (4) $S=\frac{100}{h}$,是反比例函数 (5) $y=200-15x$,是一次函数. 3. (1) $I=\frac{10}{R}$ (2) $R=20$(欧姆) 4. (1) 把 $A(1,2)$ 代入 $y=ax$ 得 $a=2$,所以正比例函数表达式为 $y=2x$;把 $A(1,2)$ 代入 $y=\frac{b}{x}$ 得 $b=1\times2=2$,所以反比例函数表达式为 $y=\frac{2}{x}$ (2) 如图,当 $-1<x<0$ 或 $x>1$ 时,正比例函数值大于反比例函数值. (3) $-2<y<-1$ 5. (1) $y=-\frac{3}{x}$ (2) 1 -3 $-\frac{3}{2}$ 3 $-\frac{1}{2}$ 6. (1) $y=\frac{24000}{x}$ (2) 134 7. $y=\frac{4}{x}$ 或 $y=-\frac{4}{x}$



(第 4 题)

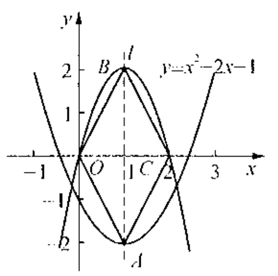
3.3 二次函数

例 1 解:(1) 由函数 $y=-x^2+(m-1)x+m$ 的图像与 y 轴交于点 $(0, 3)$,得 $m=3$. ∴ 该函数为 $y=-x^2+2x+3$ (2) 由 $-x^2+2x+3=0$,解得 $x_1=-1$,$x_2=3$. ∴ 该函数的图像与 x 轴的交点为 $(-1, 0)$,$(3, 0)$. ∵ $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$,∴ 该函数的图像顶点坐标为 $(1, 4)$. (3) 图像如图所示. (4) 由图像可知,当 $-1<x<3$ 时,该函数的图像在 x 轴上方. (5) 由图像可知,当 $x>1$ 时,y 的值随 x 值的增大而减小. **说明**:本题通过待定系数法确定二次函数的表达式,根据函数与方程的思想确定图像与 x 轴的交点坐标,利用配方法或顶点坐标公式确定图像顶点坐标,通过列表、描点、连线画出二次函数图像,依据函数图像获取信息,根据二次函数的性质确定函数递减的自变量的取值范围. **思考**:问题(1)可以拓展为函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像经过三个已知点,利用方程组确定 a、b、c 的值. 问题(2)可以拓展为图像与 x 轴交点坐标的一般方法,进而将二次函数图像与 x 轴的交点坐标问题转化为相应的一元二次方程的解的问题,利用 b^2-4ac 的符号判断交点的个数,也可以补充例题:已知函数 $y=mx^2-6x+1$(m 是常数),若该函数的图像与 x 轴只有一个交点,求 m 的值. 对配方法确定顶点的方法要形成技能. 问题(3)在分析过程中要注意列表的特殊要求,体现图像顶点坐标及其对称性,明确五点作图法的要求. 问题(4)可拓展为:如何根据二次函数图像获取信息(具有一定的开放性)? 问题(5)可以拓展为对二次函数增减性的系统整理.



(例 1)

例 2 解:(1) 因为 $y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$,所以顶点 A 的坐标为 $(1, -2)$. 因为二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图像经过原点,且它的顶点在二次函数 $y=x^2-2x-1$ 的图像的对称轴 l 上,所以点 C 和点 O 关于直线 l 对称,所以点 C 的坐标为 $(2, 0)$. (2) 因为四边形 $AOBC$ 是菱形,所以点 B 和点 A 关于直线 OC 对称,因此,点 B 的坐标为 $(1, 2)$. 因为二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图像经过点 $B(1, 2)$,$C(2, 0)$,所以 $\begin{cases}a+b=2,\\ 4a+2b=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\ b=4.\end{cases}$ 所以二次函数 $y=ax^2+bx$ 的表达式为 $y=-2x^2+4x$. **说明**:问题(1)利用配方法确定二次函数的顶点及图像的对称轴,再根据对称性确定点的坐标. 问题(2)根据菱形的轴对称性确定第二个二次函数图像顶点 B 的坐标,再利用待定系数法得到二次函数的表达式. **思考**:问题(1)可拓展为:如何求已知点关于直线 $x=1$ 的对称的点的坐标? 如何求已知点关于 x 轴对称的点的坐标? 问题(2)可以拓



(例 2)

展为:如何根据条件合理设二次函数表达式?本题能否用顶点式设二次函数表达式?体现二次函数表达式的形式的多样化,培养学生优化算法的意识和能力.

例3 **解**:(1) $80-x$　$200+10x$　$800-200-(200+10x)$　(2) 设第二个月单价降低 x 元时,所获利润为 y 元,当根据题意,得 $y=80\times200+(80-x)(200+10x)+40[800-200-(200+10x)]-50\times800=-10x^2+200x+8\,000=-10(x-10)^2+9\,000$. 因为当 $x=10$ 时,$80-x=70>50$,当 $x=10$ 时,y 有最大值 $9\,000$. 答:当第二个月的单价为70元时,销售这批T恤获得最大利润为9 000元.　**说明**:本题是关于二次函数的应用,源于课本,是课本上题目的改造、延伸和创新,巧妙地将"二次函数的应用"与"T恤衫销售"相结合.将销售过程分为三个阶段:第一个月定价定量销售、第二个月的降价销售及清仓销售,既要利用表格分析问题中的数量关系,又要建立二次函数、一次函数模型,突出了"实际问题——函数建模——最优化问题——再到实际问题"这一核心目标的掌握和运用,背景符合现实生活实际.　**思考**:问题(1)中的填表,为学生解题提供了解题策略,为建模搭建了脚手架,从一定程度上,降低了解题的门槛.也增加了题目的美观程度,可以拓展为:在初中阶段有哪些方法帮助建立模型?

例4 **解**:(1) 当不锈钢材料总长度为12米,共有3条竖档时,$BC=\frac{12-3x}{3}=4-x$,$\therefore x(4-x)=3$.解得,$x=1$ 或 $x=3$　(2) 当不锈钢材料总长度为12米,共有4条竖档时,$BC=\frac{12-4x}{3}$,矩形框架 $ABCD$ 的面积 $S=x\cdot\frac{12-4x}{3}=-\frac{4}{3}x^2+4x=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+3$. $\therefore$ 当 $x=\frac{3}{2}$ 时,矩形框架 $ABCD$ 的面积 S 最大,最大面积为3平方米.　(3) 当不锈钢材料总长度为 a 米,共有 n 条竖档时,$BC=\frac{a-nx}{3}$,矩形框架 $ABCD$ 的面积 $S=x\cdot\frac{a-nx}{3}=-\frac{n}{3}x^2+\frac{a}{3}x=-\frac{n}{3}\left(x-\frac{a}{2n}\right)^2+\frac{a^2}{12n}$. $\therefore$ 当 $x=\frac{a}{2n}$ 时,矩形框架 $ABCD$ 的面积 S 最大,最大面积为 $\frac{a^2}{12n}$ 平方米.　**说明**:本题要分析矩形两边的表示方法,注意从特殊到一般地分析和归纳得到矩形面积的表示,利用配方法或顶点坐标公式求面积的最大值.　**思考**:对问题(3)可以拓展为:若增加横档的个数,应该如何表示矩形的面积?自变量 x 的取值范围是什么?

复习练习

1. (1) $(0,1)$　y 轴所在直线　(2) $y=3(x-1)^2+2$　(3) 过点 $(-2,0)$,且平行于 y 轴的直线　(4) $x_1=1$,$x_2=2$　(5) 答案不唯一,如:① 抛物线 $y_1=-ax^2-ax+1$ 开口向下,或抛物线 $y_2=ax^2-ax-1$ 开口向上;　② 抛物线 $y_1=-ax^2-ax+1$ 的对称轴是 $x=-\frac{1}{2}$,或抛物线 $y_2=ax^2-ax-1$ 的对称轴是 $x=\frac{1}{2}$;　③ 抛物线 $y_1=-ax^2-ax+1$ 经过点 $(0,1)$,或抛物线 $y_2=ax^2-ax-1$ 经过点 $(0,-1)$　(6) $x<-1$ 或 $x>5$　2. (1) A　(2) C　3. (1) $y=2x^2+3x-3$　(2) $y=\frac{20}{3}x^2-\frac{20}{3}x-5$　(3) $y=7x^2-14x+3$　4. (1) $S=\frac{1}{2}x(40-x)=-\frac{1}{2}x^2+20x\ (0<x<40)$　(2) $S=\frac{1}{2}x(40-x)=-\frac{1}{2}x^2+20x=-\frac{1}{2}(x-20)^2+200$,当 $0<x<40$ 时,$x=20$ 时,S 的最大值为200. 所以当 $x=20$ cm 时,这个三角形的面积最大,最大面积是 $200\ \text{cm}^2$.

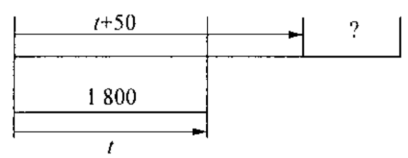
5. (1) 当 $x=1$ 时,窗户透光面积最大.　(2) 窗框另一边长为1.5米.　6. (1) $y=a(x-m)^2-a(x-m)=ax^2-(2am+a)x+am^2+am$. 因为当 $a\neq0$ 时,$[-(2am+a)]^2-4a(am^2+am)=a^2>0$. 所以,方程 $ax^2-(2am+a)x+am^2+am=0$ 有两个不相等的实数根. 所以,不论 a 与 m 为何值,该函数的图像与 x 轴总有两个公共点.　(2) ① $y=a(x-m)^2-a(x-m)=\left(x-\frac{2m+1}{2}\right)^2-\frac{a}{4}$,所以,点 C 的坐标为 $\left(\frac{2m+1}{2},-\frac{a}{4}\right)$. 当 $y=0$ 时,$a(x-m)^2-a(x-m)=0$. 解得 $x_1=m$,$x_2=m+1$. 所以 $AB=1$. 当 $\triangle ABC$ 的面积等于1时,$\frac{1}{2}\times1\times\left|-\frac{a}{4}\right|=1$. 所以 $\frac{1}{2}\times1\times\left(-\frac{a}{4}\right)=1$,或 $\frac{1}{2}\times1\times\frac{a}{4}=1$. 所以 $a=-8$,或 $a=8$. ② 当 $x=0$ 时,$y=am^2+am$,所以点 D 的坐标为 $(0,am^2+am)$. 当 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle ABD$ 的面积相等时,$\frac{1}{2}\times1\times\left|-\frac{a}{4}\right|=\frac{1}{2}\times1\times|am^2+am|$. 所以 $\frac{1}{2}\times1\times\left(-\frac{a}{4}\right)=\frac{1}{2}\times1\times(am^2+am)$,或 $\frac{1}{2}\times1\times\frac{a}{4}=\frac{1}{2}\times1\times(am^2+am)$. 所以 $m=-\frac{1}{2}$,或 $m=\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$,或 $m=\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$　7. (1) 当 $20\leqslant x\leqslant40$ 时,设 BC 满足的函数表达式为 $y=kx+b$,则 $\begin{cases}20k+b=8\,000,\\40k+b=4\,000.\end{cases}$ 解得 $k=-200$,$b=12\,000$,$\therefore y=-200x+12\,000$.　(2) 当 $0<x\leqslant20$ 时,老王获得的利润为 $w=(8\,000-2\,800)x=5\,200x\leqslant104\,000$,此时老王获得的最大利润为104 000元. 当 $20<x\leqslant40$ 时,老王获得的利润为 $w=(-200x+12\,000-2\,800)x=-200(x-23)^2+105\,800$. $\therefore$ 当 $x=23$ 时,利润 w 取得最大值,最大值为105 800元. $\because 105\,800>104\,000$,$\therefore$ 当张经理的采购量为23吨时,老王在这次买卖中所获得的利润最大,最大利润为105 800元.　8. (1) D　(2) $y=-x^2+(m-1)x+m=-\left(x-\frac{m-1}{2}\right)^2+\frac{(m+1)^2}{4}$,所以该函数的图像的顶点坐标为 $\left(\frac{m-1}{2},\frac{(m+1)^2}{4}\right)$. 把 $x=\frac{m-1}{2}$ 代入 $y=(x+1)^2$,得 $y=\left(\frac{m-1}{2}+1\right)^2=\frac{(m+1)^2}{4}$. 因此,不论 m 为何值,该函数的图像的顶点都在函数 $y=(x+1)^2$ 的图像上.　(3) 设函数 $z=\frac{(m+1)^2}{4}$. 当 $m=-1$ 时,z 有最小值0. 当 $m<-1$ 时,z 随 m 的增大而减小;当 $m>-1$ 时,z 随 m 的增大而增大. 又当 $m=-2$ 时,$z=\frac{(-2+1)^2}{4}=\frac{1}{4}$;当 $m=3$ 时,$z=\frac{(3+1)^2}{4}=4$. 因此,当 $-2\leqslant m\leqslant3$ 时,该函数的图像的顶点纵坐标的取值范围是 $0\leqslant z\leqslant4$.

3.4　函数的应用

例1 **解**:(1) 设 $x\leqslant2$ 时,$y=kx$. 把 $(2,6)$ 代入 $y=kx$,解得 $k=3$. $\therefore x\leqslant2$ 时,$y=3x$. 设 $x\geqslant2$ 时,$y=k'x+b$. 把 $(2,6)$,$(10,3)$ 代入 $y=k'x+b$,解得 $k'=-\frac{3}{8}$,$b=\frac{27}{4}$. $\therefore x\geqslant2$ 时,$y=-\frac{3}{8}x+\frac{27}{4}$　(2) 把 $y=4$ 代入 $y=3x$ 中,得 $x_1=\frac{4}{3}$. 把 $y=4$ 代入 $y=-\frac{3}{8}x+\frac{27}{4}$ 中,得 $x_2=\frac{22}{3}$. $\therefore$ 由正比例函数和一次函数的性质,得 $t=x_2-x_1=\frac{22}{3}-\frac{4}{3}=6$(小时). $\therefore$ 这个有效时间是6小时.　**说明**:本题是分段函数的应用问题,问题(1)根据图像获得已知条件,再利用待定系数法确定相应的一次函数的表达式;问题(2)中建立两个方程求出两个临界状态的自变量的值,再利用函数图像和函数性质解决问题.　**思考**:问题(2)可以拓展为:每毫升血液中含药量的最大值是多少?函数 y 随 x 的增大而如何变化?或者可以拓展提出这样一个问题:小明在求 $x\geqslant2$ 时 y 与 x 之间的表达式时,是这样做的:从图像上可知从2时到10时,每毫升血液中含药量从6微克变成3微克,所以含药量每小时减少 $\frac{3}{8}$ 微克,2小时含药量为6微克,所以 $y=6-\frac{3}{8}x$. 你同意他的做法吗?

例2 **解**:(1) 设 y_1 与 x 之间的表达式是 $y_1=kx+b$. 根据题意,得 $\begin{cases}300=b,\\100=200k+b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=300,\\k=-1.\end{cases}$ 所以 y_1 与 x 之间的表达式是:$y_1=-x+300$　(2) 设 x 天时上市的西红柿收益为 P,则 $P=y_1-y_2=(-x+300)-\left[\frac{1}{200}(x-150)^2+100\right]=-\frac{1}{200}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{175}{2}=-\frac{1}{200}(x-50)^2+100$. 所以当 $x=50$ 时,P 有最大值100. 答:从2月1日开始的第50天时,上市的西红柿收益最大.　**说明**:问题(1)根据图像建立售价 y_1 关于上市时间 x 的一次函数关系;问题(2)利用售价 y_1 和成本 y_2 建立收益关于上市时间的函数关系,并根据二次函数的性质解决最大值问题.　**思考**:问题(2)可以拓展为:若没有给出 y_2 关于 x 的函数表达式时,如何求 y_2 关于 x 的函数表达式,自变量 x 的取值范围是什么?

例3 **解**:(1) 3 600　20　(2) ①当 $50\leqslant x\leqslant80$ 时,设 y 与 x 的函数表达式为 $y=kx+b$. 根据题意,当 $x=50$ 时,$y=1\,950$;当 $x=80$ 时,$y=3\,600$. 所以 $\begin{cases}1\,950=50k+b,\\3\,600=80k+b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=55,\\b=-800.\end{cases}$ 所以,y 与 x 的函数表达式为 $y=55x-800$. ② 缆车到山顶的线路长为 $3\,600\div2=1\,800$(m),缆车到达终点所需时间为 $1\,800\div180=10$(min). 小颖到达缆车终点时,小亮行走的时间为 $10+50=60$(min). 把 $x=60$ 代入 $y=55x-800$,得 $y=55\times60-800$



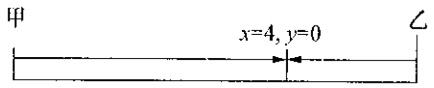
(例3)

$=2\,500$. 所以，当小颖到达缆车终点时，小亮离缆车终点的路程是 $3\,600-2\,500=1\,100$(m). **说明**：本题是以一次函数为模型的实际问题，对问题(2)可以利用待定系数法，也可以根据变化率 $k=\frac{3\,600-1\,950}{80-50}=55$，$y=1\,950+55(x-50)=55x-800$ 解决问题，问题(3)可以利用线型示意图分析运动的全过程，如图. **思考**：在分析此类问题时，要注意对函数本质的理解，问题(3)可以分解为：小颖到达缆车终点时，小亮行走的时间是多少？小亮已经走了多少 m？小亮离缆车终点的路程是多少 m？

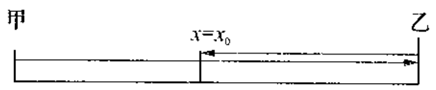
例4 解：(1) 900 (2) 图中点 B 的实际意义是：当慢车行驶 4 h 时，慢车和快车相遇. (3) 由图像可知，慢车 12 h 行驶的路程为 900 km，所以慢车的速度为 $\frac{900}{12}=75$(km/h)；当慢车行驶 4 h 时，慢车和快车相遇，两车行驶的路程之和为 900 km，所以慢车和快车行驶的速度之和为 $\frac{900}{4}=225$(km/h)，所以快车的速度为 $225-75=150$(km/h). (4) 根据题意，快车行驶 900 km 到达乙地，所以快车行驶 $\frac{900}{150}=6$(h) 到达乙地，此时两车之间的距离为 $6\times75=450$(km)，所以点 C 的坐标为 $(6, 450)$. 设线段 BC 所表示的 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$，把 $(4, 0)$，$(6, 450)$ 代入得 $\begin{cases}0=4k+b,\\450=6k+b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=225,\\b=-900.\end{cases}$ 所以，线段 BC 所表示的 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=225x-900$. 自变量 x 的取值范围是 $4\leqslant x\leqslant 6$. (5) 慢车与第一列快车相遇 30 分钟后与第二列快车相遇，此时，慢车的行驶时间是 4.5 h. 把 $x=4.5$ 代入 $y=225x-900$，得 $y=112.5$. 此时，慢车与第一列快车之间的距离等于两列快车之间的距离是 112.5 km，所以两列快车出发的间隔时间是 $112.5\div150=0.75$(h)，即第二列快车比第一列快车晚出发 0.75 h. **说明**：本题的关键是利用线型示意图分析两列火车的运动过程，即：

当 $0\leqslant x<4$ 时，两列火车在相遇之前的运动中：

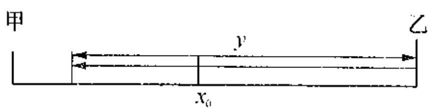
当 $x=4$ 时，$y=0$，即两列火车此时相遇：



设 C 的横坐标为 x_0，当 $x=x_0$ 时，快车到达乙地：



设 C 的横坐标为 x_0，当 $x_0<x\leqslant 12$ 时，快车已经到达乙地，慢车继续运动：



问题(1)、(2)比较简单，而当 $x=12$ 时，$y=900$，即慢车 12 小时走了 900 km，其速度为 $\frac{900}{12}=75$ km/h. 而当 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时，变化率为 $\frac{900}{4}=225$ km/h，所以快车的速度为 $225-75=150$ km/h. 快车走完全程的时间为 $\frac{900}{150}=6$，所以 $x_0=6$，此时慢车所走的路程为 $y=6\times75=450$，所以点 $C(6, 450)$. 再利用待定系数法解决问题(4). 问题(5)的关键要理解 0.5 小时后 y 的值即为两列快车之间的距离，可以利用(4)中的结论，也可以根据行程问题的实际意义解决. **思考**：本题可以拓展为：解决此类问题的关键是什么？你有哪些解题的经验和策略？

复习练习

1. A 2. (1) ① (2) 120 3. (1) 10 元，16 元 (2) $y=2x+4$ 4. (1) 60 (2) 当 $20\leqslant x\leqslant 30$ 时，设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$. 根据题意，当 $x=20$ 时，$y=60$；当 $x=30$ 时，$y=24$. 所以 $\begin{cases}60=20k+b\\24=30k+b\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-3.6\\b=132\end{cases}$. 所以，$y$ 与 x 之间的函数表达式为 $y=-3.6x+132$. 当 $x=22$ 时，$y=-3.6\times22+132=52.8$. 所以，小丽出发第 22 min 时的速度为 52.8 km/h. (3) 小丽驾车从甲地到乙地行驶的路程为 $\frac{0+12}{2}\times\frac{5}{60}+\frac{12+60}{2}\times\frac{5}{60}+60\times\frac{10}{60}+\frac{60+24}{2}\times\frac{10}{60}+\frac{24+48}{2}\times\frac{5}{60}+48\times\frac{10}{60}+\frac{48+0}{2}\times\frac{5}{60}=33.5$(km). 所以小丽驾车从甲地到乙地共耗油 $33.5\times\frac{10}{100}=3.35$(L) 5. (1) 当 $x\leqslant 40$ 时，$y=50x+1\,500$；$x\geqslant 40$ 时，$y=100x-500$ (2) 应从第 45 天开始人工灌溉. 6. (1) 4 分钟；40 升 (2) ① y 与 x 之间的表达式是：$y=40-19(x-15)$，即 $y=-19x+325$ ② 2 升 7. (1) 当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时，y 与 x 的函数表达式是 $y=2x$；当 $x>20$ 时，y 与 x 的函数表达式是 $y=2\times20+2.6(x-20)$，即 $y=2.6x-12$ (2) 因为小明家四、五月份的水费都不超过 40 元，六月份的水费超过 40 元，所以把 $y=30$ 代入 $y=2x$ 中，得 $x=15$；把 $y=34$ 代入 $y=2x$ 中，得 $x=17$；把 $y=42.6$ 代入 $y=2.6x-12$ 中，得 $x=21$. 所以 $15+17+21=53$. 所以小明家这个季度共用水 53 m^3. 8. (1) $y=-20x+30$ (2) 乙车出发时，甲车在乙车前方 30 km 处 80 (3) 画图略 9. (1) $y=(210-10x)(50+x-40)=-10x^2+110x+2\,100$ ($0<x\leqslant 15$ 且 x 为整数) (2) $y=-10(x-5.5)^2+2\,402.5$. ∵ $a=-10<0$，∴ 当 $x=5.5$ 时，y 有最大值 2 402.5. ∵ $0<x\leqslant 15$，且 x 为整数，当 $x=5$ 时，$50+x=55$，$y=2\,400$(元)，当 $x=6$ 时，$50+x=56$，$y=2\,400$(元) ∴ 当售价定为每件 55 元或 56 元，每个月的利润最大，最大的月利润是 2 400 元. (3) 当 $y=2\,200$ 时，$-10x^2+110x+2\,100=2\,200$，解得：$x_1=1$，$x_2=10$. ∴ 当 $x=1$ 时，$50+x=51$，当 $x=10$ 时，$50+x=60$. ∴ 当售价定为每件 51 元或 60 元，每个月的利润为 2 200 元. 当售价不低于 51 元且不高于 60 元且为整数时，每个月的利润不低于 2 200 元(或当售价分别为 51、52、53、54、55、56、57、58、59、60 元时，每个月的利润不低于 2 200 元).

第四章 图形的性质

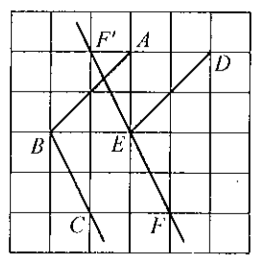
4.1 相交线与平行线

例1 解：(1) 如果一个四边形的对角线互相垂直平分且相等，那么这个四边形是正方形. 条件：一个四边形的对角线互相垂直平分且相等. 结论：这个四边形是正方形. (2) 如果两个角是对顶角，那么它们相等. 条件：两个角是对顶角. 结论：它们相等. (3) 如果两个角是同一个角的补角，那么这两个角相等. 条件：两个角是同一个角的补角. 结论：这两个角相等. **说明**：命题都是由"条件"和"结论"两部分组成的，"条件"就是已经知道的事项，"结论"就是由已知的事项推断出的事项. 将原命题改写成"如果……那么……"的形式，"如果"后面的部分是条件，"那么"后面的部分是结论. **思考**：命题有真命题和假命题之分，要说明一个命题是假命题，通常举出一个反例就可以了. 要说明一个命题是真命题，举出几个正确的例子可以吗？

例2 解：∵ $\angle AOC=50^\circ$，∴ $\angle AOD=180^\circ-\angle AOC=180^\circ-50^\circ=130^\circ$. ∵ OE 平分 $\angle AOD$，∴ $\angle DOE=\frac{1}{2}\angle AOD=\frac{1}{2}\times130^\circ=65^\circ$. **说明**：余角、补角、对顶角是相交线与平行线学习的基础，教学时要关注余角、补角、对顶角概念的区别. 本题由 $\angle AOC$ 和 $\angle AOD$ 互为邻补角及 OE 是 $\angle AOD$ 的角平分线可以求得 $\angle DOE$ 的度数. **思考**：如果将题中"OE 是 $\angle AOD$ 角平分线"改为"$OE\perp AB$"，如何求 $\angle DOE$ 的度数呢？

例3 证明：∵ $AB\parallel CD$，∴ $\angle BEF+\angle DFE=180^\circ$. 又∵ EG、FG 分别平分 $\angle BEF$、$\angle DFE$，∴ $\angle FEG=\frac{1}{2}\angle BEF$，$\angle EFG=\frac{1}{2}\angle DFE$. ∴ $\angle FEG+\angle EFG=90^\circ$. ∴ $\angle EGF=90^\circ$. ∴ $EG\perp FG$.

说明：解决本题的关键是恰当地运用平行线的性质定理和三角形的内角和定理. 教学时要注意平行线的性质定理和判定定理两者之间的区别与联系. **思考**：两条平行直线被第三条直线所截，一对同位角、内错角、同旁内角的角平分线分别有什么位置关系？你能分别写出已知、求证，并证明吗？



(例4)

例4 解：如图，$\angle ABC$ 与 $\angle DEF$ 相等或互补，即 $\angle ABC=\angle DEF$ 或 $\angle ABC+\angle DEF'=180^\circ$. **说明**：一个角的两边与另一个角的两边互相平行，要考虑角的两边不同的位置，解题时要注意不重复也不遗漏. **思考**：利用方格纸如何画一条直线和已知直线平行或垂直？利用直尺和圆规如何画一条直线和已知直线平行或垂直？

复习练习

1. (1) $153°30'$ (2) 两个角分别是两个相等的角的余角　这两个角相等 (3) 对角线互相平分的四边形是平行四边形 (4) 4 (5) 25　2. (1) D (2) A　3. $\angle ABC+\angle BCD=270°$.　4. 连接 AC. 由 $AD \parallel BC$ 可证得 $\angle DAC=\angle BCA$，进一步证得 $\angle CAB=\angle DCA$，可证得 $AB \parallel CD$.　5. $\angle 1=70°$，$\angle 2=110°$.　6. 作 BC 的垂直平分线与 $\angle ABC$ 的角平分线的交点即为点 P.　7. ∵ $AB \parallel CD$，∴ $\angle B+\angle C=180°$. ∴ $\angle 1+\angle A+\angle 2+\angle D=180°$. 又 ∵ $\angle 1=\angle A$，$\angle 2=\angle D$，∴ $\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}\times 180°=90°$. ∴ $\angle AED=90°$. ∴ $AE \perp DE$.　8. (1) $\gamma=\alpha+\beta$ (2) $\alpha+\gamma=\beta$

4.2 三角形(一)

例1 **证明**：(1) 在△ABC 和△ADC 中，$\begin{cases}AB=AD,\\ BC=DC,\\ AC=AC,\end{cases}$ ∴ △ABC ≌ △ADC　(2) ∵ △ABC ≌ △ADC，∴ $\angle BAO=\angle DAO$. ∵ $AB=AD$，∴ $OB=OD$，$AC \perp BD$.　**说明**：本题考查了三角形全等的判定及等腰三角形的相关性质，对于三角形全等而言，关键是寻找判定全等需要的条件. 对于(2)而言，可能会有部分学生继续利用△ABO≌△ADO 的方法加以证明，实际上利用等腰三角形"三线合一"的性质证明较为便捷，在平时学习过程中要注意方法之间的比较与选择.　**思考**：本题中要证明"$OB=OD$，$AC \perp BD$"，也就是要证明"AC 垂直平分 BD"，你能用更简便的方法来证明"AC 垂直平分 BD"吗？

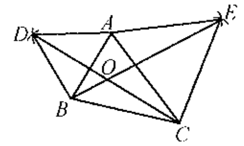
例2 **解**：[作法]　①作一条线段 $BC=a$；②以 B 为顶点，BC 为一边，作 $\angle DBC=\angle\alpha$；③在射线 BD 上截取线段 $BA=c$；④连接 AC. △ABC 就是所求作的三角形.　**说明**：本例考查了几何中的基本作图问题，解决由已知条件求作三角形的关键是依据三角形全等的条件来确定三角形，对于本题而言，已知三角形的两边及其夹角求作三角形，相当于依据"SAS"来确定三角形，因此，可先确定角，然后在角的两边上确定三角形的两边或者先确定三角形的一条边，然后确定角及另外一条边. 教学中，教师应借本例总结各类画图工具的作用，并举画三角形的例子，变换条件，进行练习，让学生感悟画图的策略和方法.　**思考**：若已知三角形的三边，又该如何求作这个三角形呢？需要知道三角形的几个条件就可以作出这个三角形？

例3 **解**：(1) ① △ABP ≌ △DCP；② △ABE ≌ △DCF；③ △BEP ≌ △CFP；④ △BFP ≌ △CEP　(2) 选择(1)中的 △ABP ≌ △DCP 加以证明.　∵ $PA=PD$，∴ $\angle PAD=\angle PDA$.　∵ $\angle BAD=\angle CDA$，∴ $\angle BAP=\angle CDP$.　在△ABP 和△DCP 中，$\begin{cases}PA=PD,\\ \angle BAP=\angle CDP,\\ AB=DC,\end{cases}$ ∴ △ABP ≌ △DCP.　**说明**：本例考查三角形全等的相关知识，可利用图形的对称性直观发现全等的三角形，然后根据相关判定定理加以证明即可.　**思考**：如果在原题基础上增加条件"△PBC 是边长为 2 的等边三角形，$\angle ABC=60°$，$AB=1$"，你能发现 BE、EF、FC 三者之间的关系并加以证明吗？

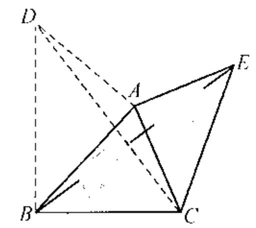
例4 **证明**：(1) ①∵ $\angle ADC=\angle ACB=90°$，∴ $\angle CAD+\angle ACD=90°$，$\angle BCE+\angle ACD=90°$. ∴ $\angle CAD=\angle BCE$. 又∵ $AC=BC$，$\angle ADC=\angle CEB=90°$，∴ △$ADC$ ≌ △CEB　②∵ △ADC ≌ △CEB，∴ $CE=AD$，$CD=BE$. ∴ $DE=CE+CD=AD+BE$　(2) 当 MN 旋转到图②的位置时，AD、DE、BE 所满足的等量关系是 $DE=AD-BE$. ∵ $\angle ACB=\angle CEB=90°$，∴ $\angle ACD+\angle BCE=\angle CBE+\angle BCE=90°$. ∴ $\angle ACD=\angle CBE$. 又∵ $AC=BC$，$\angle ADC=\angle CEB=90°$，∴ △$ACD$ ≌ △CBE. ∴ $CE=AD$，$CD=BE$. ∴ $DE=CE-CD=AD-BE$.　**说明**：本例考查动态几何中不变量问题，本题第(2)小题实际上是第(1)小题的图形变式问题，解决这一类问题的关键是观察图形变化的过程，从中比较出变化的量和没有变化的量，更重要的是要抓住变化中的不变量和不变关系.　**思考**：(1) 当图②中的直线 MN 绕着点 C 继续顺时针旋转直到交点 E 位于 AB 的中点的左侧时，DE、AD、BE 又会有怎样的等量关系？　(2) 如果将原题中"$\angle ACB=90°$"的条件去掉，条件"$AD \perp MN$，$BE \perp MN$"将作何改变，上述结论仍然成立？

复习练习

1. (1) 直角　100　钝角 (2) 不是　答案不唯一，如：$AC=DF$ (3) 15　2. (1) C (2) A　3. 利用 SAS 即可证得△EDC≌△BAC，则有 $DE=AB$，$AB=DE=8$ m　4. 证明 △ABC ≌ △AED 即可.　5. 利用 HL 定理证明 Rt△ADE ≌ Rt△CBF，再证明 △ABD ≌ △CDB 即可.　6. (1) 由 $AF=CD$ 可得 $AC=DF$，即可证：△ABC ≌ △DEF　(2) 由△ABC≌△DEF 得 $\angle ABC=\angle DEF$，再证△ABF≌△DEC 得 $\angle ABF=\angle DEC$. ∴ $\angle CBF=\angle FEC$.　7. (1) ∵ $\angle ABC=90°$，∴ $\angle CBF=\angle ABE=90°$. 在 Rt△$ABE$ 和 Rt△CBF 中，∵ $AE=CF$，$AB=BC$，∴ Rt△ABE ≌ Rt△CBF(HL).　(2) ∵ $AB=BC$，$\angle ABC=90°$，∴ $\angle CAB=\angle ACB=45°$. ∵ $\angle BAE=\angle CAB-\angle CAE=45°-30°=15°$. 由(1)知 Rt△$ABE$ ≌ Rt△CBF，∴ $\angle BCF=\angle BAE=15°$. ∴ $\angle ACF=\angle BCF+\angle ACB=45°+15°=60°$.　8. ∵ $BD \perp CD$，$CD=3$，$BD=4$，∴ $BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. ∵ E、F、G、H 分别是 AB、AC、CD、BD 的中点，∴ $EH=FG=\frac{1}{2}AD$，$EF=GH=\frac{1}{2}BC$，∴ 四边形 $EFGH$ 的周长 $=EH+GH+FG+EF=AD+BC$，又∵ $AD=6$，∴ 四边形 $EFGH$ 的周长为 $6+5=11$.　9. (1) 完成图形，如图所示. 证明△CAD≌△EAB 即可.　(2) $BE=CD$. 证明△CAD≌△EAB 即可.　(3) 由(1)、(2)的解题经验可知，如图，过 A 作等腰直角三角形 ABD，$\angle BAD=90°$，则 $AD=AB=100$ m，$\angle ABD=45°$，∴ $BD=100\sqrt{2}$ m，连接 CD，则由(2)可得 $BE=CD$，∵ $\angle ABC=45°$，∴ $\angle DBC=90°$，在 Rt△DBC 中，$BC=100$ m，$BD=100\sqrt{2}$ m，根据勾股定理得：$CD=\sqrt{100^2+(100\sqrt{2})^2}=100\sqrt{3}$ m，则 $BE=CD=100\sqrt{3}$ m.



(第9(1)题)



(第9(3)题)

4.3 三角形(二)

例1 **证明**：∵ $DE \parallel AC$，∴ $\angle BED=\angle A$，$\angle BDE=\angle C$. ∵ $DB=BE$，∴ $\angle BED=\angle BDE$. ∴ $\angle A=\angle C$. ∴ $AB=BC$.　**说明**：本例考查等腰三角形的性质的同时也考查了等腰三角形的判定，在实际运用过程中要注意二者之间的区别与联系.　**思考**：如果将原题已知条件改为"$BA=BC$，$DE \parallel AC$"，那么 $BD=BE$ 成立吗？如果将原题已知条件改为"$BA=BC$，$BD=BE$"，那么 $DE \parallel AC$ 成立吗？如果将原题中△BED 绕着点 B 顺时针旋转一定的角度，连接 AE、CD，那么 AE 与 CD 会有怎样的数量关系？

例2 **解**：∵ 在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{2.5^2-0.7^2}=2.4$(m). ∴ $EC=2.4-0.4=2$(m). 又∵ 在 Rt△EDC 中，$\angle ECD=90°$，∴ $DC=\sqrt{ED^2-EC^2}=\sqrt{2.5^2-2^2}=1.5$(m). ∴ $BD=DC-BC=1.5-0.7=0.8$(m). 答：梯足将向外移 0.8 m.　**说明**：本例考查勾股定理的简单应用，解决此类问题的关键是从实际背景中抽象出直角三角形，对于本题而言关键是抽象出的是两个斜边相等的直角三角形，然后利用勾股定理即可解决问题.　**思考**：若设梯子 AB 的中点为 P，当梯子由直立靠在墙 AC 上慢慢滑落到地面 DC 上时，点 P 运动的路线有多长？

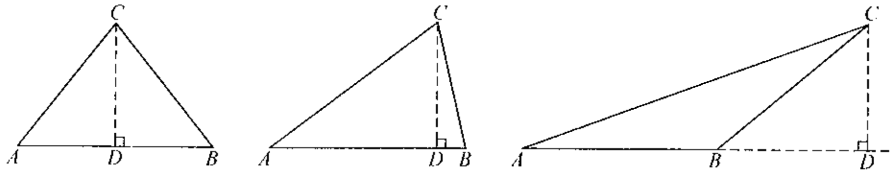
例3 **解**：△OMN 为等腰直角三角形. 证明如下：连接 AO. ∵ △ABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=90°$，点 O 为 BC 中点，∴ $OA \perp BC$，$\angle BAO=\angle CAO=45°$，$\angle B=\angle C=45°$，且 $OA=\frac{1}{2}BC=OB=OC$. 在△BOM 与△AON 中，$\begin{cases}BM=AN,\\ \angle B=\angle CAO=45°,\\ OB=OA.\end{cases}$ ∴ △BOM ≌ △AON. ∴ $OM=ON$，$\angle BOM=\angle AON$. ∴ $\angle BOM+\angle AOM=\angle AON+\angle AOM$. ∴ $\angle MON=\angle AOB=90°$. ∴ △$MON$ 为等腰直角三角形.

说明：本例考查动态几何中的全等三角形问题，解决本题的关键是从复杂的图形中分离出一组全等三角形 △BOM 与 △AON 或者 △AOM 与 △CON 即可. 教师在教学中可结合本题图形的几个变式作详细分析.

思考：将本题图形补全为正方形进一步思考.

例4 **解**：过点 C 作 $CD \perp AB$，垂足为 D，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD$，∴ $CD=6$(m). 分三种情况计算. ① 当 AB 为底边时，$AD=DB=5$(m)(如图①)，$AC=BC=\sqrt{6^2+5^2}=\sqrt{61}$(m)　② 当 AB 为腰且三

角形为锐角三角形时(如图②)，$AB = AC = 10(\text{m})$，$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = 8(\text{m})$，$BD = 2(\text{m})$，$BC = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}(\text{m})$ ③ 当 AB 为腰且三角形为钝角三角形时(如图③)，$AB = BC = 10(\text{m})$，$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = 8(\text{m})$，$AC = \sqrt{6^2 + 18^2} = 6\sqrt{10}(\text{m})$. 所以另两边的长分别为 $\sqrt{61}$ m、$\sqrt{61}$ m，或 10 m、



① ② ③

(例 4)

$2\sqrt{10}$ m，或 10 m、$6\sqrt{10}$ m. **说明**：本例考查等腰三角形的分类问题. 本题中边 AB 可能为底边也可能为腰，同时当边 AB 为腰时三角形 AB 边上的高可能在三角形内部或外部，因此需要进行分类谈论. 通常情况下，已知等腰三角形的一个角的度数，求另外两个角的度数，或已知等腰三角形的一条边的长，求另外两条边的长，一般都要分类讨论. **思考**：如果有一块边长分别为 10 米和 12 米的等腰三角形形状的草皮，你能求出这块草皮的面积吗？

复习练习

1. (1) 7 cm 或 8 cm (2) 55 或 70 (3) 80 (4) 15 (5) 8 2. (1) 由 $OB = OC$ 可得 $\angle DCB = \angle EBC$，再由 $BE \perp AC$，$CD \perp AB$，进一步得到 $\angle DBC = \angle ECB$，从而得到 $AB = AC$ (2) 点 O 在 $\angle BAC$ 的角平分线上. 连接 OA，证明 $\triangle ABO \cong \triangle ACO$ 即可. 3. (1) $\because \angle ACB = \angle ECD$，$\therefore \angle ACD + \angle BCD = \angle ACD + \angle ACE$. 即 $\angle BCD = \angle ACE$. $\because BC = AC$，$DC = EC$，$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD$ (2) $\because \triangle ACB$ 是等腰直角三角形，$\therefore \angle B = \angle BAC = 45°$. $\because \triangle ACE \cong \triangle BCD$，$\therefore \angle B = \angle CAE = 45°$. $\therefore \angle DAE = \angle CAE + \angle BAC = 45° + 45° = 90°$. $\therefore AD^2 + AE^2 = DE^2$. 由(1) 知 $AE = DB$，$\therefore AD^2 + DB^2 = DE^2$ 4. (1) $\because AB \parallel CD$，$\therefore \angle ACD + \angle CAB = 180°$，又 $\because \angle ACD = 114°$，$\therefore \angle CAB = 66°$. 由作法可知，$AM$ 是 $\angle CAB$ 的平分线，$\because \angle MAB = \frac{1}{2}\angle CAB = 33°$ (2) 由作法可知，AM 是 $\angle CAB$ 的平分线，$\therefore \angle MAB = \angle CAM$. $\because AB \parallel CD$，$\therefore \angle MAB = \angle CMA$. $\therefore \angle CAM = \angle CMA$. 又 $\because CN \perp AD$，$CN = CN$，$\therefore \triangle ACN \cong \triangle MCN$ 5. (1) 由 $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ 可得 $\angle DBA = \angle CAB$，所以 $OA = OB$ (2) 由 $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ 可得 $AC = BD$，由(1) 知 $OA = OB$，所以 $OC = OD$. 所以 $\angle OCD = \angle ODC$，进而得出 $\angle ODC = \angle DBA$，所以 $AB \parallel CD$ 6. (1) 连接 AC，$\because \angle ABC = 90°$，$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$. $\because \angle D = 90°$，$\therefore AD^2 + CD^2 = AC^2$. $\because AD^2 + CD^2 = 2AB^2$，$\therefore AB^2 + BC^2 = 2AB^2$. $\therefore AB = BC$ (2) 过 C 作 $CF \perp BE$ 于 F. 证明四边形 $CDEF$ 是矩形以及 $\triangle BAE \cong \triangle CBF$ 即可.

4.4 四边形(一)

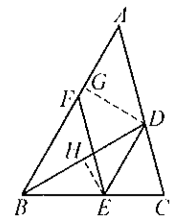
例 1 证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AB = CD$，$\angle B = \angle D$，$\angle BAD = \angle BCD$. $\because AE$，CF 分别平分 $\angle BAD$，$\angle BCD$，$\therefore \angle BAE = \frac{1}{2}\angle BAD$. $\angle DCF = \frac{1}{2}\angle DCB$. $\therefore \angle BAE = \angle DCF$. $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$. **说明**：本例考查平行四边形的性质的同时也考查了三角形的全等的判定与性质. **思考**：如图 4－11，在平行四边形 $ABCD$ 中，点 E、F 分别在 BC、AD 上，探索点 E、F 满足什么条件，结论仍然成立？

例 2 证明：连接 BE、DF. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD \parallel BC$，$AD = BC$. $\because AE = CF$，$\therefore AD - AE = CB - CF$，即 $DE = BF$，$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形. $\therefore OE = OF$. **说明**：本例在考查平行四边形的性质的同时也考查了平行四边形的判定，在实际运用过程中要注意二者之间的区别与联系. 本例可以用三角形全等的方法来证，但都不如用平行四边形对角线互相平分来证明更简便. **思考**：若本例改为：如图，在 $\square ABCD$ 中，点 E、F 分别在 AD、BC 上，EF、BD 相交于点 O 且互相平分. 求证：$AE = CF$.

例 3 解：EF 与 AC 平行且相等. 在 $\triangle ABC$ 中，$\because AE = BE$，$CD = BD$，$\therefore DE \parallel AC$，$DE = \frac{1}{2}AC$. $\therefore EF \parallel AC$. $\because GF \parallel AD$，$\therefore$ 四边形 $ADFG$ 为平行四边形. $\therefore DF = AG = \frac{1}{2}AC$. $\therefore EF = DE + DF = \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AC = AC$，$EF \parallel AC$. **说明**：本例考查了三角形中位线和几何图形中猜想问题，解决此类问题的

关键是应先观察图形的特征，根据题设，进行大胆合理的猜想，一般可以从形状、大小、位置关系三个方面进行思考，必要时可用工具进行测量辅助思考. **思考**：若设 FG 与 BC 的交点为 H，试说明 GH 是 $\triangle ACD$ 的中位线；若 $\triangle GCH$ 的面积为 1，求 $\triangle ABC$ 的面积.

例 4 (1) **证明**：$\because DE \parallel AB$，$EF \parallel AC$，$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是平行四边形，$\angle ABD = \angle BDE$. $\therefore AF = DE$. $\because BD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$\therefore \angle ABD = \angle DBE$. $\therefore \angle DBE = \angle BDE$. $\therefore BE = DE$. $\therefore BE = AF$. (2) **解**：过点 D 作 $DG \perp AB$ 于点 G，过点 E 作 $EH \perp BD$ 于点 H. $\because \angle ABC = 60°$，$BD$ 是 $\angle ABC$ 的平分线，$\therefore \angle ABD = \angle EBD = 30°$. $\therefore DG = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 6 = 3$. $\because BE = DE$，$\therefore BH = DH = \frac{1}{2}BD = 3$. $\therefore BE = 2\sqrt{3}$. $\therefore DE = BE = 2\sqrt{3}$. $\therefore$ 四边形 $ADEF$ 的面积为：$DE \cdot DG = 6\sqrt{3}$. **说明**：本题考查了平行四边形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质等知识. 对于(1)，可由 $DE \parallel AB$、BD 平分 $\angle ABC$ 推得 $\triangle BDE$ 是等腰三角形；对于(2)，可利用含 30° 的直角三角形边角之间的关系求得相应线段的长度，从而求出面积.



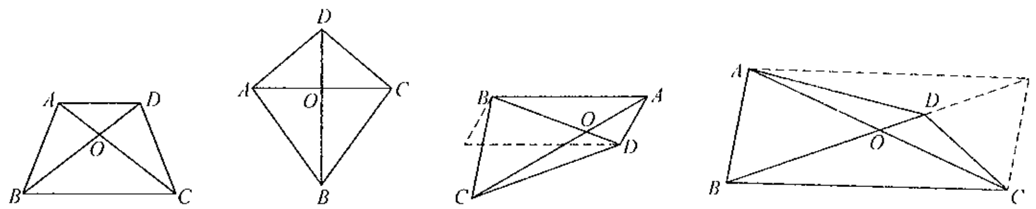
(例 4(1)题)

思考：本题中选择 $DE \parallel AB$、BD 平分 $\angle ABC$、$BE = DE$ 三个论断中的任意两个作为条件能推出第三个吗？

复习练习

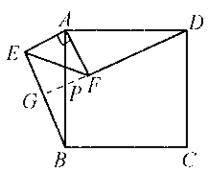
1. (1) 130 (2) 3.6 (3) 300° 2. (1) B (2) D (3) B 3. 由 $AE \parallel CF$ 可证四边形 $AECF$ 为平行四边形，可证 $AE = CF$. 4. (1) $\because$ 在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 AD 边上的中点，$\therefore AE = ED$，$\angle ABE = \angle F$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DFE$ 中 $\begin{cases} \angle ABE = \angle F, \\ \angle BEA = \angle FED, \\ AE = ED, \end{cases}$ $\therefore \triangle ABE \cong \triangle DFE(\text{AAS})$. $\therefore FD = AB$. (2) $\because DE \parallel BC$，$\therefore \triangle FED \backsim \triangle FBC$，$\because \triangle ABE \cong \triangle DFE$，$\therefore BE = EF$，$S_{\triangle FBC} = S_{\square ABCD}$. $\therefore \frac{EF}{BF} = \frac{1}{2}$. $\therefore \frac{S_{\triangle FED}}{S_{\triangle FBC}} = \frac{1}{4}$. $\therefore \frac{S_{\triangle FED}}{8} = \frac{1}{4}$. $\therefore \triangle FED$ 的面积为 2. 5. 提示：可利用 $AB \mathrel{\underline{\parallel}} CD$，也可连接 AC，证对角线互相平分. 6. (1) 已知：$OA = OC$，$AD \parallel BC$. 求证：四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 证明：$\because AD \parallel BC$，$\therefore \angle ADO = \angle CBO$，$\angle DAO = \angle BCO$. 又 $OA = OC$，$\therefore \triangle OAD \cong \triangle OCB$. $\therefore AD = BC$. 故四边形 $ABCD$ 为平行四边形. (另解) 已知：$\angle BAD = \angle DCB$，$AD \parallel BC$. 求证：四边形 $ABCD$ 为平行四边形. 证明：$\because AD \parallel BC$，$\therefore \angle BAD + \angle ABC = 180°$. $\because \angle BAD = \angle DCB$，$\therefore \angle ABC + \angle DCB = 180°$. $\therefore \angle BAC = \angle DCA$. $\therefore AB \parallel CD$. 故四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

(2) 假命题及反例有：

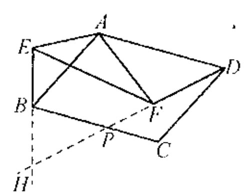


由②、④推结论 由①、③推结论 由②、③推结论 由①、②推结论

7. (1) $BE = DF$，$BE \perp DF$. 证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$，即可证明 $BE = DF$，延长 DF 交 AB 于点 P，交 BE 与点 G，可得 $\angle BPG = \angle APD$，$\angle ABE = \angle ADF$，进一步可得 $\angle PGB = \angle PAD = 90°$. (2) $BE \perp DF$ 成立，$BE = DF$ 不成立，结论变为 $DF = kBE$. 证明 $\triangle ABE \backsim \triangle ADF$ 即可. (3) 改变. $DF = kBE$，$\beta = 180° - \alpha$. 证法：延长 DF 交 EB 的延长线于点 H. $\because AD = kAB$，$AF = kAE$，$\therefore \frac{AD}{AB} = k$，$\frac{AF}{AE} = k$. $\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AF}{AE}$. $\because \angle BAD = \angle EAF = \alpha$，$\therefore \angle FAD = \angle EAB$. $\therefore \triangle FAD \backsim \triangle EAB$. $\therefore \frac{DF}{BE} = \frac{AF}{AE} = k$. $\therefore DF = kBE$. 由 $\triangle FAD \backsim \triangle EAB$ 得 $\angle AFD = \angle AEB$. $\because \angle AFD + \angle AFH = 180°$，$\therefore \angle AEB + \angle AFH = 180°$. $\because$ 四边形 $AEHF$ 的内角和为 360°，



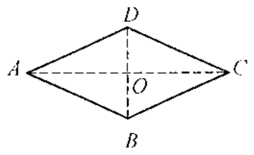
(第 7(1)题)



(第 7(3)题)

$\therefore \angle EAF+\angle EHF=180°$. $\because \angle EAF=\alpha$, $\angle EHF=\beta$, $\therefore \alpha+\beta=180°$. $\therefore \beta=180°-\alpha$.

4.5 四边形(二)



(例 1)

例 1 **解**:四边形是菱形. **说明**:本例考查折叠问题中的数学,既可考查学生的动手能力,也可考查学生的空间想象能力,解决本题的关键是抓住折叠与展开过程中的不变量和线段之间不变的位置关系.例如对角线互相垂直,折叠后矩形一个角的两边打开后恰好是四边形的对角线 AC、BD,而两条对角线互相垂直平分等. **思考**:如果沿着图中的虚线剪下后先不打开,然后再沿虚线平行的方向剪去一个角,将剩下的部分打开,你能不通过操作完全依靠自身的想象画出展开后的图形吗?

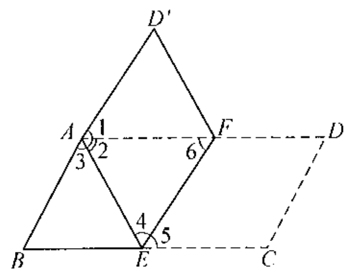
例 2 **证明** (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AB=CD$. 又 $\because BE=CF$, $\therefore BE+EF=CF+EF$,即 $BF=CE$. 又 $\because AF=DE$, $\therefore \triangle ABF\cong\triangle DCE$(SSS) (2) $\because \triangle ABF\cong\triangle DCE$, $\therefore \angle B=\angle C$. 又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore \angle B+\angle C=180°$. $\therefore \angle B=\angle C=90°$. 又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形. **说明**:本例考查矩形的判定及三角形全等的相关知识,解决此类问题的关键是从图形中寻找判定需要具备的基本条件. **思考**:若 E、F 分别为直线 BC 上的两个动点,其他条件不变,结论仍然成立吗?

例 3 **解**:添加条件:对角线 AC 和 BD 相等. 理由:连接 AC、BD. $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中,$AE=BE$,$BF=CF$, $\therefore EF$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线,$\therefore EF=\frac{1}{2}AC$. 同理可得 $FG=\frac{1}{2}BD$,$GH=\frac{1}{2}AC$,$HE=\frac{1}{2}BD$. 又 $\because AC=BD$(添加条件),$\therefore EF=FG=GH=HE$. $\therefore$ 四边形 $EFGH$ 为菱形. **说明**:本例考查四边形的各边中点组成的中点四边形的特征问题,解决问题的关键是把四边形的问题转化为三角形中位线的问题加以解决. **思考**:要使四边形 $EFGH$ 为矩形,那么四边形 $ABCD$ 中应添加一个什么条件? 要使四边形 $EFGH$ 为正方形,那么四边形 $ABCD$ 中又应添加什么条件呢? 四边形 $EFGH$ 的形状到底取决于四边形 $ABCD$ 的哪些条件呢?

例 4 (1) 证明:在正方形 $ABCD$ 中, $\because BC=CD$,$\angle B=\angle CDF$,$BE=DF$, $\therefore \triangle CBE\cong\triangle CDF$. $\therefore CE=CF$ (2) $GE=BE+GD$ 成立. 理由是: $\because \triangle CBE\cong\triangle CDF$, $\therefore \angle BCE=\angle DCF$. $\therefore \angle BCE+\angle ECD=\angle DCF+\angle ECD$,即 $\angle ECF=\angle BCD=90°$. 又 $\angle GCE=45°$,$\therefore \angle GCF=\angle GCE=45°$. $\because CE=CF$,$\angle GCE=\angle GCF$,$GC=GC$, $\therefore \triangle ECG\cong\triangle FCG$. $\therefore GE=GF$. $\therefore GE=DF+GD=BE+GD$ (3) 过 C 作 $CG\perp AD$,交 AD 延长线于 G. 在直角梯形 $ABCD$ 中, $\because AD\parallel BC$, $\therefore \angle A=\angle B=90°$, 又 $\angle CGA=90°$,$\therefore$ 四边形 $ABCG$ 为矩形. $\because AB=BC$, $\therefore$ 四边形 $ABCG$ 为正方形. $\therefore AG=BC=12$. 已知 $\angle DCE=45°$,根据(1)(2)可知,$ED=BE+DG$. 设 $DE=x$,则 $DG=x-4$,$\therefore AD=16-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中,$\because DE^2=AD^2+AE^2$,即 $x^2=(16-x)^2+8^2$. 解这个方程,得 $x=10$. $\therefore DE=10$. **说明**:本例实质是考查正方形背景下的旋转变换问题,同时考查学生的学习经验的迁移能力及转化能力,例如解决第(2)小题的关键是要抓住 $\triangle BCE\cong\triangle DCF$,实质也就是 $\triangle CDF$ 是可以由 $\triangle BCE$ 绕着点 C 顺时针旋转 90°得到的,解决第(3)小题的关键是把本小题的图形转化为第(2)小题的图形即可直接应用相关结论解决问题,通过第(3)小题的解决过程,不难发现要善于将相关图形通过添加辅助线转化为曾经解决过的问题,从而利用前面的已知结论,加以解决. **思考**:在图①中,连接 BD 分别交 CG、CE 于点 M、N,你能利用几何变换的知识证明“$DM^2+BN^2=MN^2$”吗?

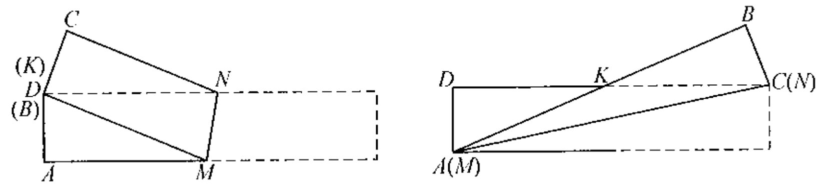
复习练习

1. (1) 菱 5 (2) 3 (3) 13 2. (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore AB\parallel CD$,$AB=CD$. $\therefore \angle ABF=\angle ECF$. $\because EC=DC$,$\therefore AB=EC$.在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ECF$ 中,$\because \angle ABF=\angle ECF$,$\angle AFB=\angle EFC$,$AB=EC$,$\therefore \triangle ABF\cong\triangle ECF$ (2) $\because AB=EC$,$AB\parallel EC$,$\therefore$ 四边形 $ABEC$ 是平行四边形. $\therefore AF=EF$,$BF=CF$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore \angle ABC=\angle D$. 又 $\because \angle AFC=2\angle D$, $\therefore \angle AFC=2\angle ABC$. $\because \angle AFC=\angle ABF+\angle BAF$,$\therefore \angle ABF=\angle BAF$. $\therefore FA=FB$. $\therefore FA=FE=FB=FC$,$\therefore AE=BC$. $\therefore$ 四边形 $ABEC$ 是矩形. 3. (1) 证明 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$,再进一步证出 $\triangle ABF\cong\triangle ADF$,再利用 $\angle AFB=\angle CFE$ 即可得到结论. (2) $\because AB\parallel CD$,$\therefore \angle BAC=\angle ACD$,又 $\because \angle BAC=\angle DAC$,$\therefore \angle CAD=\angle ACD$,$\therefore AD=CD$,$\because AB=AD$,$CB=CD$,$\therefore AB=CB=CD=AD$,$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形. (3) 当 $EB\perp CD$ 时,$\angle EFD=\angle BCD$,理由:由(1)得 $\triangle ABC\cong\triangle ADC$,$\therefore \angle BCF=\angle DCF$.在 $\triangle BCF$ 和 $\triangle DCF$ 中 $\begin{cases}BC=CD\\ \angle BCF=\angle DCF\\ CF=CF\end{cases}$,$\therefore \triangle BCF\cong\triangle DCF$(SAS),$\therefore \angle CBF=\angle CDF$,$\because BE\perp CD$,$\therefore \angle BEC=\angle DEF=90°$,$\therefore \angle EFD=\angle BCD$. 4. (1) 四边形 $OCED$ 是菱形. $\because DE\parallel AC$,$CE\parallel BD$,$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是平行四边形.又 $\because$ 在矩形 $ABCD$ 中,$OC=OD$,$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是菱形. (2) 连接 OE.由菱形 $OCED$ 得,$CD\perp OE$,$\therefore OE\parallel BC$.又 $CE\parallel BD$,$\therefore$ 四边形 $BCEO$ 是平行四边形,$\therefore OE=BC=8$. $\therefore S_{\text{四边形}OCED}=\frac{1}{2}OE\cdot CD=\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$. 5. (1) 矩形 $EFBC$,矩形 $ABDE$,平行四边形 $MBNE$ 中选取矩形、平行四边形各一个即可. (2) 选其中之一完成证明即可.例如证明四边 $ABDE$ 为矩形,先证 $\triangle AFE$ 为等腰三角形,且 $\angle FAE=30°$ 可证 $\angle BAE=90°$,同理可证 $\angle ABD=\angle BDE=90°$. 6. (1) 由折叠可知:$\angle D=\angle D'$,$CD=AD'$,$\angle C=\angle D'AE$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore \angle B=\angle D$,$AB=CD$,$\angle C=\angle BAD$. $\therefore \angle B=\angle D'$,$AB=AD'$,$\angle D'AE=\angle BAD$,即 $\angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3$. $\therefore \angle 1=\angle 3$. $\therefore \triangle ABE\cong\triangle AD'F$ (2) 四边形 $AECF$ 是菱形.由折叠可知:$AE=EC$,$\angle 4=\angle 5$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore AD\parallel BC$. $\therefore \angle 5=\angle 6$. $\therefore \angle 4=\angle 6$. $\therefore AF=AE$. $\therefore AF=EC$.又 $\because AF\parallel EC$,$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形. $\because AF=AE$,$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形.



(第 5 题)

7. (1) $\because ABCD$ 是矩形,$\therefore AM\parallel DN$,$\therefore \angle KNM=\angle 1$. $\because \angle KMN=\angle 1$,$\therefore \angle KNM=\angle KMN$. $\because \angle 1=70°$,$\therefore \angle KNM=\angle KMN=70°$. $\therefore \angle MKN=40°$ (2) 不能.过 M 点 $ME\perp DN$,垂足为点 E,则 $ME=AD=1$,由(1)知 $\angle KNM=\angle KMN$. $\therefore MK=NK$.又 $MK\geqslant ME$,$\therefore NK\geqslant 1$. $\therefore S_{\triangle MNK}=\frac{1}{2}NK\cdot ME\geqslant\frac{1}{2}$. $\therefore \triangle MNK$ 的面积最小值为 $\frac{1}{2}$,不可能小于 $\frac{1}{2}$. (3) 分两种情况:[情况一] 如图①,将矩形纸片对折,使点 B 与点 D 重合,此时点 K 也与点 D 重合.设 $MK=MD=x$,则 $AM=5-x$.由勾股定理,得 $1^2+(5-x)^2=x^2$.解得,$x=2.6$.即 $MD=ND=2.6$. $\therefore S_{\triangle MNK}=S_{\triangle MNK}=\frac{1}{2}\times 1\times 2.6=1.3$



① ②

(第 8 题)

[情况二] 如图②,将矩形纸片沿对角线 AC 对折,此时折痕为 AC.设 $MK=AK=CK=x$,则 $DK=5-x$.同理可得即 $MK=NK=2.6$. $\therefore S_{\triangle MNK}=S_{\triangle ACK}=\frac{1}{2}\times 1\times 2.6=1.3$. $\therefore \triangle MNK$ 的面积最大值为 1.3.

8. (1) $\because DF\perp AE$,$\therefore \angle AEB=90°-\angle BAE=\angle AFD$.又 $\because AB=AD$,$\angle ABE=\angle DAF=90°$,$\therefore \triangle ABE\cong\triangle DAF$,$\therefore AE=DF$ (2) 作 $AM\parallel EF$ 交 BC 于 M,作 $DN\parallel GH$ 交 AB 于 N,则 $AM=EF$,$DN=GH$.由(1)知,$AM=DN$. $\therefore EF=GH$,即 $\frac{EF}{GH}=1$ (3) 作 $AM\parallel EF$ 交 BC 于 M,作 $DN\parallel GH$ 交 AB 于 N,则 $AM=EF$,$DN=GH$. $\because EF\perp GH$,$\therefore AM\perp DN$. $\therefore \angle AMB=90°-\angle BAM=\angle AND$.又 $\because \angle ABM=\angle DAN=90°$,$\therefore \triangle ABM\backsim\triangle DAN$. $\therefore \frac{AM}{DN}=\frac{AB}{AD}=\frac{a}{b}$. $\therefore \frac{EF}{GH}=\frac{a}{b}$.

4.6 圆(一)

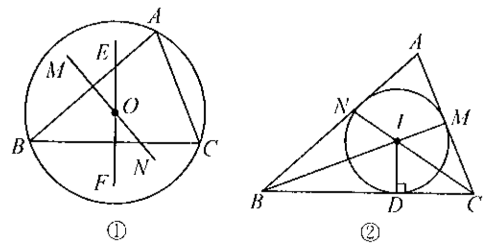
例 1 **解**:$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$,$\therefore \overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{BC}$. $\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$. $\because \angle 1=45°$,$\therefore \angle 2=\angle 1=45°$.

说明:在一个圆中,如果弧相等,那么弧所对的圆心角相等,所以$\angle 2$的度数等于$\angle 1$的度数. **思考**:小明根据"在同圆或等圆中,相等的圆心角所对的弧相等,所对的弦相等"认为:在$\odot O$中,若圆心角$\angle AOB=2\angle COD$,则有弦$AB=2CD$,你同意他的说法吗?说说你的理由.

例2 **解**:(1)不同类型的正确结论有: ① $BE=CE$; ② $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$; ③ $\angle BED=90^\circ$; ④ $\angle BOD=\angle A$; ⑤ $AC\parallel OD$; ⑥ $AC\perp BC$; ⑦ $OE^2+BE^2=OB^2$; ⑧ $S_{\triangle ABC}=BC\cdot OE$; ⑨ $\triangle BOD$是等腰三角形; ⑩ $\triangle BOE\backsim\triangle BAC$;等等. (2) $\because OD\perp BC$, $\therefore BE=CE=\frac{1}{2}BC=4$. 设$\odot O$的半径为$R$,则$OE=OD-DE=R-2$. 在Rt$\triangle OEB$中,由勾股定理得$OE^2+BE^2=OB^2$,即$(R-2)^2+4^2=R^2$,解得$R=5$. $\therefore \odot O$的半径为5. **说明**:本题以考查圆的有关性质为目的,通过开放、探究的形式提出问题,灵活考查圆的相关知识.书写不同类型的结论,可以从线段、弧、度数、位置关系等角度考虑. **思考**:一条弦所对的两条弧有什么关系、所对的圆周角有什么关系?

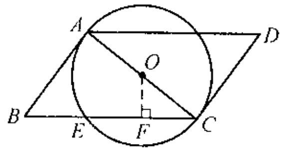
例3 已知:$\triangle ABC$(图①). 求作:$\odot O$,使它经过点A、B、C. 作法:① 作线段AB的垂直平分线MN; ② 作线段BC的垂直平分线EF,交MN于点O; ③ 以O为圆心,OB为半径作圆. $\odot O$就是所求作的外接圆. 已知:$\triangle ABC$(图②). 求作:$\odot I$,使它与$\triangle ABC$的各边都相切.

作法:① 分别作$\angle ABC$、$\angle ACB$的平分线BM和CN,交点为I; ② 过点I作$ID\perp BC$,垂足为D; ③ 以I为圆心,ID为半径作$\odot I$. $\odot I$就是所求作的内切圆. **说明**:作圆,需要确定圆心的位置和圆的半径.外接圆的圆心到$\triangle ABC$三个顶点的距离相等,所以圆心是三边垂直平分线的交点;内切圆的圆心到$\triangle ABC$三边的距离相等,所以圆心是三个内角平分线的交点. **思考**:本题$\angle BOC$与$\angle A$有什么数量关系?$\angle BIC$与$\angle A$有什么数量关系?



(例3)

例4 **解**:(1)直线CD与$\odot O$相切. 理由如下: $\because AC$是$\odot O$的直径,AB与$\odot O$相切于点A, $\therefore AC\perp AB$. $\because$ 在$\square ABCD$中,$AB\parallel CD$, $\therefore AC\perp CD$. $\because$ 点C在$\odot O$上, $\therefore$ 直线CD是$\odot O$切线. (2)过点O作$OF\perp CE$,垂足为F(如图),则$EF=CF=4$ cm. 在Rt$\triangle OFC$中, $OF=\sqrt{OC^2-CF^2}=3$ cm. 在$\triangle COF$和$\triangle CBA$中, $\because \angle CFO=\angle CAB=90^\circ$, $\angle OCF=\angle BCA$, $\therefore \triangle COF\backsim\triangle CBA$. $\therefore \frac{OF}{AB}=\frac{CF}{CA}$. $\therefore AB=7.5$ cm. **说明**:因为经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线,所以只要$AC\perp AB$就可以判断CD与$\odot O$相切. **思考**:第(2)题解决的途径不唯一,如果连接AE,利用$\triangle CAE\backsim\triangle CBA$,如何求得$AB$的长?



(例4)

复习练习

1. (1)内 上 外 (2) 40 (3) 2 (4) 130 (5)相切 (6) 30°或150° 2. (1) C (2) B (3) D 3. 9 4. 8 cm.提示:连接OC. 5. $4\sqrt{3}$ cm 6. (1) $AP=2\sqrt{3}$ (2)提示:连接OC、AC.证明略.

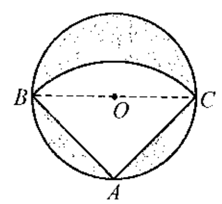
4.7 圆(二)

例1 **解**:因为$n=60^\circ$, $r=10$ cm,所以扇形面积为 $S=\frac{n}{360}\pi r^2=\frac{60\times\pi\times 10^2}{360}=\frac{50\pi}{3}$(cm²).扇形的周长为$l=\frac{n\pi r}{180}+2r=\frac{60\times\pi\times 10}{180}+20=\left(\frac{10\pi}{3}+20\right)$cm. **说明**:由于扇形面积公式为$S=\frac{n\pi r^2}{360}$,弧长公式为$l=\frac{n\pi r}{180}$,所以可以直接使用公式求扇形面积,弧长$+2r$后求得扇形的周长. **思考**:扇形的面积公式和圆的面积公式有什么关系?扇形的弧长公式和圆的周长公式有什么关系?已知圆心角、扇形的面积,是否可以求扇形的半径呢?已知扇形的半径、扇形的弧长,是否可以求扇形的圆心角呢?

例2 **解**:$\because$ 正方形$ABCD$的边长为4, $\therefore AB=4$. $\therefore \frac{1}{2}AB=2$, $AO=2\sqrt{2}$.即,内切圆半径是2,外接圆半径是$2\sqrt{2}$. **说明**:本题要了解有关概念并熟悉如何构造特殊的直角三角形.由正方形的边长、外接圆半径、内切圆半径正好组成一个直角三角形,从而求得它们的长度. **思考**:若等边三角形的边长是4,那么其内切圆半径、外接圆半径分别是多少呢?正六边形呢?

例3 **解**:圆锥的侧面展开后是一个扇形,该扇形的半径为a,扇形的弧长为$2\pi r$,所以$S_{侧}=\frac{1}{2}\times 2\pi r\times a=\pi ra$, $S_{底}=\pi r^2$, $S=\pi ra+\pi r^2$. 答:这个圆锥形零件的侧面积为πra,全面积为$\pi ra+\pi r^2$. **说明**:圆锥的全面积是指圆锥的侧面积加圆锥底面的面积.解题时要注意圆锥侧面积和扇形面积公式中各字母代表的含义,还要注意区分立体图形和平面图形中的各个量的区别和联系. **思考**:过圆锥的高的平面被圆锥截得的图形是一个什么样的图形?如果过圆锥的高的平面被圆锥截得的图形是一个等边三角形,那么这个圆锥的侧面积展开图是一个什么样的图形呢?

例4 **解**:(1)连接BC. $\because \angle BAC=90^\circ$, $\therefore BC$为$\odot O$的直径,即$BC=\sqrt{2}$, $\therefore AB=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=1$; (2)设所得圆锥的底面圆的半径为$r$,根据题意得$2\pi r=\frac{90\cdot\pi\cdot 1}{180}$,解得$r=\frac{1}{4}$. **说明**:圆锥的侧面展开图为扇形,这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长,扇形的半径等于圆锥的母线长. **思考**:如果剪出的是圆周角为120°的扇形,所得圆锥的底面圆的半径是多少呢?你有什么发现?



(例4)

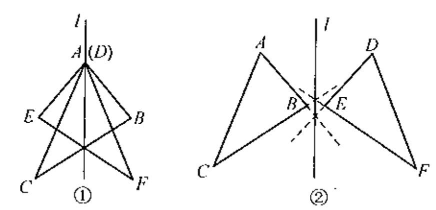
复习练习

1. (1) 3 (2) $12\pi-9\sqrt{3}$ (3) 2 (4) $\sqrt{3}$ (5) π 2. (1) C (2) C (3) B (4) B 3. (1)转动轮转一周,传送带上的物品A被传送$2\pi\times 10=20\pi$cm. (2)转动轮转1°,传送带上的物品A被传送$\frac{20\pi}{360}=\frac{\pi}{18}$cm. (3)转动轮转$n°$,传送带上的物品$A$被传送$n\times\frac{20\pi}{360}=\frac{n\pi}{18}$cm. 4. 在Rt$\triangle ABC$中,$AB=13$ cm,$AC=5$ cm, $\therefore BC=12$ cm. $\because$ 过点C作AB边的高OC,$OC\cdot AB=BC\cdot AC$, $\therefore r=OC=\frac{BC\cdot AC}{AB}=\frac{5\times 16}{13}=\frac{60}{13}$. $\therefore S_{表}=\pi r(BC+AC)=\pi\times\frac{60}{13}\times(12+5)=\frac{1\,020}{13}\pi$ cm². 5. (1) π 2π (2) $(n-2)\pi$ 6. $S_{阴影}=S_{半圆}-S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\pi\times 4^2-\frac{1}{2}\times 8\times 2\sqrt{3}=8\pi-8\sqrt{3}$ 7. (1) 45 (2) $\triangle DEP\backsim\triangle ACP$.理由略 (3) $DE=\frac{2\sqrt{10}}{5}$ 提示:由$\triangle DEP\backsim\triangle ACP$得$\frac{DE}{AC}=\frac{DP}{AP}$

第五章 图形的变化

5.1 图形的轴对称、旋转和平移

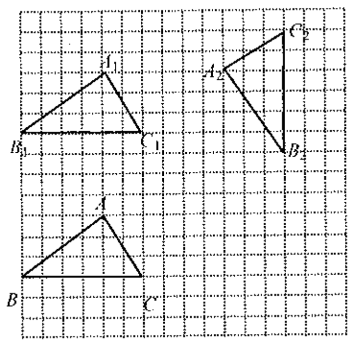
例1 **解**:如图所示. **说明**:本题解决时运用了成轴对称图形的对应边所在直线的交点一定在对称轴上的性质或利用对应点的直线被对称轴垂直平分的性质,同时,解决时应提醒学生答题的规范和完整. **思考**:总结本题分析方法中,可以追问:如何找到两个成中心对称的图形的对称中心?



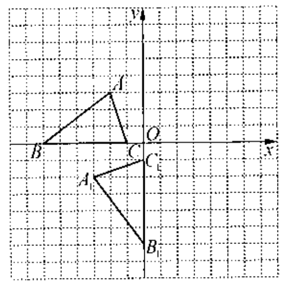
(例1)

例2 **解**:(1)如图所示.(2)将$\triangle A_1B_1C_1$向右平移6格;将$\triangle A_1B_1C_1$以A_1为旋转中心逆时针旋转90°,可以得到$\triangle A_2B_2C_2$.

说明:本题第(2)问是一道开放性问题,学生的策略会多种多样,教学中应关注每种方法陈述的规范性、严谨性.思考:本题旨在运用全等变换,解释图形前后的形成过程,让学生充分感受图形变换的特征,对学有余力的学生,可以思考如何由$\triangle ABC$直接通过适当变换到$\triangle A_2B_2C_2$的位置,也可以去掉网格,并尝试描述变换过程.



（例 2）



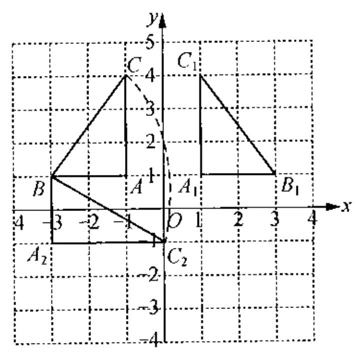
（例 3）

例 3　解：(1) (2, 3)　(2) 如图，$\triangle A_1B_1C_1$ 就是所画图形，点 B 的对应点 B_1 的坐标为(0, −6)　(3) (−7, 3)或(−5, −3)或(3, 3)　**说明**：在方格中确定图形变换前后对应点的坐标时，常借助基本图形变换前后的全等性来分析，在具体问题解决中需注意点的位置变换和点的坐标变化之间关系.　**思考**：教学中可在第(2)题后增加计算点 B 运动到点 B_1 的路径长.

例 4　解：(1) $BD=MF$，$BD\perp MF$. 延长 FM 交 BD 于点 N，由题意得 $\triangle BAD\cong\triangle MAF$. ∴ $BD=MF$，$\angle ADB=\angle AFM$. 又∵ $\angle DMN=\angle AMF$，　∴ $\angle ADB+\angle DMN=\angle AFM+\angle AMF=90°$. ∴ $\angle DNM=90°$. ∴ $BD\perp MF$　(2) 显然 $AK\neq AF$.　① 当 $FA=FK$ 时，则 $\angle FAK=\angle FKA=75°$. ∴ $\angle DAD_1=15°$. ② 当 $AK=KF$ 时，则 $\angle KAF=\angle F=30°$. ∴ $\angle DAD_1=60°$.　∴ 旋转角 β 的度数为 15°或 60°.　**说明**：第(1)题中，探究两条线段的关系应从数量、位置两个角度展开；第(2)题则应分类进行思考，需注意分类的标准，做到不重不漏. **思考**：涉及等腰三角形的问题，常与分类讨论有关，其中分类的标准有：按边分类、按角分类、按顶点分类. 教学中可将直角三角形改为等腰直角三角形进行平行矫正.

复习练习

1. (1) 2　2　(2) ① $AB/\!/DE$, $AB=DE$　② 70　(3) $(0,2\sqrt{2})$　(4) 110　2. (1) A　(2) A　(3) D　(4) D　3. 略　4. (1) $AB=A'B'$，$AB/\!/A'B'$；平移前后的对应线段相等且平行　(2) $AB=A'B'$；对应线段 AB 和 $A'B'$ 所在的直线如果相交，交点在对称轴 l 上　(3) l 垂直平分 AA'.　(4) $OA=OA'$，$\angle AOA'=\angle BOB'$.　5. (1) 如图所示，画出$\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的$\triangle A_1B_1C_1$.　(2) 如图所示，画出$\triangle ABC$ 绕着点 B 顺时针旋转 90°后得到$\triangle A_2BC_2$，线段 BC 旋转过程中所扫过得面积 $S=\frac{90\pi\times13}{360}=\frac{13\pi}{4}$.　6. (1) −4　2　(2) 将 A_1B_1 关于 x 轴对称，即可得到线段 A_2B_2　(3) $P'(a-5,-b)$



（第 5 题）

5.2　图形的相似

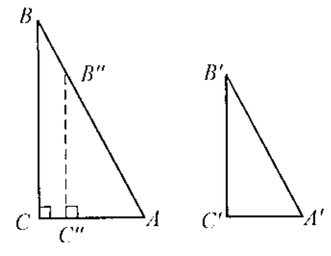
例 1　解：∵ 矩形 $ABCD$ 中，∴ $AB/\!/CD$，$\angle D=90°$. ∴ $\angle BAF=\angle AED$. ∵ $BF\perp AE$，∴ $\angle AFB=90°$. ∴ $\angle AFB=\angle D$.　∴ $\triangle ABF\backsim\triangle EAD$.　**说明**：判定两个三角形相似的常用方法就是教科书中的三种方法，通过本题应帮助学生进行复习、总结并优化证明方法.　**思考**：① 如果点 E 在 DC 的延长线

上，其他条件不变，结论还成立吗？　② 若将矩形改为等边三角形也可进一步拓展.

例 2　解：需添加条件：$\angle B=\angle ACP$，或 $\angle ACB=\angle APC$，或$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AP}$，等等.　**说明**：本题添加的条件不唯一，是一道条件开放题. 本题添加的条件还可以是上面所写条件的等价形式，如 $\frac{AP}{AC}=\frac{AC}{AB}$，$AC^2=AB\cdot AP$. 另外，本题添加的条件还可以是强化条件，如 $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AP}=\frac{BC}{CP}$ 等.　**思考**：结合上一题，可以完善相似三角形的基本图形的认识，并加以拓展.

例 3　解：作出直线 AC 与 BD 的交点 E，根据同一时刻物高与影长的比相等，得　$\frac{CD}{DE}=\frac{1}{1.5}$，即 $DE=1.5CD=1.5\times2=3$(m).　∴ $BE=BD+DE=21+3=24$(m).　根据同一时刻物高与影长的比相等，得　$\frac{AB}{BE}=\frac{1}{1.5}$，　即 $AB=\frac{BE}{1.5}=\frac{24}{1.5}=16$(m).　∴ 旗杆的高度为 16 m.　**说明**：“同一时刻物高与影长的比相等”是生活常识，我们可以运用相似三角形的有关知识加以说明.　**思考**：①本题还有其他方法解决吗？比较不同的方法. ②教学中也可以让学生认识不同位置的特征，可以将“教学楼”改为“30°的斜坡”.

例 4　解：(1) 一个锐角对应相等；两直角边对应成比例. (2) 斜边和一条直角边对应成比例.　已知：如图，在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$中，$\angle C=\angle C'=90°$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$. 求证 Rt$\triangle ABC\backsim$ Rt$\triangle A'B'C'$.　［证法一］设 $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=k$，则 $AB=kA'B'$，$AC=kA'C'$.　在 Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$中，$\frac{BC}{B'C'}=\frac{\sqrt{AB^2-AC^2}}{\sqrt{A'B'^2-A'C'^2}}=\frac{\sqrt{k^2A'B'^2-k^2A'C'^2}}{\sqrt{A'B'^2-A'C'^2}}=k$.



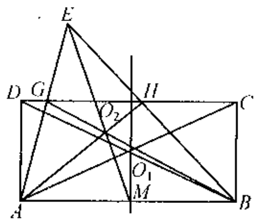
（例 4）

∴ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$.　∴ Rt$\triangle ABC\backsim$ Rt$\triangle A'B'C'$.　［证法二］如图，假设 $AB>A'B'$，在 AB 上截取 $AB''=A'B'$，过点 B''作 $B''C''\perp AC$，垂足为 C''.　∵ $\angle C=\angle AC''B''$，∴ $BC/\!/B''C''$.　∴ Rt$\triangle ABC\backsim$Rt$\triangle AB''C''$. ∴ $\frac{AC}{AC''}=\frac{AB}{AB''}$.　∵ $AB''=A'B'$，∴ $\frac{AC}{AC''}=\frac{AB}{A'B'}$.　∵ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$，∴ $\frac{AC}{AC''}=\frac{AC}{A'C'}$.　∴ $AC''=A'C'$.　又∵ $AB''=A'B'$，$\angle C'=\angle AC''B''=90°$，　∴ Rt$\triangle AB''C''\cong$ Rt$\triangle A'B'C'$.　∴ Rt$\triangle ABC\backsim$ Rt$\triangle A'B'C'$.　**说明**：本题的解决方式主要是通过与两个直角三角形全等进行类比进行，在第(2)题的说理中，方法不唯一，教学中可广泛激发学生的思维.　**思考**：本题关注于学生学习过程的考查，尤其在解决问题的思路方面，因此在平时教学、复习教学中均需加以关注. 本题教学中可以继续挖掘其他类似的探究类型，以培养学生对这一类数学活动经验的积累和回忆.

复习练习

1. (1) $\frac{13}{4}$　(2) 0.5　(3) 7　(4) 1∶2　(5) 4.5　2. (1) C　(2) B　(3) B　3. 证明：(1) ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle ABC=90°$. ∵ $AE\perp BD$，∴ $\angle ABC=\angle BGE=90°$. ∵ $\angle BEG=\angle AEB$，∴ $\triangle ABE\backsim\triangle BGE$. ∴ $\frac{AE}{BE}=\frac{BE}{EG}$. ∴ $BE^2=EG\cdot EA$.　(2) 由(1)证得 $BE^2=EG\cdot EA$，∵ $BE=CE$，∴ $CE^2=EG\cdot EA$. ∴ $\frac{CE}{EG}=\frac{AE}{CE}$. ∵ $\angle CEG=\angle AEC$，∴ $\triangle CEG\backsim\triangle AEC$. ∴ $\angle ECG=\angle EAC$.　4. (1) 在▱$ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，∴ $\angle DEC=\angle ECB$. ∵ $BE=BC$，$CE=CD$，∴ $\angle BEC=\angle ECB$，$\angle DEC=\angle D$. ∴ $\angle BEC=\angle ECB=\angle DEC=\angle D$，∴ $\triangle BCE\backsim\triangle CDE$.　(2) ∵ $\triangle BCE\backsim\triangle CDE$，∴ $\frac{BC}{CD}=\frac{CE}{DE}$，即$\frac{10}{6}=\frac{6}{DE}$，∴ $DE=3.6$　5. (1) ∵ 四边形 $EFGH$ 是正方形，∴ $EH/\!/BC$. ∴ $\triangle AEH\backsim\triangle ABC$.　(2) 如图设 AD 与 EH 交于点 M. ∵ $\angle EFD=\angle FEM=\angle FDM=90°$，∴ 四边形 $EFDM$ 是矩形. ∴ $EF=DM$. 设正方形 $EFGH$ 的边长为 x，∵ $\triangle AEH\backsim\triangle ABC$，∴ $\frac{EH}{BC}=\frac{AM}{AD}$. ∴ $\frac{x}{40}=\frac{30-x}{30}$. ∴ $x=\frac{120}{7}$. ∴ 正方形 $EFGH$ 的边长为$\frac{120}{7}$ cm，面积为

$\frac{14\,400}{49}\text{cm}^2$.　6. (1) ① ∵ $DE /\!/ BC$, ∴ $\triangle ADH \backsim \triangle ABG$. ∴ $\frac{DH}{BG}=\frac{AH}{AG}$. 同理 $\frac{HE}{GC}=\frac{AH}{AG}$. ∴ $\frac{DH}{BG}=\frac{HE}{GC}$　② ∵ $DE /\!/ BC$, ∴ $\triangle FDH \backsim \triangle FCG$. ∴ $\frac{DH}{CG}=\frac{FH}{FG}$. 同理 $\frac{EH}{GB}=\frac{FH}{FG}$. ∴ $\frac{DH}{CG}=\frac{HE}{GB}$. ∴ $\frac{DH}{HE}=\frac{CG}{BG}$. 由(1)得 $\frac{DH}{HE}=\frac{BG}{GC}$. ∴ $\frac{CG}{BG}=\frac{BG}{GC}$. ∴ $BG=CG$. 即 G 是 BC 的中点.　(2) 如图所示，直线 MO_1 即为所求.



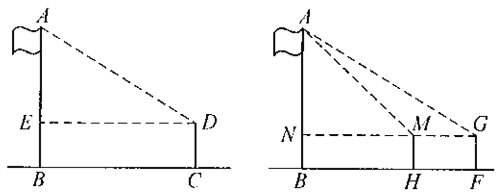
(第 6 题)

5.3　锐角三角函数

例 1　解：$\sin 30^\circ+\sin^2 45^\circ-\frac{1}{3}\tan^2 60^\circ=\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{3}(\sqrt{3})^2=0$.　**说明**：三种特殊角的锐角三角函数值需要理解性地记忆，这是解决本题的关键；同时在运算中也要注意实数运算法则的灵活运用.　**思考**：在特殊角锐角三角函数值运用的教学中，既可以安排一定量的计算训练，也可结合锐角三角函数的定义来理解这些值的意义.

例 2　解：在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{12}{5}$.　在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，斜边 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13$.　∴ $\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{13}$.　∵ CD 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，∴ $CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{60}{13}$.　在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\cos\angle ACD=\frac{CD}{AC}=\frac{12}{13}$.　**说明**：分析中应紧扣三种锐角三角函数的定义展开，前提必须找到相应的直角三角形，本题共有 3 个直角三角形，这也是学生容易混淆的地方.　**思考**：本题除所给出的计算方法外，还可以借助同角的余角相等，相等的角的锐角三角函数值也相等来简化计算. 按照这个意思提出问题，你还有什么方法计算 $\sin B$？

例 3　解：(1) 作 $DE\perp AB$，垂足为 E. 则 $DE=BC=a$，$BE=CD=h_1$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$\tan\angle ADE=\frac{AE}{DE}$. ∴ $AE=a\cdot\tan\alpha$. ∴ $AB=h_1+a\tan\alpha$　(2) 作 $GN\perp AB$，垂足为 N. 则 $MG=HF=b$，$BN=HM=FG=h_2$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AMN$ 中，$\tan\angle AMN=\frac{AN}{MN}$. ∴ $MN=\frac{AN}{\tan\gamma}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AGN$ 中，$\tan\angle AGN=\frac{AN}{NG}$. ∴ $NG=\frac{AN}{\tan\beta}$ ∵ $NG-MN=MG=b$, ∴ $\frac{AN}{\tan\beta}-\frac{AN}{\tan\gamma}=b$. ∴ $AN=\frac{b\tan\beta\cdot\tan\gamma}{\tan\gamma-\tan\beta}$. ∴ $AB=h_2+\frac{b\tan\beta\cdot\tan\gamma}{\tan\gamma-\tan\beta}$.　**说明**：本题借助数学活动编制而成，分析中需通过构造直角三角形来解决. 本题涉及测量底部可以直接到达与不能直接到达两种情况，教学中可适当归纳.　**思考**：若小聪的方案是在点 F 处测得旗杆顶部 A 的仰角后，向 FG 方向登高 c 米后，再次测得顶部 A 的仰角后，又如何计算旗杆 AB 的高度？



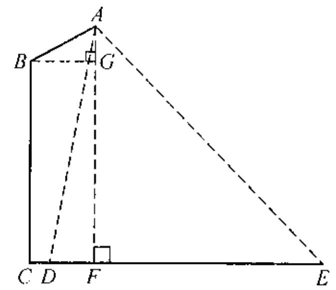
(例 3)

例 4　解：(1) 过点 B 作 $BE\perp l$，垂足为点 E.　设 AB 与 l 交于点 O，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$\angle OAD=60^\circ$，$AD=2$，∴ $OA=\frac{AD}{\cos 60^\circ}=4$.　又 $AB=10$，∴ $OB=AB-OA=6$.　在 $\mathrm{Rt}\triangle BOE$ 中，$\angle OBE=\angle OAD=60^\circ$，∴ $BE=OB\cdot\cos 60^\circ=3(\text{km})$.　∴ 观测点 B 到航线 l 的距离为 3 km. (2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOD$ 中，$OD=AD\cdot\tan 60^\circ=2\sqrt{3}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle BOE$ 中，$OE=BE\cdot\tan 60^\circ=3\sqrt{3}$.　∴ $DE=OD+OE=5\sqrt{3}$.　在 $\mathrm{Rt}\triangle CBE$ 中，$\angle CBE=76^\circ$，$BE=3$，∴ $CE=BE\cdot\tan\angle CBE=3\tan 76^\circ$.　∴ $CD=CE-DE=3\tan 76^\circ-5\sqrt{3}\approx 3.38$.　5 min$=\frac{1}{12}$ h. ∴ $\frac{CD}{\frac{1}{12}}=12CD\approx 12\times 3.38\approx 40.6(\text{km/h})$.　答：该轮船航行的速度约为 40.6 km/h.　**说明**：本题是锐角三角函数中较复杂的实际应用问题. 解决这类问题时常分以下几个步骤：理清题目所给信息条件和需要解决的具体问题；通过构造相应的直角三角形加以分析，将实际问题转化为数学问题（数学建模）；根据直角三角形的边角关系寻找解决问题的方法；正确进行计算，写出答案等. 在解决与直角三角形的有关实际问题时，常常通过设元的方法，并根

据题目中各个量之间的内在联系建立方程，从而解决问题. 这种将几何问题转化为代数问题是初中数学中常用的方法. 另外，这类问题中也常通过添加适当的辅助线，将一般三角形转化为直角三角形来解决，这种方法称为“化斜为直”.　**思考**：教学中，可以总结归纳一些基本图形，并让学生思考此题的解决策略可以归纳为哪一类基本图形.

复习练习

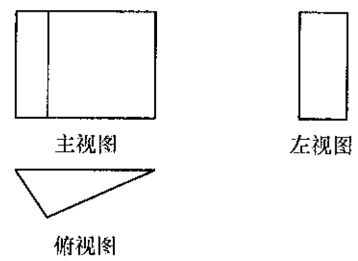
1. (1) $\frac{1}{2}$　(2) 60°　$\frac{\sqrt{3}}{2}$　(3) 45°　(4) 4　2. (1) A　(2) A　(3) D　3. (1) $\sqrt{3}-2$　(2) $\frac{3}{4}$　(3) 4　4. 过点 C 作 $CD\perp AB$，垂足为点 D. ∵ $\angle B=30^\circ$，$\angle ACB=15^\circ$，∴ $\angle CAD=45^\circ$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\angle ADC=90^\circ$，$\angle CAD=45^\circ$，$AC=6$，∴ $CD=AD=3\sqrt{2}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BCD$ 中，$\angle CDB=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，$CD=3\sqrt{2}$，∴ $BD=3\sqrt{6}$. 则 $AB=(3\sqrt{6}-3\sqrt{2})$km.　5. 作 $CH\perp AD$ 于 H. 设 $CH=x$ km，在 $\mathrm{Rt}\triangle ACH$ 中，$\angle A=37^\circ$，∵ $\tan 37^\circ=\frac{CH}{AH}$，∴ $AH=\frac{CH}{\tan 37^\circ}=\frac{x}{\tan 37^\circ}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle CEH$ 中，∵ $\angle CEH=45^\circ$，∴ $CH=EH=x$. ∵ $CH\perp AD$，$BD\perp AD$，∴ $CH /\!/ BD$. ∴ $\frac{AH}{HD}=\frac{AC}{CB}$. ∵ $AC=CB$，∴ $AH=HD$. ∴ $\frac{x}{\tan 37^\circ}=x+5$. ∴ $x=\frac{5\cdot\tan 37^\circ}{1-\tan 37^\circ}\approx 15$. ∴ $AE=AH+HE=\frac{15}{\tan 37^\circ}+15\approx 35$ km. ∴ E 处距离港口 A 有 35 km.　6. 过点 A 作 $AF\perp CE$，交 CE 于点 F. 设 AF 的长度为 x m. ∵ $\angle AED=45^\circ$，∴ $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形. ∴ $EF=AF=x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADF$ 中，∵ $\tan\angle ADF=\frac{AF}{DF}$，∴ $DF=\frac{AF}{\tan\angle ADF}=\frac{x}{\tan 80.5^\circ}=\frac{x}{6}$. ∵ $DE=18.9$，∴ $\frac{x}{6}+x=18.9$. 解得 $x=16.2$. 过点 B 作 $BG\perp AF$，交 AF 于点 G. 易得 $BC=GF=15$，$\angle CBG=90^\circ$. ∴ $AG=AF-GF=16.2-15=1.2$. ∵ $\angle ABC=120^\circ$，∴ $\angle ABG=\angle ABC-\angle GBC=120^\circ-90^\circ=30^\circ$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABG$ 中，∵ $\sin\angle ABG=\frac{AG}{AB}$，∴ $AB=\frac{AG}{\sin\angle ABG}=\frac{1.2}{\sin 30^\circ}=2.4$. 所以灯杆 AB 的长度为 2.4 m.



(第 6 题)

5.4　图形的投影

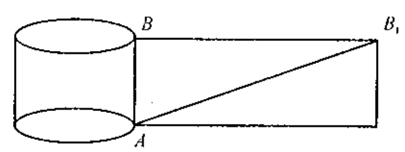
例 1　解：如图.　**说明**：画一些简单的几何体的三个视图，要注意几何体中各个面之间的位置关系.　**思考**：同一个几何体，它的三个视图会不会一样？



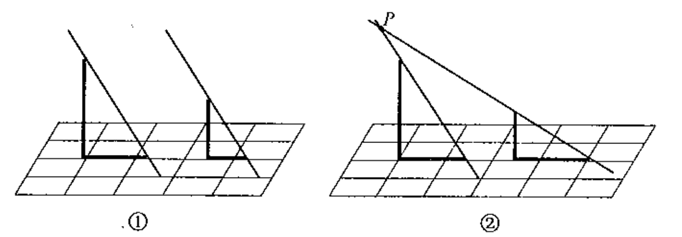
(例 1)

例 2　解：由三视图知该几何体是直立的圆柱体，圆柱体的高为 3 cm，底面圆的直径为 2 cm. $S_{侧}=\pi\times 2\times 3=6\pi(\text{cm}^2)$.　**说明**：求一个几何体的侧面积首先要知道这个几何体的形状和大小，根据三个视图可以确定几何体的形状，根据三视图中标出的数据可以确定几何体的大小.　**思考**：知道一个几何体的三视图，这个几何体的侧面积能确定吗？教学时教师可以将圆柱的三视图改为正三棱柱的三视图让学生思考.

例 3　解：沿着圆柱上的点 A，B 的线段剪开得到一个长方形，点 B_1 与点 B 是圆柱上同一点，连接 AB_1，线段 AB_1 为最短路线.　**说明**：在立体图形上研究两点间的最短距离时，通常将立体图形展开成平面图形，转化为平面上两点间的距离问题.　**思考**：教学中教师可以通过改变点的位置加强训练，也可以通过改变物体形状拓展学生解决问题的方法和策略.



(例 3)

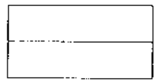


(例 4)

例 4 解:如图,分别作出过竹竿顶端及其影子顶端的直线.图①中,两直线互相平行,因此图①是太阳光下的竹竿及影子;图②中,两直线交于点 P,因此,图②是灯光下的竹竿及影子. **说明**:判断光源是太阳光还是灯光,关键是看光线是平行的还是交于一点.如果光线互相平行,则是太阳光;如果光线交于一点,则是灯光. **思考**:同一天不同时刻,在太阳光下摆弄小棒和纸片,你会发现小棒和纸片在不同时刻、不同摆放方式下有什么不一样?

复习练习

1.(1)四棱柱 (2)② (3)答案不唯一,例如正方体 (4)4 (5)72 2.(1)C (2)A (3)C (4)D (5)B (6)D 3.(1)图略 (2)7.5 m 4.三棱柱的俯视图如图:



俯视图

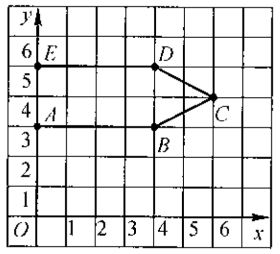
5.(1)圆锥 (2)表面积 $S=16\pi(\text{cm}^2)$ (3)将圆锥侧面展开,线段 BD 为所求的最短路程,可得 $BD=3\sqrt{3}$.

第六章 图形与坐标

6.1 图形与坐标

例 1 解:点 A 的位置是北偏东 30°,距离 O 点 1 单位; 点 B 的位置是北偏东 60°,距离 O 点 1 个单位;点 C 的位置是正北方向,距离 O 点 4 个单位; 点 D 的位置是北偏西 60°,距离 O 点 3 个单位. 因此,目标 C 到探测点的距离最远. **说明**:根据图示,可采用方位角与距离描述目标的位置. **思考**:本题是生活中描述位置的一种方式,教学中还可介绍描述位置的常见方法,如极坐标、平面直角坐标等.

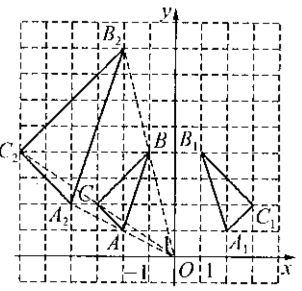
例 2 解:(1)如图所示建立的直角坐标系,描出上述各点,顺次连接得右图.这个图形的命名有很多,如"飞驰的火箭"等.(2)结论:① $DE \parallel AB$,且 $DE=AB$;②四边形 $ABDE$ 是平行四边形;③如果两点的纵坐标相等,那么这两点的连线平行于 x 轴. **说明**:解决本题应先画出平面直角坐标系,然后根据点的坐标逐一描点,再按要求将它们顺次连接起来,就得到要画的图形.在连线的过程中应遵循顺次的要求,防止部分学生会在具体操作中忽略. **思考**:本题的结论具有一定的开放性,教学中可将坐标和图形位置联系起来,让学生总结特殊图形位置和坐标特征的关系.



(例 2)

例3 解:本题答案不唯一,如果设点 P 的坐标是 $P(x, y)$,则 $x<0$, $y<0$,那么根据题意可得一个关于 x、y 的二元一次方程 $x+y=-5$,即 $y=-5-x$,赋予 x 一个值,就可以得到相应的一组 x 和 y 值,也就知道点 P 的一个坐标,如 $P(-1, -4)$、$P(-2, -3)$等都可以. **说明**:分析本题时,应帮助学生小结四个象限坐标的特征,学会用方程或函数的思想解决问题. **思考**:在本题的条件不变的情况下,过点 P 分别向 x 轴、y 轴作垂线,垂足分别为 A、B,求矩形 $OAPB$ 的周长.

例 4 解:(1)如图所示:$\triangle A_1B_1C_1$,即为所求,C_1 点坐标为:(3,2);(2)如图所示:$\triangle A_2B_2C_2$,即为所求,C_2 点坐标为:(−6,4);(2)如果点 $D(a,b)$在线段 AB 上,经过(2)的变化后 D 的对应点 D_2 的坐标为:$(2a,2b)$.



(例 4)

复习练习

1.(1)答案不唯一,例如(3,0),(0,5) (2)(−3,−4) (3)(−4,3) (4)(2,4),(3,4),(8,4) 2.(1)D (2)D (3)B (4)B 3.(1)由图像可知,点 $A(2,3)$,点 $D(-2,-3)$,点 $B(1,2)$,点 $E(-1,-2)$,点 $C(3,1)$,点 $F(-3,-1)$;对应点的坐标特征为:横坐标、纵坐标都互为相反数. (2)由(1)可知,$a+3+2a=0$,$4-b+2b-3=0$,解得 $a=-1$,$b=-1$. 4.答案不唯一,如果以 BC 所在直线为 x 轴,BC 的垂直平分线为 y 轴,垂直平分线与 BC 的交点为原点建立直角坐标系,那么 $A\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$,$B(-2, 0)$,$C(2, 0)$. 5.(1)图略 (2)图略 (3)$P(2,0)$ 6.(1)$P_4(-4, 0)$ (2)$P_{100}(-2^{50}, 0)$

第七章 抽样与数据分析

7.1 抽样与数据分析(一)

例 1 解:由 $\frac{0+1+2+3+x}{5}=2$ 可得,$x=4$.这组数据的极差为 $4-0=4$, 方差为 $\frac{(0-2)^2+(1-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2+(4-2)^2}{5}=2$. **说明**:极差、方差都是反映数据离散程度的特征数,要准确运用相应的计算公式. **思考**:可从以下两个方面进行变式教学:①若已知一组数据 0,1,2,3,x 的极差是 4,你能求这组数据的方差吗?答案唯一吗?②已知 0、1、2、3、4 的方差是 2,另一组数 0,1,2,3,x 的方差大于 2,你能说出 x 的取值范围吗?

例 2 解:$\bar{x}=\frac{1}{20}\times(4\times1+5\times3+6\times6+7\times5+8\times4+10\times1)=6.6$(千瓦时) 在这 20 户家庭日用电量中,出现次数最多的是 6,因此这组数据的众数是 6(千瓦时);把这 20 户家庭日用电量从小到大排列,中间两个数是 6,7,根据中位数的概念,这组数据的中位数是 6.5(千瓦时). **说明**:平均数、众数、中位数都是反映数据集中程度的统计量,在解题的过程中要关注它们概念和计算方法上的差异. **思考**:可结合本例让学生说说算术平均数和加权平均数的联系.

例 3 解:(1)抽取的 5 个菠萝去皮前的平均质量为:$\frac{1}{5}\times(1.0+1.4+1.4+1.2+1.3)=1.2$(千克);抽取的 5 个菠萝去皮后的平均质量为:$\frac{1}{5}\times(0.6+0.7+0.9+0.8+0.9)=0.78$(千克). 估计这 200 个菠萝去皮前的总质量为:$1.2\times200=240$(千克); 估计这 200 个菠萝去皮后的总质量为:$0.78\times200=156$(千克).(2)设去皮后菠萝的售价应是 x 元/千克.根据题意,得 $240\times2.6=156x$. 解得 $x=4$. 答:去皮后菠萝的售价应是 4 元/千克. **说明**:菠萝削皮销售是生活中常见的实际问题,在运用统计知识解决实际问题时,通常用样本的特征数来估计或反映总体的情况. **思考**:其实生活中这样的例子很多,如毛豆等蔬菜的去皮销售,你可以运用所学的统计知识解决类似的问题.

例 4 解:甲的平均数是 7,乙的平均数是 7;甲的中位数是 7,乙的中位数是 7.5;甲的极差是 4,乙的极差是 8;甲的方差是 1.2,乙的方差是 5.4;甲命中 8 环以上的次数是 1 次,乙命中 8 环以上的次数是 3 次. ① 数据的集中程度:从平均数看,平均数一样,说明甲、乙两人的打靶成绩整体实力相当;从中位数看,甲的中位数略低于乙,说明乙的打靶成绩略好于甲.② 数据的离散程度:从极差看,甲的极差低于乙的极差,说明甲的成绩较为稳定;从方差看,甲的方差低于乙的方差,说明甲的成绩较为稳定.③ 数据的分布情况:从命中 8 环以上的次数看,甲的次数低于乙的次数,说明乙的成绩更有潜力. **说明**:数据的集中程度、数据的离散程度、数据的分布情况是数据分析的三个重要方面. **思考**:在课本的相关例题中,关于数据的分布情况有哪些不同的陈述方式?

复习练习

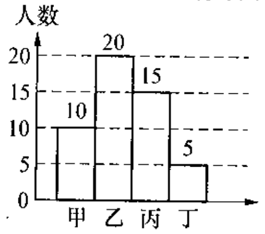
1.(1)12 (2)2 (3)5 (4)3 2 3 (5)> 2.(1)B (2)C (3)B (4)A (5)B 3.(1)25 人 (2)1 500 人 4.(1)甲成绩的中位数是 90 分,乙成绩的中位数是 93 分. (2)甲的成绩 $90\times0.3+93\times0.3+89\times0.2+90\times0.2=90.7$ 分,乙的成绩 $94\times0.3+92\times0.3+94\times0.2+86\times0.2=91.8$ 分.
5.(1)初三毕业班学生一分钟跳绳次数的全体 100 (2)39 0.39 (3)93% (4)第 3 小组 6.(1)甲班的优秀率是 60%(或 0.6);乙班的优秀率是 40%(或 0.4).(2)甲班 5 名学生比赛成绩的中位数是 100 个,乙班 5 名学生的比赛成绩的中位数是 97 个.(3)估计甲班 5 名学生比赛成绩的方差小.(4)将冠军奖状发给甲班,因为甲班 5 人比赛成绩的优秀率比乙班高、中位数比乙班大、方差比乙班小,综合评定甲班比较好.
7.(1)甲组:中位数 7 乙组:平均数 7 中位数 7 (2)(答案不唯一)① 因为乙组学生的平均分高于甲组学生的平均分,所以乙组学生的成绩好于甲组; ② 因为甲乙两组学生成绩的平均分相差不大,而乙组学生的方差低于甲组学生的方差,说明乙组学生成绩的波动性比甲组小,所以乙组学生的成绩好于甲组; ③ 因为乙组学生成绩的最低分高于甲组学生的最低分,所以乙组学生的成绩好于甲组.

7.2 抽样与数据分析(二)

例1 解:(1) 略 (2) ① (3) 不一定. 理由如下:若训练前各段成绩取最大值,则总成绩为 $20\times6+23\times8+26\times9+29\times8+30\times5=920$;若训练后各段成绩取最小值,则总成绩为 $18\times2+21\times8+24\times10+27\times9+30\times7=897$. 因训练前后参与测试的人数不变,训练后成绩的平均数可能小于训练前成绩的平均数. **说明**:本题以统计表、条形统计图作为信息的呈现方式,综合图表提供的信息,从而得到问题的答案. 从中准确获取有用的信息是学生应掌握的基本技能. **思考**:可以从以下几个方面进行变式教学:一是可以把条形统计图转化为扇形统计图,同时复习三种统计图的特点,二是思考表图中数据的"配合"问题,减少或增加或改变图中的哪些数据可以仍然完成本题,从而让学生真正理解如何从统计图中获取信息.

例2 解:(1) 从统计图知报名参加 3 个兴趣小组(丙)的有 15 人,占总数的 30%,则总人数有 $15\div30\%=50$(人). 所以报名参加 4 个兴趣小组(丁)的有 $50-10-20-15=5$(人). (2) 报名参加 2 个兴趣小组的有 $400\times(20\div50)=160$(人). (3) 如:由于报名参加 2 个和 3 个兴趣小组人数多,各兴趣小组活动的时间要安排好. **说明**:本题具有实际的生活意义,利用统计图表中的相关数据结合统计量进行分析,有助于理性地提出一些合理化的建议. **思考**:你校也开展了类似的校本课程吗?请到教务处去调查相关的数据,绘制统计图表,并结合统计量给学校活动安排提出一些合理化的建议.

报1~4个兴趣小组人数的条形统计图



(例2)

例3 解:(1) 依次填 6, 7, 8 (2) 答案不唯一,如选甲运动员参赛,参赛理由:①从平均数看两人成绩一样;②从方差看,甲的方差小于乙的方差,甲的成绩比乙稳定. 如选乙运动员参赛,参赛理由:①从众数看,乙比甲的成绩好;②从比赛状态和发展趋势看,乙越打越好,乙比甲的潜能更大. **说明**:选拔运动员参加比赛,因素较多. 可以比较平均数、众数、中位数、极差、方差等统计量,了解运动员成绩的分布情况和稳定性. **思考**:可从甲运动员再打一环,平均数、众数、方差的变化情况来进行变式教学.

例4 解:(1) 训练后第一组平均成绩比训练前增长的百分数是 $\frac{5-3}{3}\times100\%\approx67\%$ (2) 不同意小明的观点,因为第二组的平均成绩增加 $8\times10\%+6\times20\%+5\times20\%+0\times50\%=3$(个) (3) 本题答案不唯一,我认为第一组训练效果最好,因为训练后第一组平均成绩比训练前增长的百分数最大. **说明**:本题以复式条形统计图和扇形统计图作为数据的呈现形式,以简单计算、辨析及半开放性问题组合作为问题呈现,学生应充分理解统计图中反映出的信息. **思考**:每一个组都认为本组的训练效果最好,你能提出解释来支持他们的观点吗?

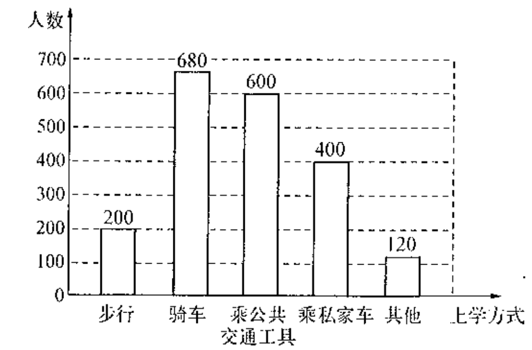
复习练习

1. (1) 32 5 (2) 9.95 元 10 元 10 元 (3) ① 一 ② 一 ③ 20~39 40~59 2. (1) B (2) B (3) D 3. (1) 略 (2) 60~79 (3) 33 4. (1) 该校九年级学生本次数学测试成绩的平均数为 $80\times60\%+82.5\times40\%=81$(分). (2) D 5. (1) 光明中学绿化面积为:$500\times15=7\,500$ 平方米,新华中学绿化面积为:$7\,500\times\frac{2}{3}=5\,000$ 平方米 (2) 光明中学人均绿化面积为:$7\,500\div2\,500=3.0$ 平方米/人,新华中学人均绿化面积为:$5\,000\div1\,800=\frac{25}{9}$ 平方米/人 6. (1)

	平均数	方差	中位数	命中8环以上次数
甲	7	1.2	7	1
乙	7	5.4	7.5	3

(2) 如:因为甲、乙两人的平均数相等,而甲的方差小于乙的方差,所以甲的成绩较为稳定. 因此教练选择甲参加射击比赛. (3) 如:从命中 8 环以上的次数看,乙有较大的优势;或从命中环数看,乙呈上升趋势. 7. (1) 3 次孵化出的小鸡总数为 120,平均孵化率为 80%. (2) 2 500 个 8. (1) 不合理. 因为如果 150 名学生全部在同一个年级抽取,那么全校每个学生被抽到的机会不相等,样本不具有代表性. (2) 绘制条形统计图如下:

某校 2 000 名学生上学方式条形统计图



(第8(2)题)

(3) 本题答案不唯一,下列答案供参考:乘私家车上学的学生约 400 人,建议学校与交通部门协商安排停车区域.

第八章 事件的概率

8.1 事件的概率(一)

例1 解:本题考查概率的意义,让学生了解"通过大量重复试验事件的频率估计概率"与"等可能条件下的概率"的内在联系与区别. 本题选 D. **思考**:对于本例中 A、C 选项中的"明天降雨的概率是 80%"、"彩票中奖的概率为 1%",应该如何理解?

例2 解:P(能构成正方体的表面展开图) $=\frac{4}{7}$,故填 $\frac{4}{7}$. **说明**:本例考查了简单事件(几何概型)发生的概率,其中包含了对正方体的展开方式的理解. **思考**:如果该图中只有中间一排四个阴影部分的小正方形,现从其余的小正方形中任取两个涂上阴影,能构成这个正方体的表面展开图的概率是多少?

例3 解:P(抽到男同学名字) $=\frac{22}{42}=\frac{11}{21}$,$P$(抽到女同学名字) $=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$,所以抽到男同学名字的概率大. **说明**:本例考查了简单事件发生的概率,题目虽不难,但要正确判断该事件发生的等可能结果. **思考**:如何更改条件(或规则),可使抽到女同学名字的概率大?

例4 解:这个"免费"摸球活动对顾客不合算. 因为,每摸一次球的平均收益是 $30\times\frac{1}{12}+10\times\frac{2}{12}-20\times\frac{4}{12}+5\times\frac{5}{12}=-\frac{5}{12}$(元). **说明**:本例考查了用概率知识解决实际问题,体现了数学学习的价值,解决问题的关键是对"平均收益"的理解. **思考**:适当修改表中"顾客的收益",使得参加这个"免费"摸球活动不吃亏.

复习练习

1. (1) 略 (2) $\frac{1}{300}$ (3) 560 元,360 元,350 元,356 元 $\frac{1}{4}$ 2. (1) C (2) A (3) A (4) C 3. 略 4. (1) P(掷得的数"7") $=\frac{1}{8}$ (2) P(掷得的数不是"7") $=\frac{7}{8}$ (3) P(掷得的数小于或等于"6") $=\frac{3}{4}$ 5. (1) 因为袋中装有 5 个黄球、13 个黑球和 22 个红球,共 40 个球,所以从袋中摸出一个球是黄球的概率为 $\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$. (2) 设从袋中取出了 x 个黑球,则袋中总球数不变,黄球为 $(5+x)$ 个,根据题意,得 $\frac{5+x}{40}\geqslant\frac{1}{3}$,解得 $x\geqslant\frac{25}{3}$. 由于 x 的最小整数解是 9,所以从袋中摸出一个球是黄球的概率不小于 $\frac{1}{3}$,至少取出了 9 个黑球. 6. (1) $\frac{1}{4}$ (2) 略 7. (1) 0.6 (2) 摸到白球的概率是 0.6,摸到黑球的概率是 0.4.

8.2 事件的概率(二)

例1 解:(1) P(奇数) $=\frac{2}{3}$ (2) 能组成两位数有 12、13、21、23、31、32. 恰好是 32 的概率是 $\frac{1}{6}$.

说明：本例考查了用概率知识解决简单问题的水平.解题的关键是能够不重复也不遗漏地列出所有等可能的结果. 思考：试解决第(2)问的变式：随机抽取一张作为十位上的数字(放回)，再抽取一张作为个位上的数字，能组成哪些两位数？恰好是32的概率是多少？

例2 解：所有可能出现的结果如下：

甲组	乙组	结果
AB	CD	(AB, CD)
AC	BD	(AC, BD)
AD	BC	(AD, BC)
BC	AD	(BC, AD)
BD	AC	(BD, AC)
CD	AB	(CD, AB)

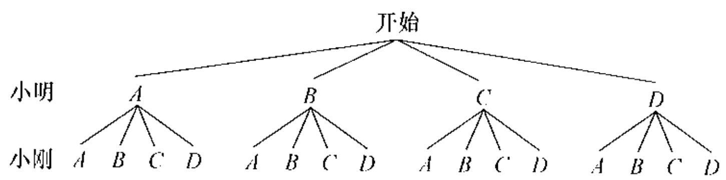
总共有6种结果，每种结果出现的可能性相同. (1)所有结果中，满足A在甲组的有3种，所以A在甲组的概率是$\frac{1}{2}$.(2)所有结果中，满足A，B都在甲组的有1种，所以A，B都在甲组的概率是$\frac{1}{6}$. 说明：本例考查了用列举法计算简单随机事件发生的概率，能够不重复也不遗漏地列出所有等可能的结果是问题解决的关键. 思考：你能用树状图或表格列举出所有等可能的结果吗？和本题解法相比，你觉得哪一种方法更简便？

例3 解：(1)① 搅匀后从中任意摸出1个球，所有可能出现的结果有4种，即：红、黄、蓝、白，它们出现的可能性相同.所有的结果中，满足"恰好是红球"(记为事件A)的结果只有1种，所以$P(A)=\frac{1}{4}$.② 列表如下：

	红	黄	蓝	绿
红	(红,红)	(黄,红)	(蓝,红)	(绿,红)
黄	(红,黄)	(黄,黄)	(蓝,黄)	(绿,黄)
蓝	(红,蓝)	(黄,蓝)	(蓝,蓝)	(绿,蓝)
绿	(红,绿)	(黄,绿)	(蓝,绿)	(绿,绿)

所有等可能的结果有16种，其中两次都为红球的结果(记为事件B)有1种，所以$P(B)=\frac{1}{16}$ (2)B 说明：本例考查了用列举法计算简单随机事件发生的概率，设计逐步渐进，3个层次的设计充分体现了概率模型的推广. 思考：你能讲清楚题中3个事件概率的联系吗？

例4 解：(1)4 (2)用A、B、C、D代表四种选择方案. [解法一] 用树状图分析如下. [解法二] 用列表法分析如下.

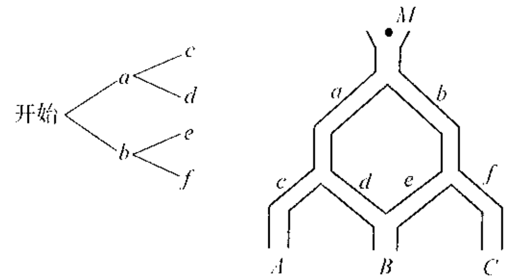


小刚 / 小明	A	B	C	D
A	(A, A)	(A, B)	(A, C)	(A, D)
B	(B, A)	(B, B)	(B, C)	(B, D)
C	(C, A)	(C, B)	(C, C)	(C, D)
D	(D, A)	(D, B)	(D, C)	(D, D)

从上可知，小明与小刚选择方案的等可能情况共16种，小明与小刚选择同种方案的情况有4种，∴ P(小明与小刚选择同种方案)$=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$. 说明：本例考查了用画树状图或列表法求解实际生活中事件的概率. 另外，本题也可一一列举：①50米跑，立定跳远，坐位体前屈；②50米跑，立定跳远，1分钟跳绳；③50米跑，实心球，坐位体前屈；④50米跑，实心球，1分钟跳绳. 思考：本题可从两个方面进行拓展：①若将条件改为在立定跳远、实心球、坐位体前屈、1分钟跳绳四个项目中任选两项，结果还一样吗？②若按照现场抽签来决定考试测试项目，请你为考试委员会设计一个抽签活动方案.

复习练习

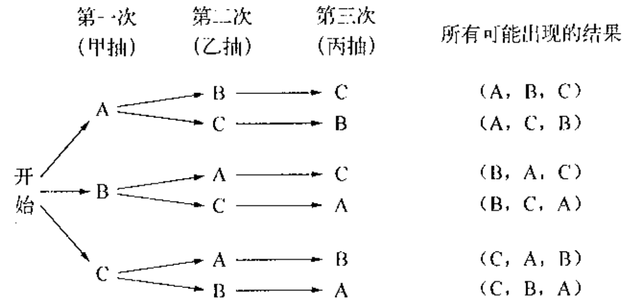
1. C 2. C 3. 不公平. 因为抛掷两枚硬币，所有机会均等的结果为：正正，正反，反正，反反. 所以出现两个正面的概率为$\frac{1}{4}$，出现一正一反的概率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. 因为二者概率不等，所以游戏不公平 4. (1)抽取1名，恰好是女生的概率是$\frac{2}{5}$.(2)分别用男1、男2、男3、女1、女2表示这五位同学，从中任意抽取2名，所有可能出现的结果有：(男1,男2),(男1,男3),(男1,女1),(男1,女2),(男2,男3),(男2,女1),(男2,女2),(男3,女1),(男3,女1),(女1,女2)共10种，它们出现的可能性相同，所有结果中，满足抽取2名，恰好是1名男生和1名女生(记为事件A)的结果共6种，所以$P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ 5. (1)如图，可画树状图：由下图可以看出，可能出现的结果有(a,c),(a,d),(b,e),(b,f)4种，它们出现的可能性相同. 所有的结果中，满足小球落到A的结果只有一种，即(a,c)，所以P(小球落到A)$=\frac{1}{4}$. (2)一,四



(第5(1)题)

6. (1)随机选择一天，天气预报可能出现的结果有7种，即7月1日晴、7月2日晴、7月3日雨、7月4日阴、7月5日晴、7月6日晴、7月7日阴，并且它们出现的可能性相等. 恰好天气预报是晴(记为事件A)的结果有4种，即7月1日晴、7月2日晴、7月5日晴、7月6日晴，所以$P(A)=\frac{4}{7}$. (2)随机选择连续的两天，天气预报可能出现的结果有6种，即(7月1日晴，7月2日晴)、(7月2日晴，7月3日雨)、(7月3日雨，7月4日阴)、(7月4日阴，7月5日晴)、(7月5日晴，7月6日晴)、(7月6日晴，7月7日阴)，并且它们出现的可能性相等. 恰好天气预报都是晴(记为事件B)的结果有2种，即(7月1日晴，7月2日晴)、(7月5日晴，7月6日晴)，所以$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

7. 小莉的说法不正确. 假设这3位同学抽签的顺序依次为：甲第一、乙第二、丙第三. 用树状图列出所有可能出现的结果：



从上图可以看出，甲、乙、丙依次抽签，一共有6种可能的结果，它们是等可能的. 甲中签的结果有2种，P(甲中签)$=\frac{1}{3}$；乙中签的结果有2种，P(乙中签)$=\frac{1}{3}$；丙中签的结果有2种，P(丙中签)$=\frac{1}{3}$. 因此先抽的人与后抽的人中签的概率相同.

第九章　综合与实践

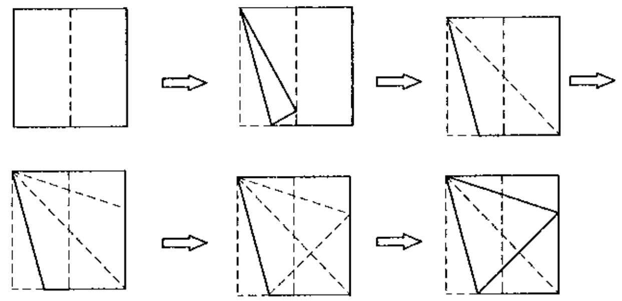
一、**思考**：因为太阳光是平行光线，所以$\angle BCA=\angle EFD$. 又$\because \angle BAC=\angle EDF$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DEF$. $\therefore \frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$，即$\frac{80}{DE}=\frac{60}{900}$. $\therefore DF=1\,200$. 所以，学校旗杆的高度是12米.　**探索**：同上可得：$\frac{AB}{GN}=\frac{AC}{GH}$，即$\frac{80}{GN}=\frac{60}{156}$. $\therefore GN=208$. 在$\mathrm{Rt}\triangle NGH$中，根据勾股定理得：$NH^2=156^2+208^2=260^2$. $\therefore NH=260$. 设$\odot O$的半径为r cm，连接OM，$\because NH$切$\odot O$于M，$\because OM\perp NH$，则$\angle OMN=\angle HGN=90°$，又$\angle N$为公共角，$\therefore \triangle OMN\backsim\triangle HGN$. $\therefore \frac{OM}{HG}=\frac{ON}{HN}$. 又$ON=OK+KN=OK+(GN-GK)=r+8$，$\therefore \frac{r}{156}=\frac{r+8}{260}$. 解得$r=12$. 所以，景灯的半径是12厘米.

二、**问题1**：全等四边形的对应边相等，对应角相等，对应对角线相等. **问题2**：①两个四边形全等至少要5组条件(可以从四边形的稳定性入手). ②两个四边形全等的判定方法较多，如下仅供参考：方法一：有四条边和一个角对应相等的两个四边形全等. 方法二：有三条边和这三条边中每一组邻边的夹角对应相等的两个四边形全等. 方法三：有一组邻边和三个角对应相等的两个四边形全等……若加入对角线考虑，方法更多，请自行探索.

三、**思考**：设折叠进去的宽度为x cm. 根据题意，得$(18.5\times2+1+2x)(26+2x)=1\,260$. 解这个方程，得$x_1=2$，$x_2=-34$(不合题意，舍去). 答：折叠进去的宽度为2 cm. 拓展：[解法一]　分2种情况：①当字典的长与矩形纸的宽方向一致时，要包好这本字典，所需矩形纸的宽为$19+3\times2=25<26$，长为$16\times2+3\times2+6=44>41$. 所以，不能包好这本字典.　②当字典的长与矩形纸的长方向一致时，同上可得$44>26$. 所以，不能包好这本字典. 综上，所给矩形纸不能包好这本字典.　[解法二]　设折叠进去的宽度为x cm. 分2种情况：①当字典的长与矩形纸的宽方向一致时，根据题意，得$\begin{cases}19+2x\leqslant 26,\\16\times2+6+2x\leqslant 41.\end{cases}$ 解得$x\leqslant 1.5$. 所以，不能包好这本字典.　②当字典的长与矩形纸的长方向一致时，同上可得$x\leqslant -6$. 所以，不能包好这本字典. 综上，所给矩形纸不能包好这本字典.

四、(1) 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半. (2) $\because MN$是矩形$ABCD$的折痕，$\therefore MN\parallel DC$，$M$是$AD$的中点. $\therefore \triangle AMP\backsim\triangle ADQ$，$\frac{AM}{AD}=\frac{1}{2}$. $\therefore \frac{AP}{AQ}=\frac{AM}{AD}=\frac{1}{2}$，即$P$是$AQ$的中点. $\because$点D叠在折痕MN上的D'处，$\therefore \angle ADQ=\angle AD'Q=90°$，$\angle PQD=\angle PQD'$. ①　$\because$点P是AQ的中点，$\therefore PD'=PQ=\frac{1}{2}AQ$(直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半). $\therefore \angle PQD'=\angle PD'Q$. ②　$\because MN\parallel DC$，$\therefore \angle QPD'=\angle DQP$. ③　由①②③得，$\angle PD'Q=\angle PQD'=\angle QPD'$，故$\triangle PD'Q$是等边三角形. (3) ①能折

边长等于正方形边长的等边三角形(图略). ②能折出一个面积最大的等边三角形(如下图).



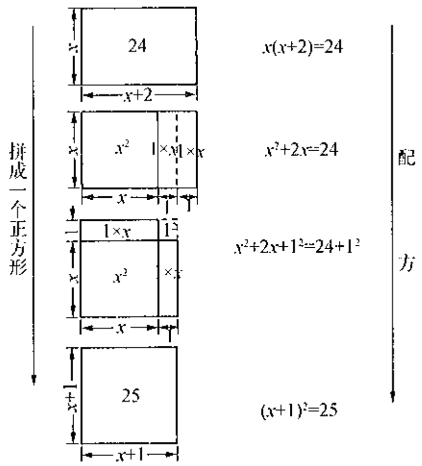
五、略

六、略

第十章　专题复习

专题一　常见的数学思想方法

例1　如图：



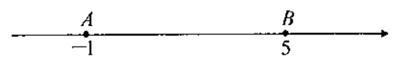
(例1)

说明：用图形直观表示配方求解过程，充分体现了数形结合的思想方法，教学时要让学生理解配方法的每一个步骤，并用图形直观表示对应性，要讲清楚每个图的理由.

例2　**解**：若$AB=a$. 设$AC=x$，则$BC=a-x$. $\because$点C是线段AB的黄金分割点($AC>BC$)，$\therefore \frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}$. 即$\frac{a-x}{x}=\frac{x}{a}$. 整理，得$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}a<0$(舍去)，$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$. $\therefore AC=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$. $\therefore$黄金比为：$\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{AB}=\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}a}{a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx 0.618$　**说明**：黄金分割点概念是依托于图形呈现的，而黄金比是通过数的计算得来的，充分体现了数形结合的思想方法，教学时要让学生理解比例线段是得到方程的一种有效手段.

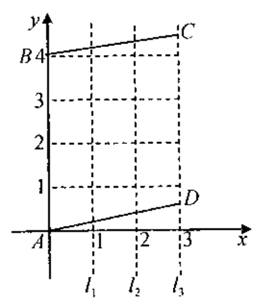
例3　**解**：(1) $y=\frac{9}{x}(x>0)$.　(2) $S=\pi(x^2+y^2)=\pi\left[x^2+\left(\frac{9}{x}\right)^2\right]\geqslant 18\pi$. 当且仅当$x=\frac{9}{x}$，即$x=3$，$S_{最小值}=8\pi$. 此时，$y=\frac{9}{x}=3$，所以当点$A$的坐标为(3, 3)时，矩形的外接圆面积$S$最小，$S$的最小值为$18\pi$.　**说明**：函数与图像，图形与坐标均是数形结合的代表，本例正是通过这一载体体现了数与形之间的和谐转换，教学时让学生明白配方法是解决图形面积最值的一种有效方法.

例4　**解**：①当点C在点A的左边时，$AC<BC$.　②当点C在点A、B之间时，有$x+1\geqslant 3(5-x)$，得$x\geqslant 3.5$.　③当点C在点B的右边时，有$x+1\geqslant 3(x-5)$，得$x\leqslant 8$. 综上所述：x的取值范围是$3.5\leqslant x\leqslant 8$.　**说明**：数轴是数形结合的典型，以数轴为载体，数轴上点的位置有多种分类方法，教学时让充分感受分为三类的必要性. 同时根据数轴上已有两点，第三个点位置有三种位置，这是分类的依据.



(例4)

例5　**解**：分为三种情况：①当AD经过l_1上整点，也经过l_2上的整点时，其中l_1、l_2上满足条件的整点各有3个，此时$N(t)=6$.　②当AD不经过l_1上整点，但经过l_2上的整点时，其中l_1、l_2上满足条件的整点分别有4个、3个，此时$N(t)=7$.　③当AD不经过l_1上整点，也不经过l_2上的整点时，其中l_1、l_2上满足条件的整点各有4个，此时$N(t)=8$. 综上所述$N(t)=6,7,8$.　**说明**：本题分类的必要性学生不易发现，同时如何分类是教学中的一个难点，要根据不同的情形让学生充分感受和



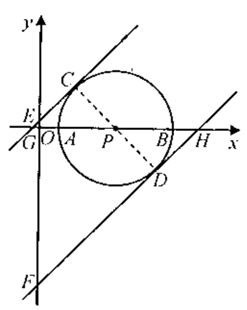
(例5)

讨论分类的标准.

例6 解:(1) 作线段 AC 的垂直平分线 BD. (2) 小明的方法不正确. 若直线 CD 平分 $\triangle ABC$ 的面积,则 $BD=AD=5$. ∴ $AD+AC=17$, $BD+BC=15$. ∴ 小明的方法不正确. (3) ① 若直线经过顶点,则 AC 边上的垂直平分线即为所求. ② 若直线不过顶点,可分以下三种情况:(a) 直线与 BC、AC 分别交于 E、F. 过点 E 作 $EH\perp AC$ 于点 H. 过点 B 作 $BG\perp AC$ 于点 G. ∴ $BG=8$, $AG=CG=6$. 设 $CF=x$,则 $CE=16-x$. ∵ $\triangle CEH\backsim\triangle CBG$, ∴ $EH=\frac{4}{5}(16-x)$. ∴ $\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{4}{5}(16-x)=24$. ∴ $x_1=6$(舍), $x_2=10$. ∴ $CF=10$, $CE=6$,直线 EF 即为所求直线. (b) 直线与 AB、AC 分别交于 M、N. 由(a)可得, $AM=6$, $AN=10$,直线 MN 即为所求直线. (c) 直线与 AB、BC 分别交于 P、Q. 过点 A 作 $AY\perp BC$ 于点 Y,过点 P 作 $PX\perp BC$ 于点 X. $AY=\frac{48}{5}$. 设 $BP=x$,则 $BQ=16-x$, $PX=\frac{24}{25}x$. ∴ $\frac{1}{2}\cdot\frac{24}{25}x\cdot(16-x)=24$. ∴ $x_1=8+\sqrt{14}>10$(舍去), $x_2=8-\sqrt{14}$, $16-x=8+\sqrt{14}>10$(舍去). ∴ 此种情况不存在. 综上所述,符合条件的直线共有三条. **说明**:本题是以分类为重点考查的综合性问题,教学时应让学生明白,一级分类是过顶点与不过顶点两类;二级分类是过顶点可分为过点 B 与过点 A(或 C)两类,不过顶点可分为经过 BA、BC 或经过 BA(或 BC)、AC.

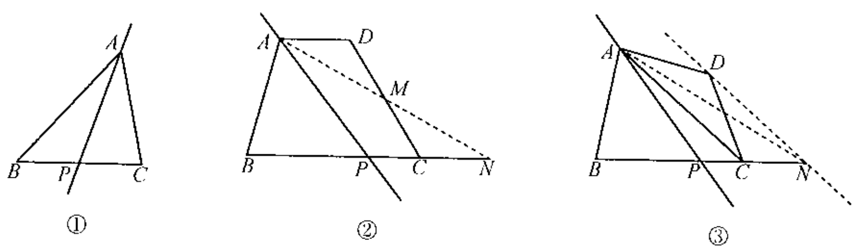
例7 解: $x(x^2-4)=0$, $x(x+2)(x-2)=0$. $x=0$,或 $x+2=0$,或 $x-2=0$. ∴ $x_1=0$, $x_2=-2$, $x_3=2$ **说明**:解方程的过程就是一个转化的过程,高次化为低次,分式、根式方程转化为整式方程,最终都是化归为解一元一次方程来解决,本题通过因式分解把三次方程转化为三个一次方程来求解,教学时要引导学生转化的合理性和途径.

例8 解:如图,以 AB 为直径作圆,圆心是 P,半径为 3. 设直线 l 与 $\odot P$ 的切点为点 C、D. 在 $Rt\triangle PCG$ 中, $\angle PCG=90°$, $\angle PGC=45°$. ∴ $CG=CP=3$. ∴ $PG=3\sqrt{2}$. ∴ $OG=3\sqrt{2}-4$. 在 $Rt\triangle EOG$ 中, $\angle EOG=90°$, $\angle EGO=45°$. ∴ $OE=OG=3\sqrt{2}-4$. ∴ $b_1=3\sqrt{2}-4$. 同理: $b_2=-3\sqrt{2}-4$. 当直线 l 经过点 A 时, $b=-1$;当直线 l 经过点 B 时, $b=-7$. ∴ 当 $b>3\sqrt{2}-4$ 或 $b<-3\sqrt{2}-4$ 时,在直线 l 上不存在点 M,使 $\angle AMB=90°$;当 $b=3\sqrt{2}-4$、-1、-7 或 $-3\sqrt{2}-4$ 时,在直线 l 上存在一点 M,使 $\angle AMB=90°$;当 $-3\sqrt{2}-4<b<-7$、$-7<b<-1$ 或 $-1<b<3\sqrt{2}-4$ 时,在直线 l 上存在二点 M,使 $\angle AMB=90°$. **说明**:本题探讨"是否存在点 M,使 $\angle AMB=90°$"的问题,本题有两种解决方法:一是假设点 M 的坐标,求出 MA、MB、AB 的长度,利用勾股定理的逆定理来求解,但这种方法涉及二次不等式的解法,超出课标内容. 二是上述解法. 通过作以 AB 为直径的 $\odot P$,转化为直线与 $\odot P$ 的交点问题,其化归和转化的合理性在于直径所对的圆周角是直角这一核心知识.



(例8)

例9 解:(1) 如图①,取 BC 的中点 P,作直线 AP,把 $\triangle ABC$ 的面积等分. (2) 如图②,取 CD 的中点 M,延长 AM 与 BC 的延长线交于点 N,取 BN 的中点 P,直线 AP,把梯形 $ABCD$ 的面积等分. (3) 如图③,连接 AC,过点 D 作 AC 的平行线与 BC 的延长线交于点 N,连接 AN,取 BN 的中点 P,直线 AP,把四边形 $ABCD$ 的面积等分.

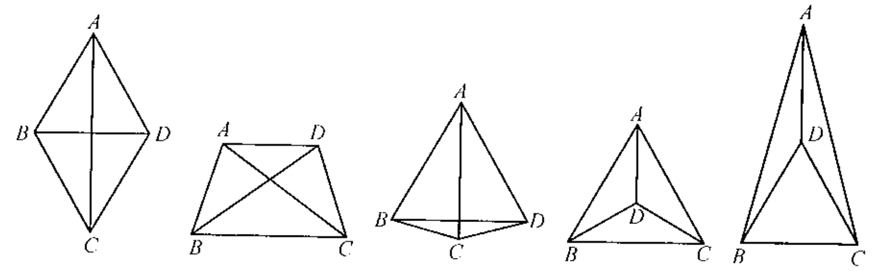


(例9)

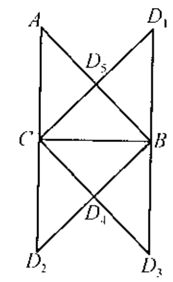
说明:三角形的中线把三角形的面积等分是学生已有的知识与技能,本例通过把梯形、四边形化归的转化为三角形来求解,其中梯形转化为三角形是学生应具备的经验,四边形转化为三角形是知识、经验、方法的迁移与拓展,教学中要引导学生一步步结合问题进行转化.

复习练习

1. B 2. >(提示:转化为正六边形和圆) 3. $2\leqslant AD<3$(提示:当 $DE\perp BC$ 时, AD 取最小值为 2,当 D 为 AC 垂直平分线与 AB 的交点时, AD 取最大值为 3) 4. 当 $a>1$ 时, $a>\frac{1}{a}$;当 $a=1$ 时, $a=\frac{1}{a}$;当 $0<a<1$ 时, $a<\frac{1}{a}$;当 $-1<a<0$ 时, $a>\frac{1}{a}$;当 $a=-1$ 时, $a=\frac{1}{a}$;当 $a<-1$ 时, $a<\frac{1}{a}$ 5. 如图,存在这些图形:① 一顶角为 60°的菱形:有 $AB=BC=CD=DA=BD$、AC;② 内角为 72°且上底等于腰的等腰梯形:有 $AB=AD=CD$、$BC=BD=AC$;③ 一个正三角形十顶角 150°的等腰三角形构成的四边形(等腰三角形的底为正三角形的边):有 $AB=AC=AD=BD$, $BC=CD$;④ 一个等边三角形十内部一点,使得该点到三个顶点的距离均等于底边:有 $AB=BC=CA$, $DA=DB=DC$;⑤ 顶点为 30°的等腰三角形十内部一点:有 $AB=AC$, $DA=DB=DC=BC$.



(第5题)



(第6题)

6. (1) 如图,共有 5 种情况. (2) 鼓励学生多提出问题,让学生从数学的思想方法角度来思考问题与解答,具体略.

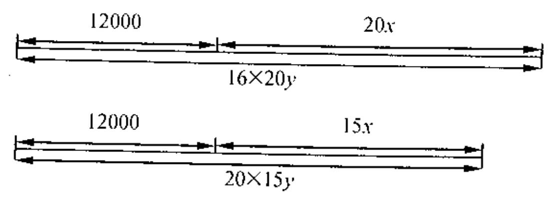
专题二 方程与函数

例1 解:(1) 方程两边平方,得 $x+1=(-x)^2$. 解这个方程,得 $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 经检验, $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 不满足原方程,舍去. ∴ $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 是原方程的解. (2) 渗透了转化的数学思想方法,要注意验根,防止产生增根. **说明**:这个方程的左边含有根号,将方程两边同时平方,可以得到一元二次方程 $x+1=(-x)^2$. 解这个方程,得 $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 和解分式方程一样,这里需要判断所求得两个解是否是原方程的解. 观察原方程,可以发现 $x+1\geqslant0$, $-x\geqslant0$,所以 $-1\leqslant x\leqslant0$. ∵ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$, $-1<\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$,所以 $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 是原方程的解. 产生增根的原因是方程两边平方后,扩大了未知数的范围,这种变形不是同解变形,即 $x+1=(-x)^2$ 与 $\sqrt{x+1}=-x$ 或 $\sqrt{x+1}=x$ 等价.

例2 解:(1) 设年降水量为 x 万立方米,每人每年平均用水量为 y 立方米,由题意,列表得:

人数(万人)	年数(年)	原有水量(万立方米)	增加水量(万立方米)	实际用水量(万立方米)
16	20	12 000	$20x$	$16\times20y$
20	15	12 000	$15x$	$20\times15y$

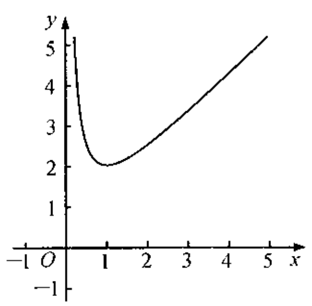
或画线形示意图:



(例2)

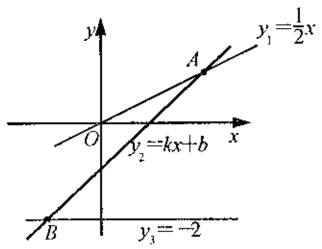
根据题意，得$\begin{cases}12\,000+20x=16\times 20y,\\ 12\,000+15x=20\times 15y.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=200,\\ y=50.\end{cases}$答：年降水量为 200 万立方米，每人年平均用水量为 50 立方米.（2）设该城镇居民年平均用水量为 z 立方米才能实现目标，由题意，得 $12\,000+25\times 200=20\times 25z$，解得 $z=34$. 则 $50-34=16$（立方米）. 答：该城镇居民人均每年需要节约 16 立方米的水才能实现目标.
说明：本题借助表格或线性示意图，可以将问题中的人数、年数、原有水量、增加水量和实际用水量有条理地表示出来，并从中发现等量关系，即实际用水量的两种表示形式是相等的，从而比较直观、简洁地建立方程，感受利用表格、线性示意图建立模型的优越性.

例3 **解**：（1）设小货车原计划每辆每次运送帐篷 x 顶，则大货车原计划每辆每次运送帐篷 $(x+200)$ 顶，根据题意，得 $2[8x+2(x+200)]=16\,800$，解得 $x=800$. 所以 $x+200=800+200=1\,000$. 答：大、小货车原计划每辆每次分别运送帐篷 1 000 顶、800 顶.（2）根据题意，得 $2(1\,000-200m)\left(1+\frac{1}{2}m\right)+8(800-300)(1+m)=14\,400$. 化简为 $m^2-23m+42=0$，解得 $m_1=2$，$m_2=21$. ∵ $1\,000-200m$ 不能为负数，且 $\frac{1}{2}m$ 为整数，∴ $m_2=21$（不符合实际，舍去）. 故 m 的值为 2.　**说明**：本题的第（2）问需要检验方程解的合理性，将不符合实际意义的解舍去.



（例 4）

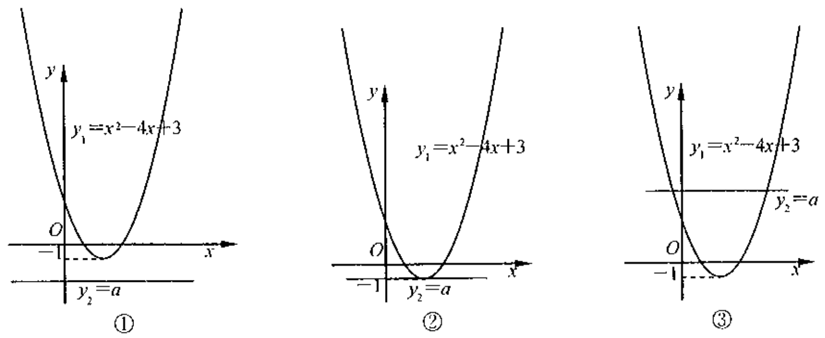
例4 **解**：（1）① $\frac{17}{4},\frac{10}{3},\frac{5}{2},2,\frac{5}{2},\frac{10}{3},\frac{17}{4}$. 函数 $y=x+\frac{1}{x}(x>0)$ 的图像如图. ② 本题答案不唯一，下列解法供参考. 当 $0<x<1$ 时，y 随 x 增大而减小，当 $x>1$ 时，y 随 x 增大而增大；当 $x=1$ 时，函数 $y=x+\frac{1}{x}(x>0)$ 的最小值为 2. ③ $y=x+\frac{1}{x}=(\sqrt{x})^2+\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2=(\sqrt{x})^2+\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2-2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2+2$. 当 $\sqrt{x}-\sqrt{\frac{1}{x}}=0$，即 $x=1$ 时，函数 $y=x+\frac{1}{x}(x>0)$ 的最小值为 2.（2）当该矩形的长为 $\sqrt{a}$ 时，它的周长最小，最小值为 $4\sqrt{a}$.　**说明**：通过描点法可以探索函数的图像，结合图像可以发现函数变化规律、函数的最大值（最小值）、图像的对称性等性质，并利用函数的性质解决实际问题中的最优化问题等. 本题需要理解研究函数的一般过程，用函数学习的基本经验研究新的函数，并感受函数模型的应用价值，丰富学习函数的基本活动经验.



（例 5）

例5 **解**：设 $y_1=\frac{1}{2}x$，$y_2=kx+b$，$y_3=-2$，在同一坐标系中画出它们的图像，如右图所示. 满足 $-2<kx+b<\frac{1}{2}x$ 的是 $y_3<y_2<y_1$，观察图像，得到 $-1<x<2$.　**说明**：本题需要建立三个函数，将求不等式的解集转化函数图像的位置关系分析，体现了函数与方程的内在关系.

例6 **解**：设 $y_1=x^2-4x+3$，$y_2=a$. ∴ $y_1=(x-2)^2-1$. ∴ 当 $x=2$ 时，$y_{\min}=-1$. 画出函数 $y_1=x^2-4x+3$ 的图像和函数 $y=a$ 的图像.



（例 6）

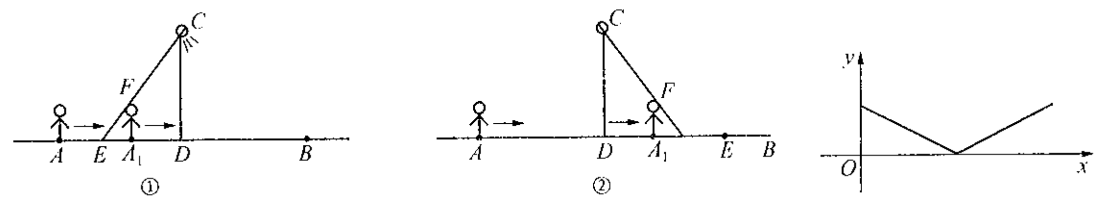
根据图像可以发现：

如图①，当 $a<-1$ 时，函数 $y_1=x^2-4x+3$ 和函数 $y=a$ 的图像没有交点，方程 $x^2-4x+3-a=0$ 无实数解；如图②，当 $a=-1$ 时，函数 $y_1=x^2-4x+3$ 和函数 $y=a$ 的图像有唯一的交点，方程 $x^2-4x+3-a=0$ 有两个相等的实数根；如图③，当 $a>-1$ 时，函数 $y_1=x^2-4x+3$ 和函数 $y=a$ 的图像有两个交点，方程 $x^2-4x+3-a=0$ 有两个不相等的实数根.　**说明**：这里利用函数图像的交点解决方程的解的问题，直观而简单.

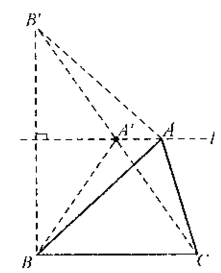
复习练习

1. C　2. C　3. $\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=1,\end{cases}\begin{cases}x_2=1,\\ y_2=1.\end{cases}$　4.（1）设 $y=kx+b(k\neq 0)$，由题意，得到 $\begin{cases}50k+b=40,\\ 60k+b=38.\end{cases}$解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{5},\\ b=50.\end{cases}$ ∴ $y=-\frac{1}{5}x+50$.（2）设原计划修建天数为 m 天，根据题意得到：$\frac{6}{m}=\frac{8}{m+15}$. 解得 $m=45$. 经检验，$m=45$ 是原方程的解. 当 $m=45$ 时，原计划每天所需要费用 $y=-\frac{1}{5}m+50=-\frac{1}{5}\times 45+50=41$（万元）. 所以原计划每天的修建费为 41 万元.

5. 由题意得 $EA=x$，$EA_1=y$. 当 $0\leqslant x<60$ 时，如图①，$\frac{A_1F}{CD}=\frac{EA_1}{ED}$，则 $\frac{1.6}{4.8}=\frac{y}{ED}=\frac{y}{60-x}$. ∴ $y=-\frac{1}{3}x+20$. 当 $60\leqslant x\leqslant 120$ 时，如图②，$\frac{A_1F}{CD}=\frac{EA_1}{ED}$，$ED=x-60$，则 $\frac{1.6}{4.8}=\frac{y}{ED}=\frac{y}{x-60}$，∴ $y=\frac{1}{3}x-20$. ∴ y 与 x 之间函数表达式是 $y=\begin{cases}-\frac{1}{3}x+20,0\leqslant x<60,\\ \frac{1}{3}x-20,60\leqslant x\leqslant 120\end{cases}$. 其函数图像可以表示为：



（第 5 题）



（第 6 题）

6.（1）由题意，得 $y=\frac{x(20-x)}{2}=-\frac{1}{2}x^2+10x(0<x<20)$. 当 $y=48$ 时，$-\frac{1}{2}x^2+10x=48$，解得 $x_1=12$，$x_2=8$，∴ 面积为 48 时 BC 的长为 12 或 8.（2）∵ $y=-\frac{1}{2}x^2+10x$，∴ $y=-\frac{1}{2}(x-10)^2+50$. ∵ $a=-\frac{1}{2}<0$，当 $x=10$ 时，$y_{最大}=50$. ∴ 当 BC 长为 10 时，$\triangle ABC$ 的面积最大，最大面积是 50.（3）$\triangle ABC$ 面积最大时，$\triangle ABC$ 的周长存在最小的情形. 理由如下：由（2）可知 $\triangle ABC$ 的面积最大时，$BC=10$，BC 边上的高也为 10. 过点 A 作直线 l 平行于 BC，作点 B 关于直线 l 的对称点 B'，连接 $B'C$ 交直线 L 于点 A'，再连接 $A'B$，AB'. 则由对称性得：$A'B'=A'B$，$AB'=AB$，∴ $A'B+A'C=A'B'+A'C=B'C$. 当点 A 不在线段 $B'C$ 上时，则由三角形三边关系可得：$\triangle ABC$ 的周长 $=AB+AC+BC=AB'+AC+BC>B'C+BC$，当点 A 在线段 $B'C$ 上时，即点 A 与 A' 重合，这时 $\triangle ABC$ 的周长 $=AB+AC+BC=A'B'+A'C+BC=B'C+BC$，因此当点 A 与 A' 重合时，$\triangle ABC$ 的周长最小；由作法可知：$BB'=20$，∴ $B'C=\sqrt{BC^2+BB'^2}=\sqrt{20^2+10^2}=10\sqrt{5}$，∴ $\triangle ABC$ 的周长 $=10\sqrt{5}+10$. 因此当 $\triangle ABC$ 面积最大时，存在其周长最小的情形，最小周长为 $10\sqrt{5}+10$.　7.（1）根据题意，当 $0\leqslant x\leqslant 4$ 时，$BN=DM=x$，$AN=6-x$，$AM=4-x$. ∵ $\angle D=\angle A=90°$，∴ $FM^2=AD^2+DF^2=x^2+4$，$MN^2=(4-x)^2+(6-x)^2$. $FN^2=4^2+(6-x-2)^2=4^2+(4-x)^2$. ① 当 $\angle FMN=90°$ 时，$FM^2+MN^2=FN^2$，$x^2+4+(4-x)^2+(6-x)^2=4^2+(4-x)^2$，无实数解；② 当 $\angle FNM=90°$ 时，$FM^2=MN^2+FN^2$，$x^2+4=(4-x)^2+(6-x)^2+4^2+(4-x)^2$，$x_1=4$，$x_2=10$（舍）；③

当$\angle NFM=90^\circ$时,$FM^2+FN^2=MN^2$,$x^2+4+4^2+(4-x)^2=(4-x)^2+(6-x)^2$,$x_3=\frac{4}{3}$. ∴ 当$x=4$或$\frac{4}{3}$时,$\triangle FMN$是直角三角形. (2) 当$DM=x$时,$y=MN^2$,$0\leqslant x\leqslant 6$. 由题意知$AM=|x-4|$. ∴ $MN^2=(4-x)^2+(6-x)^2$. ∴ $y=(4-x)^2+(6-x)^2=2x^2-20x+52=2(x-5)^2+2$,其中$0\leqslant x\leqslant 6$. 当$x=5$时,$y_{\min}=2$,$MN$的最小值为$\sqrt{2}$.

专题三 图形的变换

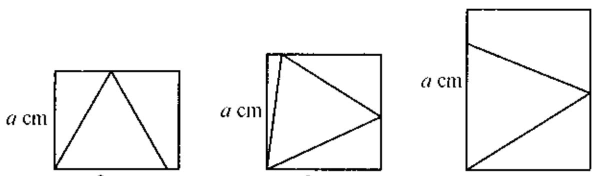
例 1 解:(1) ∵ 四边形$ABCD$为正方形, ∴ $\angle EAB=90^\circ$,$AD=AB$. 又∵ E是AD中点,∴ $AE=\frac{1}{2}AD$. ∵ $AF=\frac{1}{2}AB$,∴ $AD=AE$. ∵ $\angle EAB=90^\circ$,∴ $\angle DAF=\angle BAE=90^\circ$. ∴ $\triangle ABE\cong\triangle ADF$. (2) $\triangle ABE$可以通过以点A为旋转中心,逆时针旋转90°得到$\triangle ADF$. (3) $BE=DF$,且$BE\perp DF$.

例 2 解:(1) 当CD与OA垂直时,∵ $\triangle CDO$为直角三角形,∴ $OC=\sqrt{OD^2+CD^2}=\sqrt{OD^2+OD^2}=\sqrt{2}OD$,由题意,得四边形$ODCE$是正方形,∴ $OD+OE=2OD=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}OC=\sqrt{2}OC$ (2) 图②中结论成立. 过点C分别作$CK\perp OA$,垂足为K,$CH\perp OB$,垂足为H. ∵ OM为$\angle AOB$的角平分线,且$CK\perp OA$,$CH\perp OB$,∴ $CK=CH$,$\angle CKD=\angle CHE=90^\circ$,又∵ $\angle KCD$,$\angle HCE$都是旋转角,∴ $\angle KCD=\angle HCE$. ∴ $\triangle CKD\cong\triangle CHE$,∴ $DK=EH$,∴ $OD+OE=OD+OH+EH=OD+OH+DK=OH+OK$. 由(1)知:$OH+OK=\sqrt{2}OC$,∴ $OD+OE=\sqrt{2}OC$. 图③中上述结论不成立. 类似图②解法可得OD,OE,OC满足$OE-OD=\sqrt{2}OC$.

例 3 解:(1) 证明:由题意,可得$\triangle ABD\cong\triangle ABE$,$\triangle ACD\cong\triangle ACF$. ∴ $\angle DAB=\angle EAB$,$\angle DAC=\angle FAC$,又$\angle BAC=45^\circ$,∴ $\angle EAF=90^\circ$. 又∵ $AD\perp BC$,∴ $\angle E=\angle ADB=90^\circ$,$\angle F=\angle ADC=90^\circ$. 又∵ $AE=AD$,$AF=AD$,∴ $AE=AF$. ∴ 四边形$AEGF$是正方形. (2) 设$AD=x$,则$AE=EG=GF=x$,∵ $BD=2$,$DC=3$,∴ $BE=2$,$CF=3$,∴ $BG=x-2$,$CG=x-3$,在$Rt\triangle BGC$中,$BG^2+CG^2=BC^2$,∴ $(x-2)^2+(x-3)^2=5^2$,化简得,$x^2-5x-6=0$,解得$x_1=6$,$x_2=-1$(舍),所以$AD=x=6$.

复习练习

1. 20° 2. $\sqrt{3}$ 3. $\sqrt{13}$ 4. (1) 由折叠的性质得:EF是BC的垂直平分线,BG是PC的垂直平分线,∴ $PB=PC$,$PB=CB$,∴ $PB=PC=CB$,∴ $\triangle PBC$是等边三角形. (2) 以点B为中心,在矩形$ABCD$中把$\triangle PBC$逆时针方向旋转适当的角度,得到$\triangle P_1BC_1$;再以点B为位似中心,将$\triangle P_1BC_1$放大,使点C_1的对称点C_2落在CD上,得到$\triangle P_2BC_2$. (3) 本题答案不唯一,举例如图所示. (4) $\frac{16}{5}$



$0<a\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\frac{3\sqrt{3}}{2}<a<2\sqrt{3}$ $a\geqslant 2\sqrt{3}$

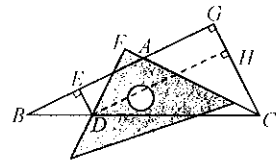
(第 4 题)

专题四 图形的运动(一)

例 1 解:(1) 在四边形$ABCD$中,$AD\parallel BC$,$AB=DC=AD=6$,$\angle ABC=60^\circ$,∴ $\angle A=\angle D=120^\circ$. ∴ $\angle AEB+\angle ABE=180^\circ-120^\circ=60^\circ$. ∵ $\angle BEF=120^\circ$,∴ $\angle AEB+\angle DEF=180^\circ-120^\circ=60^\circ$. ∴ $\angle ABE=\angle DEF$. ∴ $\triangle ABE\backsim\triangle DEF$. ∴ $\frac{AE}{DF}=\frac{AB}{DE}$. ∵ $AE=x$,$DF=y$,∴ $\frac{x}{y}=\frac{6}{6-x}$. ∴ y与x的函数表达式是$y=\frac{1}{6}x(6-x)=-\frac{1}{6}x^2+x$. (2) $y=-\frac{1}{6}x^2+x=-\frac{1}{6}(x-3)^2+\frac{3}{2}$. ∴ 当$x=3$时,$y$有最大值,最大值为$\frac{3}{2}$. **说明**:本题关注的两个变量$x$,$y$是两条线段的长,寻找这两条线段之间的数量关系是求出y与x的函

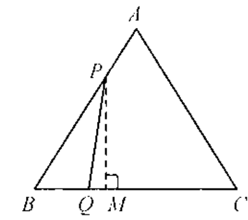
数表达式,以及解决最大值问题的关键. 而突破这一关键是能根据已知条件,结合图形发现这两条线段出现在一对相似三角形中. 本题在一个简洁的图形中,实现了对"相似三角形的性质与条件、确定二次函数表达式以及二次函数性质"的考查,展现了"数"与"形"的结合.

例 2 解:(1) $BF=CG$;证明:在$\triangle ABF$和$\triangle ACG$中,∵ $\angle F=\angle G=90^\circ$,$\angle FAB=\angle GAC$,$AB=AC$,∴ $\triangle ABF\cong\triangle ACG$(AAS). ∴ $BF=CG$. (2) $DE+DF=CG$;证明:过点D作$DH\perp CG$于点H(如图所示). ∵ $DE\perp BA$于点E,$\angle G=90^\circ$,$DH\perp CG$,∴ 四边形$EDHG$为矩形. ∴ $DE=HG$,$DH\parallel BG$. ∴ $\angle GBC=\angle HDC$. ∵ $AB=AC$,∴ $\angle FCD=\angle GBC=\angle HDC$. 又∵ $\angle F=\angle DHC=90^\circ$,$CD=DC$,∴ $\triangle FDC\cong\triangle HCD$(AAS). ∴ $DF=CH$. ∴ $GH+CH=DE+DF=CG$,即$DE+DF=CG$. (3) 仍然成立. **说明**:本题展现了运动变化问题中的"变中有不变",即在三角尺位置的不断变化中,DE、DF、CG之间的数量关系不变. 其中第(2)小题过点D作$DH\perp CG$于点H,把一个变化了的新图形(除去四边形$BDHG$)转化为已经解决过的第(1)小题中的图形,渗透了转化的思想方法.

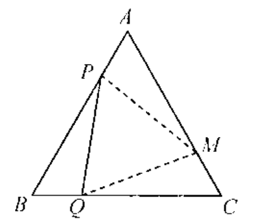


(例 2)

例 3 解:(1) 根据题意,得$AB=BC=3$ cm,$\angle B=60^\circ$,$AP=BQ=t$ cm. ∴ $BP=(3-t)$ cm. 若$\triangle PBQ$是直角三角形,则$\angle BQP=90^\circ$或$\angle BPQ=90^\circ$. 当$\angle BQP=90^\circ$时,$BQ=\frac{1}{2}BP$. 即$t=\frac{1}{2}(3-t)$,解得$t=1$(s). 当$\angle BPQ=90^\circ$时,$BP=\frac{1}{2}BQ$. 即$3-t=\frac{1}{2}t$,解得$t=2$(s). ∴ 当$t=1$ s或$t=2$ s时,$\triangle PBQ$是直角三角形. (2) 过P作$PM\perp BC$于M. (如图①)$Rt\triangle BPM$中,$\sin B=\frac{PM}{PB}$,∴ $PM=PB\cdot\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)$. ∴ $S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{2}BQ\cdot PM=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)$. ∴ $y=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{2}\times 3^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)=\frac{\sqrt{3}}{4}t^2-\frac{3\sqrt{3}}{4}t+\frac{9\sqrt{3}}{4}$. ∴ y与t的表达式为:$y=\frac{\sqrt{3}}{4}t^2-\frac{3\sqrt{3}}{4}t+\frac{9\sqrt{3}}{4}$. 假设存在某一时刻$t$,使得四边形$APQC$的面积是$\triangle ABC$面积的$\frac{2}{3}$,则$\frac{\sqrt{3}}{4}t^2-\frac{3\sqrt{3}}{4}t+\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 3^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$. 整理,得$t^2-3t+3=0$. ∵ $(-3)^2-4\times 1\times 3<0$,∴ 方程无实数根. ∴ 无论$t$取何值,四边形$APQC$的面积都不可能是$\triangle ABC$面积的$\frac{2}{3}$. (3) 在$Rt\triangle PQM$中,$MQ^2+PM^2=PQ^2$,$MQ^2=(BM-BQ)^2=\left[\frac{3}{2}(1-t)\right]^2$. ∴ $x^2=\left[\frac{3}{2}(1-t)\right]^2+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)\right]^2=3t^2-9t+9$. ∴ $t^2-3t=\frac{1}{3}(x^2-9)$. ∴ $y=\frac{\sqrt{3}}{4}t^2-\frac{3\sqrt{3}}{4}t+\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}(t^2-3t)+\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{3}(x^2-9)+\frac{9\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{12}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ∴ y与x的表达式为:$y=\frac{\sqrt{3}}{12}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **说明**:本题在一个运动变化的情境下,考查了等边三角形与直角三角形性质、勾股定理、三角函数等知识. 此外,第(1)问还考查了分类的思想,第(2)、(3)问还考查了函数、方程和数形结合的思想,对学生思维的完整性、深刻性的考查具有较好的效果. 解答中,第(3)问的解答中对"y与x之间的表达式"的确立,须建立在第(2)问求出的"y与t的表达式"的基础上,即先求出y与t的表达式,再找到x与t的关系,利用第三个变量t将变量y与x之间建立联系,求出相应的表达式. 也可用下面解法直接找到变量y与x之间联系. 设动点P、Q、M同时从A、B、C三点出发,分别沿AB、BC、CA方向匀速移动,它们的速度都是1 cm/s,当点P到达点B时,P、Q、M三点停止运动,连接PM、MQ. (如图②)根据题意,得$AB=BC=CA=3$ cm,$\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$,$AP=BQ=CM=t$ cm. ∴ $\triangle APM\cong\triangle BQP\cong\triangle CMQ$. ∴ $S_{\triangle APM}=S_{\triangle BQP}=S_{\triangle CMQ}$,$PM=QM=MQ$. ∴ $\triangle PQM\backsim\triangle ABC$. ∴ $\frac{S_{\triangle PQM}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{x}{3}\right)^2=\frac{x^2}{9}$. ∴ $S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{3}(S_{\triangle ABC}-S_{\triangle PQM})=\frac{1}{3}\left(S_{\triangle ABC}-\frac{x^2}{9}S_{\triangle ABC}\right)=\frac{9-x^2}{27}S_{\triangle ABC}$. ∴ $y=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle PBQ}=S_{\triangle ABC}-\frac{9-x^2}{27}S_{\triangle ABC}=\frac{18+x^2}{27}S_{\triangle ABC}=\frac{18+x^2}{27}\times\frac{1}{2}\times 3^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ∴ y与x的表达式为:$y=\frac{\sqrt{3}}{12}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



①



②

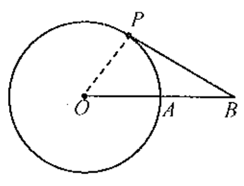
(例 3)

复习练习

1. B　2. D　3. (1) $t=2$ 时，$\triangle QAP$ 为等腰三角形. (2) 四边形 $QAPC$ 的面积等于 36 cm^2，结论：如果 P、Q 同时出发，用 t(s)表示移动的时间($0\leqslant t\leqslant 6$)，那么四边形 $QAPC$ 的面积为定值(矩形面积的一半)，或 P、Q 两点到对角线 AC 的距离之和保持不变. (3) 当 $t=1.2$ s 或 3 s 时，以点 Q、A、P 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似.　4. (1) y 关于 x 的函数表达式为 $y=2x^2+2$，自变量 x 的取值范围是 $0\leqslant x\leqslant 2$. (2) 点 P 运动路线的长为 2.

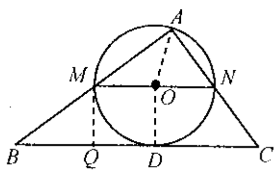
专题五　图形运动问题(二)

例 1　**解**：当 $OP\perp BP$ 时，BP 与 $\odot O$ 相切. 由 $OP=OA$，$AB=OA$，可知此时 $\angle POA=60^\circ$，那么点 P 在 OB 上方时，运动的时间为 $\frac{60\cdot\pi\cdot 3}{180}\div\pi=1$(s)；点 P 在 OB 下方时，运动的时间为 $\frac{300\cdot\pi\cdot 3}{180}\div\pi=5$(s). 所以本题填 1 或 5.　**说明**：本题设计了一个动点 P，过动点 P 和定点 B 的直线 BP 的运动变化方式是绕定点 B 旋转. 因点 P 始终在 $\odot O$ 上，所以本题考查的意图是通过“位置关系”判定直线与圆相切.



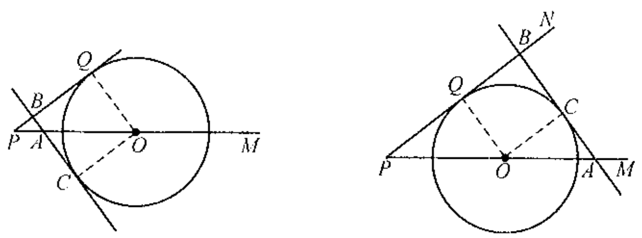
(例 1)

例 2　**解**：如图 3，设直线 BC 与 $\odot O$ 相切于点 D，连接 AO、DO，则 $AO=DO=\frac{1}{2}MN$. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=5$. ∵ $MN/\!/BC$，∴ $\triangle AMN\backsim\triangle ABC$. ∴ $\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$，即 $\frac{x}{4}=\frac{MN}{5}$. ∴ $OD=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}x=\frac{5}{8}x$. 过 M 点作 $MQ\perp BC$ 于 Q，则 $MQ=OD=\frac{5}{8}x$. 在 Rt$\triangle BMQ$ 与 Rt$\triangle BCA$ 中，$\angle B$ 是公共角，∴ $\triangle BMQ\backsim\triangle BCA$. ∴ $\frac{BM}{BC}=\frac{QM}{AC}$. ∴ $BM=\frac{5\times\frac{5}{8}x}{3}=\frac{25}{24}x$. ∴ $AB=BM+MA=\frac{25}{24}x+x$. ∵ $AB=4$，∴ $\frac{25}{24}x+x=4$. 解得 $x=\frac{96}{49}$. ∴ 当 $x=\frac{96}{49}$ 时，$\odot O$ 与直线 BC 相切.　**说明**：随着点 M 的运动，直径 MN 位置、长度不断变化，$\odot O$ 大小、位置也随之不断变化. $\odot O$ 与直线 BC 何时相切，取决于何时圆心 O 到 BC 的距离等于 $\odot O$ 的半径. 根据这一相等关系，综合运用三角形相似的知识，建立 x 的方程是解决问题的关键.



(例 2)

例 3　**解**：(1) 连接 OQ. ∵ PN 与 $\odot O$ 相切于点 Q，∴ $OQ\perp PN$，即 $\angle OQP=90^\circ$. ∵ $OP=10$，$OQ=6$，∴ $PQ=\sqrt{10^2-6^2}=8$(cm).　(2) 过点 O 作 $OC\perp AB$，垂足为 C. ∵ 点 A 的运动速度为 5 cm/s，点 B 的运动速度为 4 cm/s，运动时间为 t s，∴ $PA=5t$，$PB=4t$. ∵ $PO=10$，$PQ=8$，∴ $\frac{PA}{PO}=\frac{PB}{PQ}$. ∵ $\angle P=\angle P$，∴ $\triangle PAB\backsim\triangle POQ$. ∴ $\angle PBA=\angle PQO=90^\circ$. ∵ $\angle BQO=\angle CBQ=\angle OCB=90^\circ$，∴ 四边形 $OCBQ$ 为矩形. ∴ $BQ=OC$. ∵ $\odot O$ 的半径为 6，∴ 当 $BQ=OC=6$ 时，直线 AB 与 $\odot O$ 相切. ① 当 AB 运动到如图①所示的位置. $BQ=PQ-PB=8-4t$. 由 $BQ=6$，得 $8-4t=6$. 解得 $t=0.5$(s). ② 当 AB 运动到如图②所示的位置. $BQ=PB-PQ=4t-8$. 由 $BQ=6$，得 $4t-8=6$. 解得 $t=3.5$(s). 所以，当 t 为 0.5 s 或 3.5 s 时直线 AB 与 $\odot O$ 相切.



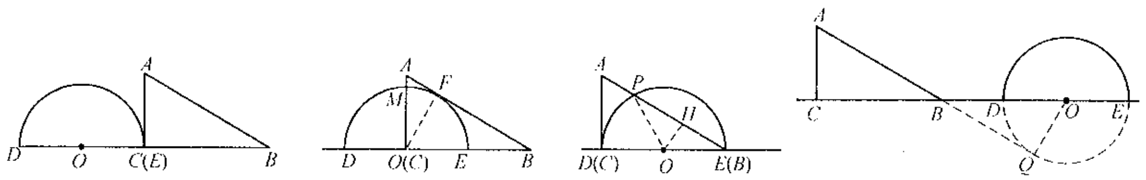
①　②

(例 3)

说明：经过推理得到 $\triangle PAB\backsim\triangle POQ$，推出 $\angle PBA=90^\circ$，接下来设法建立运动时间 t 的方程，从而求出结果是解答第(2)小题的思路主线. 其中建立运动时间 t 的方程的相等关系有三种，一是“$d=R$”；二是“勾股定理”；三是“相似三角形对应边成比例”. 本例还有其他解法.

复习练习

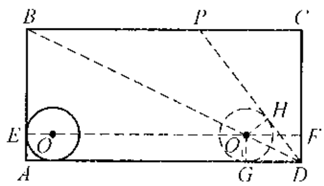
1. $\frac{12}{5}$　2. B　3. (1) ① 如图①，当点 E 与点 C 重合时，$AC\perp OE$，$OC=OE=6$ cm，所以 AC 与半圆 O 所在的圆相切，此时点 O 运动了 2 cm，所求运动时间 $t=\frac{2}{2}=1$(s). ② 如图②，当点 O 运动到点 C 时，过点 O 作 $OF\perp AB$，垂足为 F. 在 Rt$\triangle FOB$ 中，$\angle FBO=30^\circ$，$OB=12$ cm，则 $OF=6$ cm，即 OF 等于半圆 O 的半径，所以 AB 与半圆 O 所在的圆相切. 此时点 O 运动了 8 cm，所求运动时间 $t=\frac{8}{2}=4$(s). ③ 如图③，当点 O 运动到 BC 的中点时，$AC\perp OD$，$OC=OD=6$ cm，所以 AC 与半圆 O 所在的圆相切. 此时点 O 运动了 14 cm，所求运动时间 $t=\frac{14}{2}=7$(s). ④ 如图④，当点 O 运动到 B 点的右侧，且 $OB=12$ cm 时，过点 O 作 $OQ\perp AB$，垂足为 Q. 在 Rt$\triangle QOB$ 中，$\angle OBQ=30^\circ$，则 $OQ=6$ cm，即 OQ 等于半圆 O 所在的圆的半径，所以直线 AB 与半圆 O 所在的圆相切. 此时点 O 运动了 32 cm，所求运动时间为：$t=\frac{32}{2}=16$(s).



①　②　③　④

(第 3 题)

4. (1) $a+2b$　(2) ∵ 在整个运动过程中，点 P 移动的距离为$(a+2b)$cm，圆心 O 移动的距离为$2(a-4)$cm，由题意，得 $a+2b=2(a-4)$ ①.　∵ 点 P 移动2s 到达 B 点，即点 P 用 2 s 移动了 b cm，点 P 继续移动 3 s，到达 BC 的中点，即点 P 用 3 s 移动了 $\frac{1}{2}a$ cm. ∴ $\frac{b}{2}=\frac{\frac{1}{2}a}{3}$ ②.　由①②解得 $\begin{cases}a=24,\\ b=8.\end{cases}$　∵ 点 P 移动的速度与 $\odot O$ 移动的速度相等，∴ $\odot O$ 移动的速度为 $\frac{b}{2}=4$(cm/s). ∴ 这 5 s 时间内圆心 O 移动的距离为 $5\times 4=20$(cm).　(3) 存在这种情形. 设点 P 移动的速度为 v_1 cm/s，$\odot O$ 移动的速度为 v_2 cm/s，由题意，得 $\frac{v_1}{v_2}=\frac{a+2b}{2(a-4)}=\frac{20+2\times 10}{2(20-4)}=\frac{5}{4}$. 如图，设直线 OO_1 与 AB 交于点 E，与 CD 交于点 F，$\odot O_1$ 与 AD 相切于点 G. 若 PD 与 $\odot O_1$ 相切，切点为 H，则 $O_1G=O_1H$. 易得 $\triangle DO_1G\cong\triangle DO_1H$，∴ $\angle ADB=\angle BDP$. ∵ $BC/\!/AD$，∴ $\angle ADB=\angle CBD$. ∴ $\angle BDP=\angle CBD$. ∴ $BP=DP$. 设 $BP=x$ cm，则 $DP=x$ cm，$PC=(20-x)$cm，在 Rt$\triangle PCD$ 中，由勾股定理，可得 $PC^2+CD^2=PD^2$，即$(20-x)^2+10^2=x^2$，解得 $x=\frac{25}{2}$. ∴ 此时点 P 移动的距离为 $10+\frac{25}{2}=\frac{45}{2}$(cm). ∵ $EF/\!/AD$，∴ $\triangle BEO_1\backsim\triangle BAD$. ∴ $\frac{EO_1}{AD}=\frac{BE}{BA}$，即 $\frac{EO_1}{20}=\frac{8}{10}$. ∴ $EO_1=16$ cm. ∴ $OO_1=14$ cm. ① 当 $\odot O$ 首次到达 $\odot O_1$ 的位置时，$\odot O$ 移动的距离为 14 cm，∴ 此时点 P 与 $\odot O$ 移动的速度比为 $\frac{\frac{45}{2}}{14}=\frac{45}{28}$. ∵ $\frac{45}{28}\neq\frac{5}{4}$，∴ 此时 PD 与 $\odot O_1$ 不可能相切. ② 当 $\odot O$ 在返回途中到达 $\odot O_1$ 的位置时，$\odot O$ 移动的距离为 $2\times(20-4)-14=18$(cm)，∴ 此时点 P 与 $\odot O$ 移动的速度比为 $\frac{\frac{45}{2}}{18}=\frac{45}{36}=\frac{5}{4}$. ∴ 此时 PD 与 $\odot O_1$ 恰好相切.



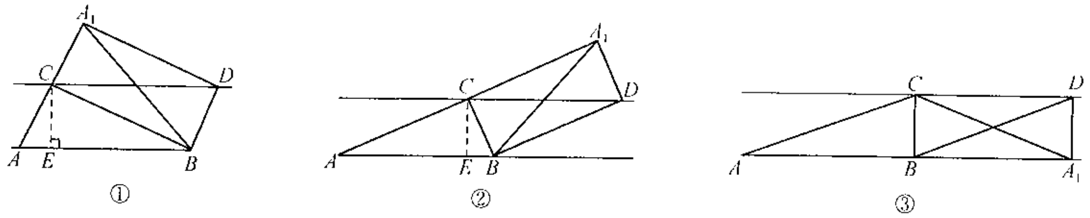
(第 4(3)题)

专题六　图形的探究(一)

例 1　**解**：$AC=BD$ 或四边形 $ABCD$ 满足 $AD/\!/BC$，$AD=BC$(符合要求的其他答案也可以).　**说明**：本题是一个条件探究型试题，对于任意四边形的中点四边形都是平行四边形，要使得四边形 $EFGH$ 成为菱形，本质上

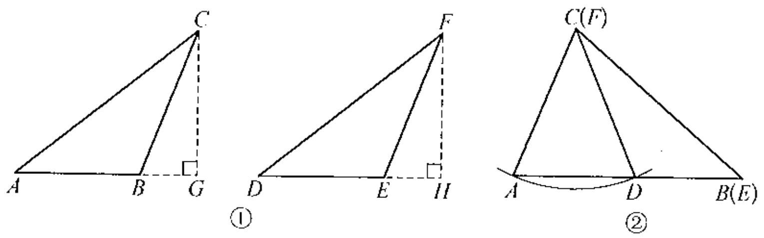
就是要求 $EF=EH$,即 $AC=BD$.

例2 解:(1) 6 (2) 连接 AA_1 交 BC 所在直线于点 M,∵ $\triangle ABC$ 沿 BC 翻折,点 A 关于直线 BC 的对称点为 A_1,∴ $AM=A_1M$. ∵ 四边形 $ABDC$ 是平行四边形,设对角线的交点是 O,∴ $AO=DO$. ∴ MO 为 $\triangle AA_1D$ 的中位线. ∴ $MO//A_1D$. 即 $A_1D//BC$. (3) 分三种情况:①、②两种情况可同时由方程解出. 如图①②,过点 C 作 $CE\perp AB$,垂足为 E. ∵ 四边形 A_1CBD 是矩形,∴ $\angle A_1CB=90°$. ∴ $\angle ACB=90°$. ∴ $\triangle CAE\backsim\triangle BCE$. ∴ $CE^2=AE\cdot BE$. 设 $AE=x$,则 $EB=6-x$,所以 $CE^2=AE\cdot BE$,即 $x(6-x)=(\sqrt{5})^2$,得 $x^2-6x+5=0$,解方程,得:$x_1=1$,$x_2=5$. 在 $Rt\triangle ACE$ 中,$AC^2=AE^2+CE^2$,∴ $AC=\sqrt{6}$ 或 $AC=\sqrt{30}$. 如图③,∵ 四边形 A_1BCD 是矩形,∴ $\angle A_1BC=90°$,∴ $\angle ABC=90°$. 在 $Rt\triangle ABC$ 中,$AC^2=AB^2+BC^2$,∴ $AC^2=6^2+(\sqrt{5})^2$,即 $AC=\sqrt{41}$. 综上所述 $AC=\sqrt{6}$ 或 $\sqrt{30}$ 或 $\sqrt{41}$.



(例2)

例3 解:(1) HL (2) 证明:如图①,分别过点 C、F 作对边 AB、DE 上的高 CG、FH,其中 G、H 为垂足.
∵ $\angle ABC$、$\angle DEF$ 都是钝角,∴ G、H 分别在 AB、DE 的延长线上. ∵ $CG\perp AG$,$FH\perp DH$,∴ $\angle CGA=\angle FHD=90°$. ∵ $\angle CBG=180°-\angle ABC$,$\angle FEH=180°-\angle DEF$,$\angle ABC=\angle DEF$,∴ $\angle CBG=\angle FEH$. 在 $\triangle BCG$ 和 $\triangle EFH$ 中,∵ $\angle CGB=\angle FHE$,$\angle CBG=\angle FEH$,$BC=EF$,∴ $\triangle BCG\cong\triangle EFH$,∴ $CG=FH$. 又∵ $AC=DF$,∴ $Rt\triangle ACG\cong Rt\triangle DFH$. ∴ $\angle A=\angle D$. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,∵ $\angle ABC=\angle DEF$,$\angle A=\angle D$,$AC=DF$,∴ $\triangle ABC\cong\triangle DEF$. (3) 如图②,$\triangle DEF$ 就是所求作的三角形.

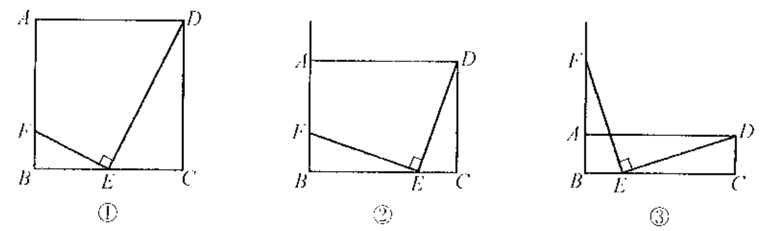


(例3)

(4) 本题答案不唯一,下列解法供参考. $\angle B\geqslant\angle A$.

复习练习

1. 40° 2. PA 的长为 2 或 4 或 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$. 3. (1) 因为 $\angle EDC$、$\angle FEB$ 是 $\angle DEC$ 的余角,所以 $\angle EDC=\angle FEB$. 又因为 $\angle C=\angle B=90°$,所以 $\triangle DCE\backsim\triangle EBF$. 因此 $\frac{DC}{CE}=\frac{EB}{BF}$,即 $\frac{m}{x}=\frac{8-x}{y}$. 整理,得 y 关于 x 的函数关系为 $y=-\frac{1}{m}x^2+\frac{8}{m}x$ (2) 如图①,当 $m=8$ 时,$y=-\frac{1}{8}x^2+x=-\frac{1}{8}(x-4)^2+2$. 因此当 $x=4$ 时,y 取得最大值为 2. (3) 若 $y=\frac{12}{m}$,那么 $\frac{12}{m}=-\frac{1}{m}x^2+\frac{8}{m}x$. 整理,得 $x^2-8x+12=0$. 解得 $x=2$ 或 $x=6$. 要使 $\triangle DEF$ 为等腰三角形,只存在 $ED=EF$ 的情况. 因为 $\triangle DCE\backsim\triangle EBF$,所以 $CE=BF$,即 $x=y$. 将 $x=y=2$ 代入 $y=\frac{12}{m}$,得 $m=6$(如图②);将 $x=y=6$ 代入 $y=\frac{12}{m}$,得 $m=2$(如图③).

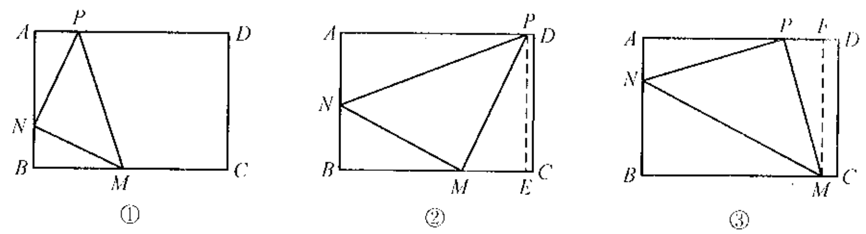


(第3题)

4. (1) 如图①中,∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,∴ $AB=BC=CD=AD$,$\angle DAB=\angle ABC=\angle BCD=\angle D=90°$. ∵ $\triangle PBC\backsim\triangle PAM$,∴ $\angle PAM=\angle PBC$,$\frac{AM}{BC}=\frac{PA}{PB}$. ∵ $\angle PBC+\angle PBA=90°$. ∴ $\angle PAM+\angle PBA=90°$. ∴ $\angle APB=90°$. ∴ $AP\perp BN$. ∵ $\angle ABP=\angle ABN$,$\angle APB=\angle BAN=90°$,∴ $\triangle BAP\backsim\triangle BNA$. ∴ $\frac{PA}{PB}=\frac{AN}{AB}$. ∴ $\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{BC}$. ∵ $AB=BC$,∴ $AN=AM$. (2) 仍然成立,$AP\perp BN$ 和 $AM=AN$. 理由如图②中,∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,∴ $AB=BC=CD=AD$,$\angle DAB=\angle ABC=\angle BCD=\angle D=90°$. ∵ $\triangle PBC\backsim\triangle PAM$,∴ $\angle PAM=\angle PBC$,$\frac{AM}{BC}=\frac{PA}{PB}$. ∵ $\angle PBC+\angle PBA=90°$. ∴ $\angle PAM+\angle PBA=90°$. ∴ $\angle APB=90°$. ∴ $AP\perp BN$. ∵ $\angle ABP=\angle ABN$,$\angle APB=\angle BAN=90°$,∴ $\triangle BAP\backsim\triangle BNA$. ∴ $\frac{PA}{PB}=\frac{AN}{AB}$. ∴ $\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{BC}$. ∵ $AB=BC$,∴ $AN=AM$.

5. (1) 6 (2) ① $\angle PNM=90°$ 时,如图①,易得 $\angle ANP=\angle BMN$,在 $\triangle APN$ 和 $\triangle BNM$ 中,$\begin{cases}\angle ANP=\angle BMN\\ \angle A=\angle B=90°\\ PN=MN\end{cases}$ ∴ $\triangle APN\cong\triangle BNM(AAS)$. ∴ $AN=BM$,$AP=BN$. ∵ $BM=2BN$,∴ $AB=AN+BN=2BN+BN=3$. 解得 $BN=1$,∴ $AP=1$. ② $\angle PMN=90°$ 时,如图②,过点 P 作 $PE\perp BC$ 于 E,易得 $\angle BMN=\angle MPE$,在 $\triangle PME$ 和 $\triangle MNB$ 中,$\begin{cases}\angle BMN=\angle MPE\\ \angle B=\angle PEM=90°\\ PM=MN\end{cases}$,∴ $\triangle PME\cong\triangle MNB(AAS)$. ∴ $PE=BM=3$,$BN=ME=\frac{1}{2}BM=\frac{3}{2}$. ∴ $BE=BM+ME=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$. ③ $\angle MPN=90°$ 时,如图③,过点 M 作 $MF\perp AD$ 于 F,易得 $\angle APN=\angle PMF$,在 $\triangle APN$ 和 $\triangle FMP$ 中,$\begin{cases}\angle APN=\angle PMF\\ \angle A=\angle PFM=90°\\ PM=PN\end{cases}$,∴ $\triangle APN\cong\triangle FMP(AAS)$,∴ $AP=MF=3$.

综上所述,$AP=1$ 或 $\frac{9}{2}$ 或 3 时,$\triangle PMN$ 是等腰直角三角形.



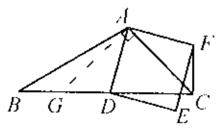
(第5题)

专题七 图形的探究(二)

例1 解:(1) 证明:∵ $\triangle ABC$ 是正三角形,∴ $\angle A=\angle ABC=60°$,$AB=BC$. 又∵ $AN=BM$,∴ $\triangle ABN\cong\triangle CBM$. ∴ $\angle ABN=\angle BCM$. 又∵ $\angle ABN+\angle OBC=60°$,∴ $\angle BCM+\angle OBC=60°$,∴ $\angle NOC=60°$. (2) 在正方形中,$AN=DM$,$\angle DON=90°$ (3) 在正五边形中,$AN=EM$,$\angle EON=108°$. **说明**:本题将"正三角形"改为

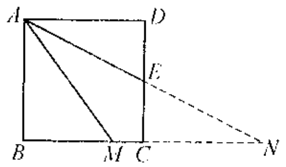
"正方形",再改为"正五边形",其他条件不变,实际上是将条件中的某个关键图形从特殊或简单情形,推广到一般的或复杂的情形下探究,特殊或简单情形下的某些结论是否依然成立.这类问题也是隐含类比的成分,但是更重于类比中的变化、调整与发展,更体现思维的应变性解决问题时需要纵横联想、适时转化、开阔思路才能获得丰富信息,本题还可以拓展到"正 n 边形"中以上所求的角恰好等于正 n 边形的内角$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$.

例2 解:(1) ① CF 与 BD 位置关系是垂直、数量关系是相等. ② 当点 D 在 BC 的延长线上时①的结论仍成立.由正方形 $ADEF$ 得 $AD=AF$,$\angle DAF=90^\circ$. ∵ $\angle BAC=90^\circ$,∴ $\angle DAF=\angle BAC$. ∴ $\angle DAB=\angle FAC$,又 $AB=AC$,∴ $\triangle DAB\cong\triangle FAC$. ∴ $CF=BD$,$\angle ACF=\angle ABD$. ∵ $\angle BAC=90^\circ$,$AB=AC$. ∴ $\angle ABC=45^\circ$. ∴ $\angle ACF=45^\circ$. ∴ $\angle BCF=\angle ACB+\angle ACF=90^\circ$. 即 $CF\perp BD$. (2) 画图正确. 当$\angle BCA=45^\circ$时,$CF\perp BD$(如图). 理由是:过点 A 作 $AG\perp AC$ 交 BC 于点 G,∴ $AC=AG$. 可证:$\triangle GAD\cong\triangle CAF$,∴ $\angle ACF=\angle AGD=45^\circ$. ∴ $\angle BCF=\angle ACB+\angle ACF=90^\circ$,即 $CF\perp BD$.

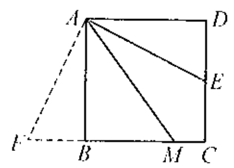


(例 2)

例3 解:(1) 如图①,延长 AE、BC 交于点 N. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,∴ $AD\parallel BC$. ∴ $\angle DAE=\angle ENC$. ∵ AE平分$\angle DAM$,∴ $\angle DAE=\angle MAE$. ∴ $\angle ENC=\angle MAE$. ∴ $MA=MN$. 在$\triangle ADE$和$\triangle NCE$中,$\begin{cases}\angle DAE=\angle CNE,\\ \angle AED=\angle NEC,\\ DE=CE,\end{cases}$ ∴ $\triangle ADE\cong\triangle NCE$. ∴ $AD=NC$. ∴ $MA=MN=NC+MC=AD+MC$. (2) $AM=DE+BM$ 成立. 理由:如图②,过点 A 作 $AF\perp AE$,交 CB 的延长线于点 F. ∵ 四边形 $ABCD$ 是平方形,∴ $\angle BAD=\angle D=ABC=90^\circ$,$AB=AD$,$AB\parallel DC$. ∵ $AF\perp AE$,∴ $\angle FAE=90^\circ$. ∴ $\angle FAB=90^\circ-\angle BAE=\angle EAD$. 在$\triangle ABF$和$\triangle ADE$中,$\begin{cases}\angle FAB=\angle EAD,\\ AB=AD,\\ \angle ABF=\angle D=90^\circ,\end{cases}$ ∴ $\triangle ABF\cong\triangle ADE$. ∴ $BF=DE$,$\angle F=\angle AED$. ∵ $AB\parallel DC$,∴ $\angle AED=\angle BAE$. ∴ $\angle FAB=\angle EAD=\angle EAM$. ∴ $\angle AED=BAE=\angle BAM+\angle EAM=\angle BAM+\angle FAB=\angle FAM$. ∴ $\angle F=\angle FAM$. ∴ $AM=FM$. ∴ $AM=FB+BM=DE+BM$ (3) 如图②,探究展示(1)中结论成立,(2)中结论不成立.



①



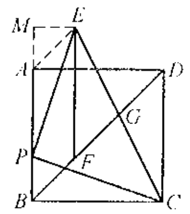
②

(例 3)

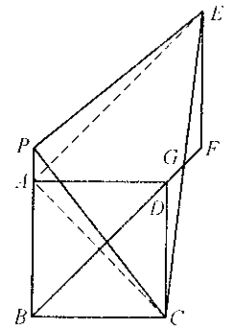
复习练习

1. $5\sqrt{2}$ $5\sqrt{2}$ 2. (1) $AF=BD$ (2) $AF=BD$. 证明如下:∵ $\triangle ABC$是等边三角形(已知),∴ $BC=AC$,$\angle BCA=60^\circ$(等边三角形的性质);同理知,$DC=CF$,$\angle DCF=60^\circ$;∴ $\angle BCA+\angle DCA=\angle DCF+\angle DCA$,即$\angle BCD=\angle ACF$;∴ $\triangle BCD\cong\triangle ACF$(SAS),∴ $AF=BD$(全等三角形的对应边相等) (3) $AF+BF'=AB$
3. (1) 过点 E 作 $EM\perp AB$,交 BA 的延长线于点 M,连接 AE,∵ $PE\perp CP$,∴ $\angle EPM+\angle BPC=\angle EPM$,∵ $EM\perp AB$,∴ $\angle EPM+\angle MEP=90^\circ$,∴ $\angle BPC=\angle MEP$,∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,∴ $\angle ABC=90^\circ$,$AB=BC$,$\angle ABD=\angle CBD=45^\circ$,$AB\parallel CD$. ∴ $\angle ABC=\angle M=90^\circ$,在$\triangle BPC$ 和$\triangle MEP$ 中,$\begin{cases}\angle BPC=\angle MEP\\ \angle ABC=\angle M=90^\circ,\\ CP=PE\end{cases}$ ∴ $\triangle BPC\cong\triangle MEP$(AAS),∴ $BP=ME$,$BC=MP$,∴ $AB=MP$,∴ $AM=BP$,∴ $AM=ME$,∵ $\angle M=90^\circ$,∴ $\angle MAE=45^\circ$,∴ $\angle MAE=\angle ABD$,∴ $AE\parallel BD$,∵ $EF\parallel CD$,∴ $AB\parallel EF$,∴ 四边形 $ABFE$ 是平行四边形,∴ $EF=AB$ (2) 分两种情况:① $BF+2DG=\sqrt{2}CD$. 理由如下:如图①,∵ $EF\parallel CD$,∴ $\angle FEG=\angle GCD$,在$\triangle EGF$和$\triangle CGD$中,$\begin{cases}\angle FEG=\angle GCD\\ \angle EGF=\angle CGD,\\ EF=CD\end{cases}$ ∴ $\triangle EGF\cong\triangle CGD$(AAS),∴ $FG=DG$,在 Rt$\triangle BCD$ 中,$\angle CBD=45^\circ$,

∴ $BD=\sqrt{2}CD$,∴ $BF+2DG=\sqrt{2}CD$;② 如图②,点 P 在射线 BA 上时,$BF-2DG=\sqrt{2}CD$,与①同理可证.



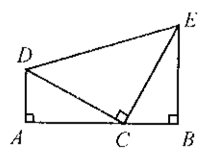
①



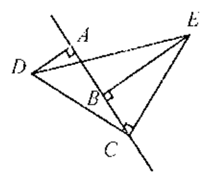
②

(第 3 题)

4. (1) 连接 AG,∵ 正方形 $AEGH$ 的顶点 E、H 在正方形 $ABCD$ 的边上,∴ $\angle GAE=\angle CAB=45^\circ$,$AE=AH$,$AB=AD$,∴ A,G,C 共线,$AB-AE=AD-AH$,∴ $HD=BE$,∵ $AG=\frac{AE}{\sin 45^\circ}=\sqrt{2}AE$,$AC=\frac{AB}{\sin 45^\circ}=\sqrt{2}AB$,∴ $GC=AC-AG=\sqrt{2}AB-\sqrt{2}AE=\sqrt{2}(AB-AE)=\sqrt{2}BE$,∴ $HD:GC:EB=1:\sqrt{2}:1$ (2) 连接 AG、AC,∵ $\triangle ADC$ 和$\triangle AHG$ 都是等腰直角三角形,∴ $AD:AC=AH:AG=1:\sqrt{2}$,$\angle DAC=\angle HAG=45^\circ$,∴ $\angle DAH=\angle CAG$. ∴ $\triangle DAH\backsim\triangle CAG$,∴ $HD:GC=AD:AC=1:\sqrt{2}$,∵ $\angle DAB=\angle HAE=90^\circ$,∴ $\angle DAH=\angle BAE$,又∵ $AD=AB$,$AH=AE$,∴ $\triangle DAH\cong\triangle BAE$(SAS),∴ $HD=EB$,∴ $HD:GC:EB=1:\sqrt{2}:1$ (3) 有变化,连接 AG、AC,∵ 矩形 $AEGH$ 的顶点 E、H 在矩形 $ABCD$ 的边上,$DA:AB=HA:AE=m:n$,∴ $\angle ADC=\angle AHG=90^\circ$,∴ $\triangle ADC\backsim\triangle AHG$. ∴ $AD:AC=AH:AG=m:\sqrt{m^2+n^2}$,$\angle DAC=\angle HAG$. ∴ $\angle DAH=\angle CAG$,∴ $\triangle DAH\backsim\triangle CAG$,∴ $HD:GC=AD:AC=m:\sqrt{m^2+n^2}$,∵ $\angle DAB=\angle HAE=90^\circ$,∴ $\angle DAH=\angle BAE$,∵ $DA:AB=HA:AE=m:n$,∴ $\triangle ADH\backsim\triangle ABE$,∴ $DH:BE=AD:AB=m:n$,∴ $HD:GC:EB=m:\sqrt{m^2+n^2}:n$ 5. 本题答案不唯一,下列问题供参考. 例如:在证明圆周角性质时,圆心在角的内部与外部分别得到的结论(见课本). 例如:(1) 如图①,在$\triangle CDE$ 中,$\angle DCE=90^\circ$,$CD=CE$,直线 $DA\perp AB$,$EB\perp AB$,垂足分别为 A、B. 判断 AB 与 AD、BE 的数量关系,并说明理由. (2) 若将 AB 绕 C 旋转至经过$\triangle CDE$ 的内部,则可得图②,在此情况中,AB 与 AD、BE 有何数量关系? 简析:在(1)中,∵ $\triangle CDA\cong\triangle ECB$,∴ $AD=BC$,$BE=AC$,则 $AB=AC+BC=BE+AD$. 在(2)中,同样如此,∵ $\triangle ADC\cong\triangle BCE$,∴ $AD=BC$,$BE=AC$,则 $AB=AC-BC=BE-AD$. 问题的本质是,AB 的位置由在$\triangle CDE$ 的形外(除 C 点外),旋转至$\triangle CDE$ 的形内,但确定 A、B 的方式没有发生变化(即过 D 作 $DA\perp AB$,过 E 作 $EB\perp AB$),结论由 $AB=AC+BC=BE+AD$ 变化为 $AB=AC-BC=BE-AD$. 体现"形内外"与"正负性"的辩证和谐的问题.



①



②

(第 5 题)

专题八 阅读理解问题

"滑动角"

例1 (1) 2,1 (2) 3 (3) 当 $0\leq O_1O_2<1$ 时,两个正方形无公共点;当 $O_1O_2=1$ 时,两个正方形有无数公共点;当 $1<O_1O_2<3$ 时,两个正方形有两个公共点;当 $O_1O_2=3$ 时,两个正方形有一个公共点;当 $O_1O_2>3$ 时,两个正方形无公共点. **说明**:从运动变换的角度分析,圆和圆的位置关系有外离、外切、相交、内切、内含共

5种位置关系，本题由圆和圆的位置关系迁移到两个正方形的位置关系，讲解时要注意引导学生根据图形平移的性质，结合图形的特点，得出结论. 教学时可从两个正方形、两个菱形的位置关系等角度引申. 提供背景材料的阅读理解型问题，要注意将熟悉的背景知识或方法迁移到题目提供的背景材料中来. 这类阅读理解型问题既可以拓宽视野、提高文化素养，又可以通过对这些背景的分析解决问题、感受数学在生活中的应用.

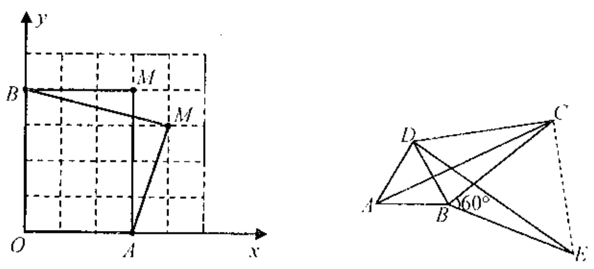
例2 **解**：由有理数的除法法则"两数相除，异号得负"有(1) $\begin{cases}5x+1>0,\\2x-3<0,\end{cases}$或(2) $\begin{cases}5x+1<0,\\2x-3>0,\end{cases}$解不等式组(1)，得$-\frac{1}{5}<x<\frac{3}{2}$，解不等式组(2)，得不等式组(2)无解. 因此，不等式$\frac{5x+1}{2x-3}<0$的解集为$-\frac{1}{5}<x<\frac{3}{2}$.

说明：本题的"新方法"实际上是"同号得正，异号得负"判断两个整式的积的符号，利用"降次"的方法解一元二次不等式，教学时可以引申为解无理方程、分式方程. 阅读理解问题中有很多是用"新方法"解决问题，这个貌似的"新方法"实际上是已有的知识的拓展或延伸，需要在阅读并理解已有知识的基础上解决问题.

例3 **解**：(1) 6,6 (2) i. $y=4(x-1)^2-2$ ii. 1) (3) $y=-\frac{2x+1}{2x+4}=-\frac{2x+4-3}{2x+4}=\frac{3}{2x+4}-1=\frac{\frac{3}{2}}{x+2}-1$，先把函数$y=\frac{1}{x}$的图像上所有的点向左平移2个单位长度，得到函数$y=\frac{1}{x+2}$的图像；再把函数$y=\frac{1}{x+2}$的图像上所有的点纵坐标变为原来的$\frac{3}{2}$倍，横坐标不变，得到函数$y=\frac{3}{2x+4}$的图像；最后把函数$y=\frac{3}{2x+4}$的图像上所有的点向下平移1个单位长度，得到函数$y=\frac{2x+1}{2x+4}$的图像. **说明**：本题(1)中可以直接根据题意作出；本题(2)中二次函数伸缩变化要类比反比例函数伸缩变化规律；本题(3)中先要通过添加项、约分、转化为基本类型. 再根据反比例函数图像的性质说明变化过程. 这类问题可较好地考查学生的阅读能力、应用知识解决问题的能力.

复习练习

1. C 2. 4 7 $2<x\leqslant3$ 3. (1) 圆心角相等(或半径和弧长对应成比例) (2) $2m$ (3) $120°$，$15\sqrt{2}$ 4. (1) 正方形、长方形、直角梯形(任选两个均可) (2) 答案如图所示，$M(3,4)$或$M(4,3)$ (3) 连接EC. ∵ $\triangle ABC\cong\triangle DBE$，∴ $AC=DE$，$BC=BE$. ∵ $\angle CBE=60°$，∴ $EC=BC$，$\angle BCE=60°$. $\angle DCB=30°$. ∴ $\angle DCE=90°$，∴ $DC^2+EC^2=DE^2$. ∴ $DC^2+BC^2=AC^2$，即四边形$ABCD$是勾股四边形.



(第4题)

5. (1) 小明可以组成60套服装. 理由：20套服装即20种上衣与裤子的组合，每种都可以分配三种不同的帽子组成一套服装，所以可以组成60套服装. (2) 一共可以确定$6\times5=30$，共30个点. (3) 本题解法不唯一，下列解法供参考：学校羽毛球队准备在五名男运动员和三名女运动员中各选取一名结成组合，参加羽毛球混双比赛. 学校可供选择的组合共有多少种？ 6. (1) 在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，CD是AB上的中线，∴ $CD=\frac{1}{2}AB$，∴ $CD=BD$，∴ $\angle BCE=\angle ABC$. ∵ $BE\perp CD$，∴ $\angle BEC=90°$. ∴ $\angle BEC=\angle ACB$. ∴ $\triangle BCE\backsim\triangle ABC$. ∴ E是$\triangle ABC$的自相似点. (2) ① 作图略. 作法如下：i. 在$\angle ABC$内，作$\angle CBD=\angle A$；ii. 在$\angle ACB$内，作$\angle BCE=\angle ABC$，BD交CE于点P，则P为$\triangle ABC$的自相似点. ② $\frac{180}{7}$、$\frac{360}{7}$、$\frac{720}{7}$.

复习测试1

1. C 2. B 3. C 4. D 5. D 6. $x>-2$ -1 7. $3\sqrt{2}$ $-2ab^2$ 8. -1 $-12x^3+9x^2$ $-\frac{2b}{a^2-b^2}$

9. $4(1+b^2)(1+b)(1-b)$ 10. $4n$ 11. $\frac{2}{3}$ 12. (1) 2 (2) $9\sqrt{2}$ 13. (1) $-8a$ (2) $ab-2a\sqrt{b}+1$ 14. $\frac{7}{2}$ 15. (1) $\frac{m}{m+1}$ (2) 1 16. (1) $B-A=(a^2-a+3)-(a+2)=a^2-2a+1=(a-1)^2\geqslant0$ (2) $C-A=(a^2+3a+5)-(a+2)=a^2+2a+3=(a+1)^2+2$. ∵ $(a-1)^2\geqslant0$，∴ $(a+1)^2+2>0$，即$C-A>0$. ∴ $C>A$

选做题

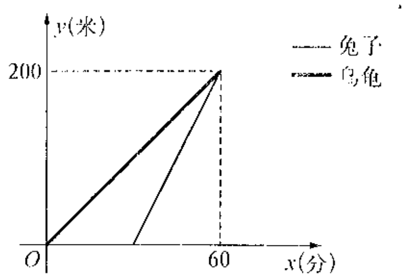
买大西瓜合算，说理过程略.

复习测试2

1. C 2. D 3. B 4. B 5. $x_1=0$，$x_2=1$ 6. 11 7. 1 8. 4 3 9. $2(x-1)+3x=13$ 10. 2或2.5 11. (1) $x=2$是增根，此方程无解. (2) $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$ 12. $-1<x<5$， 它的整数解是0，1，2，3，4 13. 设中型汽车有x辆，则小型汽车有$(50-x)$辆. $6x+4(50-x)=230$，$x=15$. 14. 设引进新设备前平均每天修路x米. 根据题意，得$\frac{600}{x}+\frac{3\,000-600}{2x}=30$. 解得$x=60$. 经检验，$x=60$是原方程的解，且符合题意. 15. 三人普通间12间，双人豪华间7间. 16. 设南瓜亩产量的增长率为x. 则$10(1+2x)\cdot2000(1+x)=60\,000$. 解得$x_1=0.5$，$x_2=-2$(舍去).

复习测试3

1. B 2. C 3. D 4. A 5. $y=-3x$ 6. $x\neq-2$ 7. -4 8. $(2,-6)$ 过点$(2,-6)$且平行于y轴的直线 9. $y=\frac{84}{x}$ 10. ①、④ 11. (1) ρ与V之间的表达式是$\rho=\frac{9.9}{V}$ (2) 当$\rho=1.1\ \mathrm{kg/m^3}$时，$V=9\ \mathrm{m^3}$ 12. (1) 略 (2) 高尔夫球的最大飞行高度是3.2米，球的起点与洞之间的距离是8米. 13. ① 如果经过A、B两点的函数图像是直线，可设函数表达式是$y=kx+b$，则有$\begin{cases}4=k+b,\\2=2k+b.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=-2,\\b=6.\end{cases}$ 所以这个函数表达式是$y=-2x+6$ ② 由于A、B两点横坐标、纵坐标的积相等，都等于4，所以，经过A、B两点的函数图像还可以是双曲线，其表达式为$y=\frac{4}{x}$ ③ 如果经过A、B两点的函数图像是抛物线，并且以$(2,2)$为顶点，经过$A(1,4)$. 设函数表达式是$y=a(x-2)^2+2$. 根据题意，得 $4=a(1-2)^2+2$，解得$a=2$. ∴ $y=2(x-2)^2+2$. 即$y=2x^2-8x+10$. 说明：本题答案不唯一. 14. (1) 设一张薄板的边长为x cm，它的出厂价为y元，基础价为n元，浮动价为kx元，则$y=kx+n$. 由表格中数据得$\begin{cases}20k+n=50,\\30k+n=70.\end{cases}$解得$\begin{cases}k=2,\\n=10.\end{cases}$ ∴ $y=2x+10$ (2) ① 设一张薄板的利润为P元，它的成本价为mx^2元，由题意得$P=y-mx^2=2x+10-mx^2$. 将$x=40$，$P=26$代入$P=2x+10-mx^2$中，得$m=\frac{1}{25}$. ∴ $P=2x+10-\frac{1}{25}x^2$ ② ∵ $P=2x+10-\frac{1}{25}x^2=-\frac{1}{25}(x-25)^2+35$. ∵ $-\frac{1}{25}<0$，∴ 当$x=25$(在5～50之间)时，P的最大值是35，即出厂一张边长为25 cm的薄板，所获得的利润最大，最大利润为35元. 15. (1) 设$y=kx+b\ (k\neq0)$，由已知，得$\begin{cases}5k+b=0.6,\\10k+b=1.1.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=0.1,\\b=0.1.\end{cases}$ ∴ $y=0.1x+0.1$ (2) 在$y=0.1x+0.1$中y随x的增大而增大，又当$y=6.7$时，$x=66$(分). 所以该教室连续使用66分钟学生将会开始稍感不适. 16. (1) 由图知，兔子的速度为：$400\div10=40$(米/分)，所以点B的横坐标为：$70-(1200-400)\div40=50$. 设线段BC所表示的函数表达式为$y_1=kx+b$. 则$\begin{cases}50k+b=400,\\70k+b=1\,200.\end{cases}$解得$\begin{cases}k=40,\\b=-1\,600.\end{cases}$所以线段$BC$所表示的函数表达式为$y_1=40x-1600$，其中$50\leqslant x\leqslant70$. 线段$OD$所表示的函数表达式为$y_2=20x$，其中$0\leqslant x\leqslant60$. (2) 出发10分后，兔子在路边的小树下睡了觉40分，小树距起点400米. (3) ①如图，同时到达终点.



(第16题)

②兔子所需时间：$1200\div40=30$(分)，乌龟所需时间：$800\div20=40$

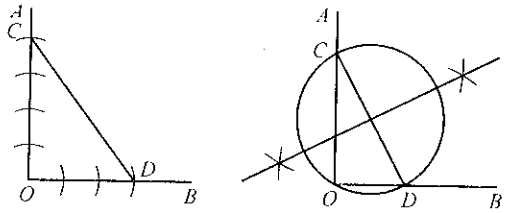
(分). 所以兔子先到终点.

选做题

(1) $y=(x-1)^2+1$ (2) ① $y=\frac{1}{x-1}$ $y=\frac{1}{x-1}+1$ ② 上 1 因为 $y=\frac{x-1}{x-2}=\frac{1}{x-2}+1$,所以,函数 $y=\frac{x-1}{x-2}$ 的图像可由函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像向右平移 2 个单位,再向上平移 1 个单位得到.

复习测试 4

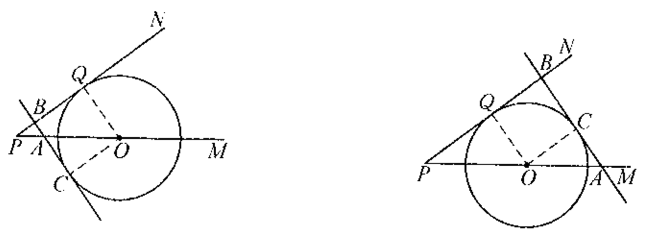
1. B 2. A 3. C 4. B 5. 80 6. 80 7. $2\sqrt{3}$ 8. 2 9. 50 10. 119° 11. 先证明四边形 $DBFE$ 为平行四边形,可得 $DE=BF$,再由 $BF=FC$,可得 $DE=FC$. 12. 由上面两个条件不能证明 $AB \parallel ED$. 有两种添加方法:第一种添加 ①$AB=ED$. 第二种添加 ③$\angle ACB=\angle DFE$. 证明略. 13. 方法一:如图①,在 OA,OB 上分别截取 $OC=4$,$OD=3$. 若 $CD=5$,则$\angle AOB=90°$. 方法二:如图②,在 OA,OB 上分别取点 C,D,以 CD 为直径画圆. 若点 O 在圆上,则$\angle AOB=90°$.



① ②

(第 13 题)

14. 连接 OD. ∵ $OB=OD$, $OB=BD$, ∴ $\triangle ODB$ 是等边三角形. ∴ $\angle DBO=60°$. ∴ $\angle OBC=\angle CBD=30°$. 在 $Rt\triangle OCB$ 中,$OC=OB\tan 30°=2\sqrt{3}$. ∴ $S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}OC\cdot OB=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 6=6\sqrt{3}$. ∴ 阴影部分的面积 $=S_{扇形AOB}-2S_{\triangle OBC}=9\pi-12\sqrt{3}$ 15. (1) 连接 OQ. ∵ PN 与⊙O 相切于点 Q, ∴ $OQ\perp PN$,即 $\angle OQP=90°$. ∵ $OP=10$, $OQ=6$, ∴ $PQ=\sqrt{10^2-6^2}=8$(cm) (2) 过点 Q 作 $OC\perp AB$,垂足为 C. ∵ 点 A 的运动速度为5 cm/s,点 B 的运动速度为4 cm/s,运动时间为 t s, ∴ $PA=5t$, $PB=4t$. ∵ $PO=10$, $PQ=8$, ∴ $\frac{PA}{PO}=\frac{PB}{PQ}$. ∵ $\angle P=\angle P$, ∴ $\triangle PAB\backsim\triangle POQ$. ∴ $\angle PBA=\angle PQO=90°$. ∵ $\angle BQO=\angle CBQ=\angle OCB=90°$, ∴ 四边形 $OCBQ$ 为矩形. ∴ $BQ=OC$. ∵ ⊙O的半径为 6, ∴ $BQ=OC=6$ 时,直线 AB 与⊙O 相切. ① 当 AB 运动到如图①所示的位置. $BQ=PQ-PB=8-4t$. 由 $BQ=6$,得 $8-4t=6$. 解得 $t=0.5$(s). ② 当 AB 运动到如图②所示的位置. $BQ=PB-PQ=4t-8$. 由 $BQ=6$,得 $4t-8=6$. 解得 $t=3.5$(s). 所以,当 t 为 0.5 s 或3.5 s时直线 AB 与 ⊙O 相切.



① ②

(第 15 题)

16. (1) $EA_1=FC$;提示:证明$\triangle ABE\cong\triangle C_1BF$ (2) 菱形(证明略) (3) 过点 E 作 $EG\perp AB$,则 $AG=BG=1$. 在 $Rt\triangle AEG$ 中,$AE=\frac{AG}{\cos A}=\frac{1}{\cos 30°}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 由(2)知 $AD=AB=2$, ∴ $ED=AD-AE=2-\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

选做题

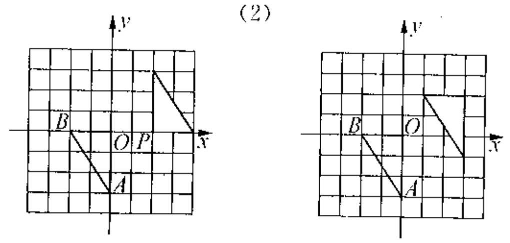
(1) 由 $\angle BFE=\angle B'FE$, $\angle BFE=\angle B'EF$,可证得$\angle B'FE=\angle B'EF$,从而证出 $B'E=B'F$. 而 $B'F=$

BF,所以 $B'E=BF$. (2) $a^2+b^2=c^2$,连接 BE,可证 $BE=BF$.

复习测试 5

1. D 2. C 3. C 4. B 5. 90° 6. 18 7. $\frac{1}{9}$ 8. $3\sqrt{2}$ 9. 6 10. (1,−2)

11. (1) (2)



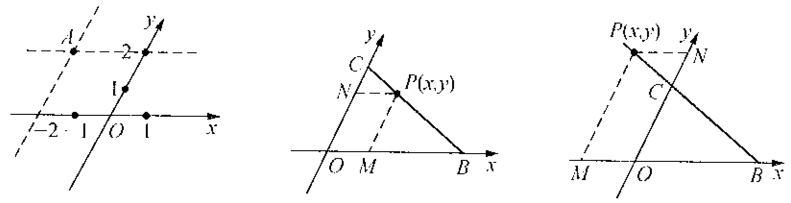
① ②

(第 11 题)

12. 原式 $=2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}+4\times 1=6$. 13. 过点 E、D 分别作 BC 的垂线,交 BC 于点 F、G. 在 $Rt\triangle EFC$ 中,因为 $FC=AE=20$,$\angle FEC=45°$,所以 $EF=20$. 在 $Rt\triangle DBG$ 中,$DG=EF=20$,$\angle BDG=37°$,因为 $\tan\angle BDG=\frac{BG}{DG}\approx 0.75$,所以 $BG\approx DG\times 0.75=20\times 0.75=15$. 而 $GF=DE=5$,所以 $BC=BG+GF+FC=15+5+20=40$. 所以大楼 BC 的高度是 40 米. 14. (1) ① $\sqrt{2}$ ② $\frac{9}{5}$或$\frac{5}{2}$ (2) 相似,连接 CD,与 EF 交于点 Q. ∵ CD 是 $Rt\triangle ABC$ 的中线, ∴ $CD=DB=\frac{1}{2}AB$. ∴ $\angle DCB=\angle B$. 由折叠可知,$\angle CQF=\angle DQF=90°$, ∴ $\angle DCB+\angle CFE=90°$. ∵ $\angle B+\angle A=90°$, ∴ $\angle CFE=\angle A$. 又∵ $\angle ACB=\angle FCE$, ∴ $\triangle CEF\backsim\triangle CBA$. 15. (1) 同意. 连接 EF. $\angle EGF=\angle D=90°$, $EG=AE=ED$, $EF=EF$. ∴ $Rt\triangle EGF\cong Rt\triangle EDF$. ∴ $GF=DF$ (2) 由(1)知, $GF=DF$. 设 $DF=x$, $BC=y$,则有 $GF=x$, $AD=y$. ∵ $DC=2DF$, ∴ $CF=x$, $DC=AB=BG=2x$. ∴ $BF=BG+GF=3x$. 在 $Rt\triangle BCF$ 中, $BC^2+CF^2=BF^2$,即 $y^2+x^2=(3x)^2$. ∴ $y=2\sqrt{2}x$. ∴ $\frac{AD}{AB}=\frac{y}{2x}=\sqrt{2}$ (3) $\frac{AD}{AB}=\frac{2\sqrt{n}}{n}$

选做题

(1) 如图①,点 A 即为所求 (2) $y=-\frac{3}{4}x+3$ (3) (2)中的结论仍然成立,如图③,当点 P 在线段 BC 的延长线上时,上述结论仍然成立. 理由如下:这时 $PN=-x$,$ON=PM=y$,$\frac{PN}{OB}=\frac{CN}{OC}$, ∴ $\frac{-x}{4}=\frac{y-3}{3}$,即 $y=-\frac{3}{4}x+3$.



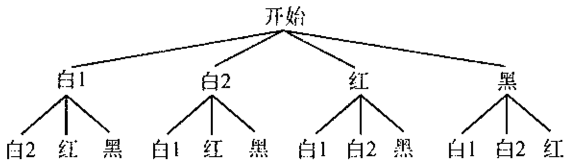
① ② ③

(选做题)

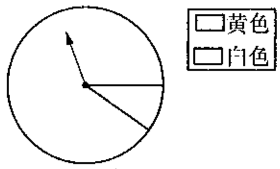
复习测试 6

1. A 2. C 3. C 4. D 5. $\frac{29}{56}$ 6. 2 7. 600 8. 如按每年平均增长人数近似相等进行估算,则为 1 038;如果按照 2013~2014 年增长进行估算,则为 980. (给出 980 至 1140 之间均可) 9. 60 13 10. 65 $\frac{2}{13}$ 略 11. (1) A (2) $140\div 7\times 30=600$(千克). 估计一个月该水果店可销售苹果 600 千克.

12. (1) 设红球的个数为 x 个，则根据题意，得$\frac{2}{2+1+x}=\frac{1}{2}$，解得 $x=1$，∴ 布袋里红球有 1 个. (2) 画树状图表示所有结果如下：



所以两次摸球共有 12 种等可能结果，其中两次摸到的球都是白球的情况有 2 种，所以两次摸到的球都是白球的概率为$\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$. 13. (1) 该抽奖方案符合厂家的设奖要求. 分别用黄 1、黄 2、白 1、白 2、白 3 表示这 5 个球. 从中任意摸出 2 个球，可能出现的结果有：(黄 1，黄 2)、(黄 1、白 1)、(黄 1，白 2)、(黄 1，白 3)、(黄 2，白 1)、(黄 2、白 2)、(黄 2、白 3)、(白 1、白 2)、(白 1、白 3)、(白 2、白 3)共 10 种，它们出现的可能性相同. 所有的结果中，满足摸到的 2 个球都是黄球(记为事件 A)的结果有 1 种，即(黄 1，黄 2)，所以 $P(A)=\frac{1}{10}$，即顾客获得大奖的概率为 10%，获得小奖的概率为 90%. (2) 本题答案不唯一，下列解法供参考. 如图，将转盘中圆心角为 36°的扇形区域涂上黄色，其他区域涂上白色. 顾客每购买一台该型号电视机，可获得一次转动转盘的机会，任意转动这个转盘，当转盘停止时，指针指向黄色区域获得大奖，指向白色区域获得小奖. 14. (1) 依次填 8，1.2，8 (2) 小明与小刚射击成绩的平均数都是 8，而小明射击成绩的方差小，因此成绩更稳定，所以，教练选择小明参加射击比赛. (3) 变小.



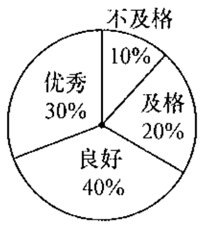
(第 13 题)

15. (1)

		7	8	
		3	4	
	8	3	4	8
	2	2	2	3
	0	0	1	2
0	1	2	3	4

(2) 如"甲城市 16 台自动售货机中，销售额最高为 58 元"等. (3) 略 (4) 图②，理由略. 16. (1) 由于该中学七年级男、女生比例为：250 : 200 = 5 : 4，所以该校从七年级学生中随机抽取 90 名学生，应当抽取 50 名男生和 40 名女生才合理. (2) 选择扇形统计图(如图)表示各种情况的百分比. (3) $450\times10\%=45$(人). 答：估计该校七年级学生体育测试成绩不及格 45 人.

某中学七年级 90 名学生体育测试成绩扇形统计图



(第 16 题)