2018 年普通高等学校招生全国统一考试
广东省文科数学模拟试卷(一)
参考答案及评分标准

评分标准：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数，选择题不给中间分.

1. D　由题可得 $z=\frac{1}{1+\mathrm{i}}=\frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$，则复数 z 的虚部为 $-\frac{1}{2}$.

2. C　因为 $A=(0,+\infty)$，$B=(-1,1)$，所以 $A\cup B=(-1,+\infty)$.

3. B　m 是 2 与 8 的等比中项，则 $m=\pm4$，所以选 B.

4. A　此点取自黑色部分的概率是 $\frac{4^2\pi-1^2\pi}{10^2\pi}=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$.

5. C　由 C 可知一条渐近线方程为 $bx-ay=0$，设 $F(c,0)$，则点 F 到 C 的一条渐近线的距离 $d=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b=2a$，则双曲线 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{5}$.

6. A　由 $\log_3(2x)+\log_3(4x+2)=2\log_3(3x)$，得 $x(x-4)=0$. 又 $2x>0$，故 $x=4$. 则数列前三项依次为 $\log_3 8$，$\log_3 12$，$\log_3 18$，$d=\log_3 12-\log_3 8=\log_3\frac{3}{2}$，从而第四项为 $\log_3 18+\log_3\frac{3}{2}=\log_3 27=3$.

7. B　由题可知该几何体为一个长方体截去了两个半圆柱而形成的，则该几何体的表面积为 $4\times6\times2+2(4\times6-4\pi)+2\times2\pi\times4=96+8\pi$.

8. B　对于选项 B，把 C 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x$，该函数为偶函数，其图象关于 y 轴对称.

9. D　$n=1,s=0$；$n=2,s=2$；$n=3,s=4$；…；$n=99,s=\frac{99^2-1}{2}$；$n=100,s=\frac{100^2}{2}$；$n=101>100$，结束. 所以选 D.

10. A　$\left[\frac{f(x)}{\mathrm{e}^x}\right]'=\frac{f'(x)-f(x)}{\mathrm{e}^x}\leqslant0$，但不可恒等于 0，即 $f(x)\geqslant f'(x)$ 恒成立，结合导数的几何意义，可知选 A.

11. C　设切线 MA 的方程为 $x=ty+m$，代入抛物线方程得 $y^2-ty-m=0$. 由直线与抛物线相切得 $\Delta=t^2+4m=0$，则 $A\left(\frac{t^2}{4},\frac{t}{2}\right)$，$B\left(\frac{t^2}{4},-\frac{t}{2}\right)$. 将点 A 的坐标代入 $x=ty+m$，得 $m=-\frac{t^2}{4}$，所以 $M\left(-\frac{t^2}{4},0\right)$.

故 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{4}=\frac{1}{4}\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{16}$. 当 $t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的最小值为 $-\frac{1}{16}$.

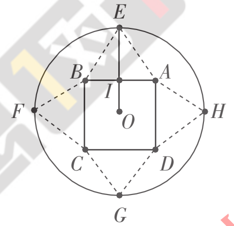
12. B　不妨设 $a<b<c$，则 $1-2^a=2^b-1$，得 $2^a+2^b=2$. 结合图象可知 $c\in(4,5)$，则 $2^a+2^b+2^c=2^c+2\in(18,34)$.

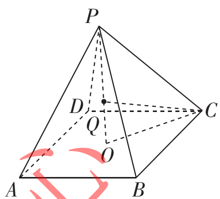
13. 1　因为 $|\boldsymbol{e}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2|^2=1-2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+3=1$，所以 $|\boldsymbol{e}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2|=1$.

14. 2　作出不等式组表示的可行域，由图可知(图略)，当直线 $y=-x+z$ 过点 $(4,-2)$ 时，$z=x+y$ 取得最大值，最大值为 2.

15. 14　$a_5=S_5-S_4=40-26=14$.

16. $\frac{500\sqrt{3}\pi}{27}$　如图，连结 OE 交 AB 于点 I，设 E,F,G,H 重合于点 P，正方形的边长为 $x(x>0)$，则 $OI=\frac{x}{2}$，$IE=6-\frac{x}{2}$. 因为该四棱锥的侧面积是底面积的 2 倍，所以 $4\cdot\frac{x}{2}\left(6-\frac{x}{2}\right)=2x^2$，解得 $x=4$. 设该四棱锥的外接球的球心为 Q，半径为 R，则 $OC=2\sqrt{2}$，$OP=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，$R^2=(2\sqrt{3}-R)^2+(2\sqrt{2})^2$，解得 $R=\frac{5}{\sqrt{3}}$，外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{500\sqrt{3}\pi}{27}$.





17. 解：(1)因为 $b^2+c^2=\frac{\sqrt{3}}{3}abc+a^2$，所以 $b^2+c^2-a^2=\frac{\sqrt{3}}{3}abc$. ………… 2 分

又因为 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$， ………… 4 分

所以 $2bc\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}abc$. ………… 5 分

即 $a=2\sqrt{3}\cos A$. ………… 6 分

(2)因为 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 $a=2\sqrt{3}\cos A=\sqrt{3}$. ………… 7 分

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $b=1$， ………… 9 分

$C=\pi-A-B=\frac{\pi}{2}$， ………… 10 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………… 12 分

18. 解：(1)根据题意完成下面的列联表：

	积极性	懈怠性	总计
男	20	10	30
女	12	8	20
总计	32	18	50

………… 3 分

根据列联表中的数据，得到 $K^2=\frac{50\times(20\times8-10\times12)^2}{30\times20\times32\times18}\approx0.231<2.706$， ………… 5 分

所以没有 90% 的把握认为“评定类型与性别有关”. ………… 6 分

(2)设步行数在 3001～6000 中的男性的编号为 1,2,女性的编号为 a,b,c.

选取三位的所有情况为:$(1,2,a),(1,2,b),(1,2,c),(1,a,b),(1,a,c),(1,b,c),(2,a,b),(2,a,c),(2,b,c)$,$(a,b,c)$共 10 种情形. ………………………………………………………………… 8 分

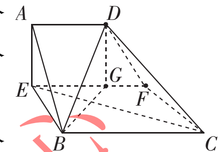
符合条件的情况有:$(1,2,a),(1,2,b),(1,2,c)$共 3 种情形. ……………………………… 10 分

故所求概率为$\frac{3}{10}$. ……………………………………………………………………… 12 分

19.(1)证明:由题可得 $EF /\!/ AD$,则 $AE\perp EF$, ……………………………………………… 1 分

又 $AE\perp CF$,且 $EF\cap CF=F$,所以 $AE\perp$平面 $EBCF$. ………………………… 3 分

因为 $AE\subset$平面 $AEFD$,所以平面 $AEFD\perp$平面 $EBCF$. ……………………… 5 分



(2)如右图,过点 D 作 $DG /\!/ AE$ 交 EF 于点 G,连结 BG,则 $DG\perp$平面 $EBCF$,$DG\perp EC$.

又 $BD\perp EC$,$BD\cap DG=D$,所以 $EC\perp$平面 BDG,$EC\perp BG$. ………………………… 6 分

易得$\triangle EGB\backsim\triangle BEC$,则$\frac{EG}{EB}=\frac{EB}{BC}$,得 $EB=2\sqrt{2}$. ……………………………………… 7 分

设点 F 到平面 $ABCD$ 的距离为 h,

因为 $V_{F-ABC}=V_{A-BCF}$,所以 $S_{\triangle ABC}\cdot h=S_{\triangle BCF}\cdot AE$. ……………………………………… 8 分

则 $AB=4$,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times4\times4=8$. ……………………………………………………… 9 分

又因为 $BC\perp AE$,$BC\perp EB$,$AE\cap EB$ 于 E,所以 $BC\perp$平面 AEB,故 $AB\perp BC$,

又因为 $S_{\triangle BCF}=\frac{1}{2}\times4\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$,$AE=EB=2\sqrt{2}$. ……………………………………… 10 分

所以 $h=\frac{4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}{8}=2$,故点 F 到平面 $ABCD$ 的距离为 2. ……………………… 12 分

20.解:(1)由题意可得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1\end{cases}$, ……………………………………………………………… 2 分

解得$\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$.故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………… 4 分

(2)由题意可知,直线 l 的斜率存在且不为 0,

故可设直线 l 的方程为 $y=kx+m(m\neq0)$,点 P,Q 的坐标分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$,消去 y 得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$,

则 $\Delta=64k^2m^2-16(1+4k^2)(m^2-1)=16(4k^2-m^2+1)>0$,且 $x_1+x_2=\frac{-8km}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{1+4k^2}$.

……………………………………………………………………………………………… 6 分

故 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$. ……………………………… 8 分

又直线 OP,l,OQ 的斜率成等比数列,则$\frac{y_2}{x_2}\cdot\frac{y_1}{x_1}=k^2$,

即$\frac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}=k^2$,所以$\frac{-8k^2m^2}{1+4k^2}+m^2=0$. …………………………… 10 分

又 $m\neq0$,所以 $k^2=\frac{1}{4}$.又结合图象可知,$k=-\frac{1}{2}$,所以直线 l 的斜率为定值. ………………… 12 分

21. 解:(1)$f'(x)=e^x-2x-a$, ………………………………………… 1 分

令 $g(x)=e^x-2x-a$,则 $g'(x)=e^x-2$. ………………………………………… 2 分

则当 $x\in(-\infty,\ln 2)$时,$g'(x)<0$,当 $x\in(\ln 2,+\infty)$时,$g'(x)>0$. ………………………… 3 分

所以函数 $g(x)$在 $x=\ln 2$ 取得最小值,$g(\ln 2)=2-2\ln 2-a\geqslant 0$. ………………………… 4 分

故 $f'(x)\geqslant 0$,即函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是单调递增函数. ………………………………… 5 分

(2)当 $x>0$ 时,$e^x-x^2-ax\geqslant 1-x$,即 $a\leqslant\dfrac{e^x}{x}-x-\dfrac{1}{x}+1$. ………………………… 6 分

令 $h(x)=\dfrac{e^x}{x}-x-\dfrac{1}{x}+1(x>0)$,则 $h'(x)=\dfrac{e^x(x-1)-x^2+1}{x^2}=\dfrac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$. ………………… 7 分

令 $\varphi(x)=e^x-x-1(x>0)$,则 $\varphi'(x)=e^x-1>0$.

当 $x\in(0,+\infty)$时,$\varphi(x)$单调递增,$\varphi(x)>\varphi(0)=0$. ………………………………… 9 分

则当 $x\in(0,1)$时,$h'(x)<0$,所以 $h(x)$单调递减.

当 $x\in(1,+\infty)$时,$h'(x)>0$,所以 $h(x)$单调递增. ………………………………………… 11 分

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=e-1$. 所以 $a\in(-\infty,e-1]$. ………………………………………… 12 分

22. 解:(1)因为圆 C_1 的普通方程为 $x^2+y^2-4x-8y=0$,

把 $x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$ 代入方程得 $\rho^2-4\rho\cos\theta-8\rho\sin\theta=0$.

所以 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta+8\sin\theta$, ………………………………………… 2 分

C_2 的平面直角坐标系方程为 $y=\sqrt{3}x$. ……………………………………………………… 4 分

(2)分别将 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$,$\theta=\dfrac{\pi}{6}$代入 $\rho=4\cos\theta+8\sin\theta$,得 $\rho_1=2+4\sqrt{3}$,$\rho_2=4+2\sqrt{3}$. ………………… 8 分

则△OMN 的面积为$\dfrac{1}{2}\times(2+4\sqrt{3})\times(4+2\sqrt{3})\times\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{6}\right)=8+5\sqrt{3}$. ………………… 10 分

23. 解:(1)由题意可得 $g(x)=\begin{cases}-3x+3, & x\leqslant -2\\ -5x-1, & -2<x<\dfrac{1}{4},\\ 3x-3, & x\geqslant\dfrac{1}{4}\end{cases}$ ………………………………………… 1 分

当 $x\leqslant -2$ 时,$-3x+3<6$,得 $x>-1$,无解. ………………………………………… 2 分

当$-2<x<\dfrac{1}{4}$时,$-5x-1<6$,得 $x>-\dfrac{7}{5}$,即$-\dfrac{7}{5}<x<\dfrac{1}{4}$. ………………………………… 3 分

当 $x\geqslant\dfrac{1}{4}$时,$3x-3<6$,得$\dfrac{1}{4}\leqslant x<3$. ………………………………………… 4 分

综上,$g(x)<6$ 的解集为$\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{7}{5}<x<3\right\}$. ………………………………………… 5 分

(2)因为存在 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,使得 $f(x_1)=-g(x_2)$成立,

所以$\{y\mid y=f(x),x\in\mathbf{R}\}\cap\{y\mid y=-g(x),x\in\mathbf{R}\}\neq\varnothing$. ………………………… 6 分

又 $f(x)=3|x-a|+|3x+1|\geqslant|(3x-3a)-(3x+1)|=|3a+1|$, ………………………… 7 分

由(1)可知 $g(x)\in\left[-\dfrac{9}{4},+\infty\right)$,则$-g(x)\in\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$. ………………………………… 8 分

所以$|3a+1|\leqslant\dfrac{9}{4}$,解得$-\dfrac{13}{12}\leqslant a\leqslant\dfrac{5}{12}$.

故 a 的取值范围为$\left[-\dfrac{13}{12},\dfrac{5}{12}\right]$. ………………………………………… 10 分