南京市、盐城市2018届高三年级第二次模拟考试

数　学

注意事项：

1．本试卷共4页，包括填空题（第1题～第14题）、解答题（第15题～第20题）两部分．本试卷满分为160分，考试时间为120分钟．

2．答题前，请务必将自己的姓名、学校、班级写在答题纸上．试题的答案写在答题纸上对应题目的答案空格内．考试结束后，交回答题纸．

参考公式：

样本数据x_1，x_2，…，x_n的方差$s^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$，其中$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$．

锥体体积公式：$V=\frac{1}{3}Sh$，其中S为锥体的底面积，h为锥体的高．

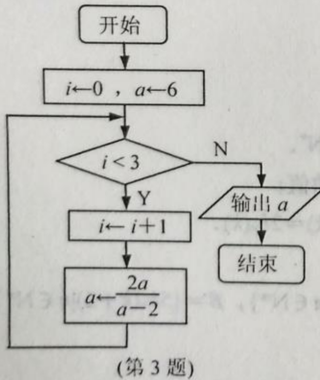
一、填空题（本大题共14小题，每小题5分，计70分．不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上）

1．函数$f(x)=\lg(2-x)$的定义域为__▲__．

2．已知复数z满足$\frac{z}{1+2i}=i$，其中i为虚数单位，则复数z的模为__▲__．

3．执行如图所示的算法流程图，则输出a的值为__▲__．

4．某学生5次数学考试成绩的茎叶图如图所示，则这组数据的方差为__▲__．



（第3题）

7	9			
8	3	5	7	
9	1			

（第4题）

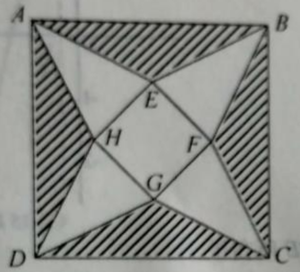
5．3名教师被随机派往甲、乙两地支教，每名教师只能被派往其中一个地方，则恰有2名教师被派往甲地的概率为__▲__．

6．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．若$S_{15}=30$，$a_7=1$，则S_9的值为__▲__．

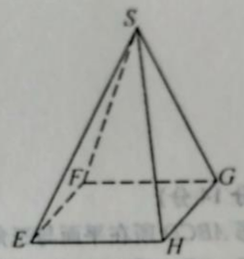
7. 在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．若 $b\sin A\sin B+a\cos^2B=2c$，则 $\frac{a}{c}$ 的值为___▲___．

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 C: $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的两条渐近线与圆 O: $x^2+y^2=2$ 的四个交点依次为 A，B，C，D．若矩形 $ABCD$ 的面积为 b，则 b 的值为___▲___．

9. 在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 内剪去四个全等的等腰三角形（如图 1 中阴影部分），折叠成底面边长为 $\sqrt{2}$ 的正四棱锥 $S-EFGH$（如图 2），则正四棱锥 $S-EFGH$ 的体积为___▲___．



（图 1）



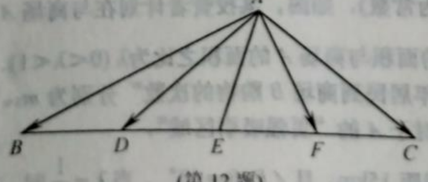
（图 2）

（第 9 题）

10. 已知函数 $f(x)$是定义在 R 上的偶函数，且当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=x^2+x$．若 $f(a)+f(-a)<4$，则实数 a 的取值范围为___▲___．

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $y=\frac{m}{x+1}(m>0)$在 $x=1$ 处的切线为 l，则点(2，−1)到直线 l 的距离的最大值为___▲___．

12. 如图，在△ABC 中，边 BC 的四等分点依次为 D，E，F．若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=5$，则 AE 长为___▲___．



（第 12 题）

13. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知 A，B 为圆 C: $(x+4)^2+(y-a)^2=16$ 上两个动点，且 $AB=2\sqrt{11}$．若直线 l:$y=2x$ 上存在唯一的一个点 P，使得 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{OC}$，则实数 a 的值为___▲___．

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^3+3x^2+t, & x<0,\\ x, & x\geq 0,\end{cases}$ $t\in$ R．若函数 $g(x)=f(f(x)-1)$恰有 4 个不同的零点，则 t 的取值范围为___▲___．

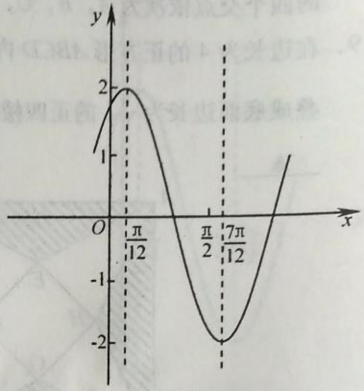
二、解答题（本大题共 6 小题，计 90 分．解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内）

15．（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，直线 $x=\dfrac{\pi}{12}$，$x=\dfrac{7\pi}{12}$ 是其相邻的两条对称轴．

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式；

(2) 若 $f(\dfrac{\alpha}{2})=-\dfrac{6}{5}$，且 $\dfrac{2\pi}{3}<\alpha<\dfrac{7\pi}{6}$，求 $\cos\alpha$ 的值．



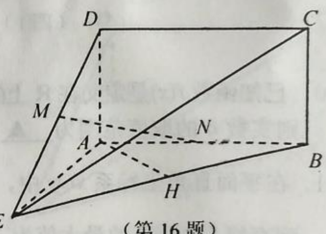
（第 15 题）

16．（本小题满分 14 分）

如图，矩形 $ABCD$ 所在平面与三角形 ABE 所在平面互相垂直，$AE=AB$，M，N，H 分别为 DE，AB，BE 的中点．

(1) 求证：$MN \parallel$ 平面 BEC；

(2) 求证：$AH\perp CE$．



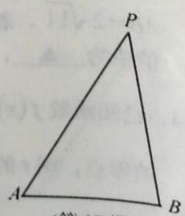
（第 16 题）

17．（本小题满分 14 分）

调查某地居民每年到商场购物次数 m 与商场面积 S、到商场距离 d 的关系，得到关系式 $m=k\times\dfrac{S}{d^2}$（k 为常数）．如图，某投资者计划在与商场 A 相距 10km 的新区新建商场 B，且商场 B 的面积与商场 A 的面积之比为 $\lambda\ (0<\lambda<1)$．记"每年居民到商场 A 购物的次数"、"每年居民到商场 B 购物的次数"分别为 m_1、m_2，称满足 $m_1<m_2$ 的区域叫做商场 B 相对于 A 的"更强吸引区域"．

(1) 已知 P 与 A 相距 15km，且 $\angle PAB=60°$．当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，居住在 P 点处的居民是否在商场 B 相对于 A 的"更强吸引区域"内？请说明理由；

(2) 若要使与商场 B 相距 2km 以内的区域(含边界)均为商场 B 相对于 A 的"更强吸引区域"，求 λ 的取值范围．



（第 17 题）

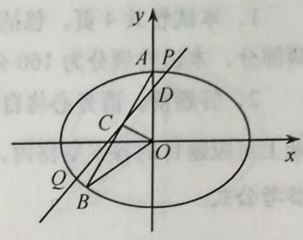
18．(本小题满分 16 分)

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 E: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，上顶点 A 到右焦点的距离为 $\sqrt{2}$．过点 $D(0,\ m)(m\neq 0)$ 作不垂直于 x 轴，y 轴的直线 l 交椭圆 E 于 P，Q 两点，C 为线段 PQ 的中点，且 $AC\perp OC$.

(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 求实数 m 的取值范围；

(3) 延长 AC 交椭圆 E 于点 B，记△AOB 与△AOC 的面积分别为 S_1，S_2，若 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{8}{3}$，求直线 l 的方程.



(第 18 题)

19．(本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x)=x(e^x-2)$，$g(x)=x-\ln x+k$，$k\in\mathbf{R}$，其中 e 为自然对数的底数．记函数 $F(x)=f(x)+g(x)$.

(1) 求函数 $y=f(x)+2x$ 的极小值；

(2) 若 $F(x)>0$ 的解集为$(0,+\infty)$，求 k 的取值范围；

(3) 记 $F(x)$的极值点为 m.求证：函数 $G(x)=|F(x)|+\ln x$ 在区间$(0,m)$上单调递增.(极值点是指函数取极值时对应的自变量的值)

20．(本小题满分 16 分)

对于数列$\{a_n\}$，定义 $b_n(k)=a_n+a_{n+k}$，其中 n，$k\in\mathbf{N}^*$.

(1) 若 $b_n(2)-b_n(1)=1$，$n\in\mathbf{N}^*$，求 $b_n(4)-b_n(1)$的值；

(2) 若 $a_1=2$，且对任意的 n，$k\in\mathbf{N}^*$，都有 $b_{n+1}(k)=2b_n(k)$.

(i)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(ii)设 k 为给定的正整数，记集合 $A=\{b_n(k)|n\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{5b_n(k+2)|n\in\mathbf{N}^*\}$，求证：$A\cap B=\phi$.

南京市、盐城市2018届高三第二次模拟考试

数学附加题

注意事项：

1．附加题供选考物理的考生使用．

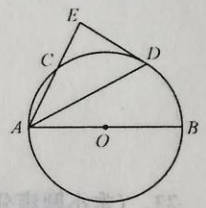
2．本试卷共40分，考试时间30分钟．

3．答题前，考生务必将自己的姓名、学校、班级写在答题卡上．试题的答案写在答题纸上对应题目的答案空格内.考试结束后，交回答题卡．

21．【选做题】在A、B、C、D四小题中只能选做2题，每小题10分，共计20分．请在答题纸指定区域内作答．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

A．选修4—1：几何证明选讲

如图，AB是圆O的直径，AC是弦，$\angle BAC$的平分线AD交圆O于点D，$DE\perp AC$且交AC的延长线于点E，求证：DE是圆O的切线．



B．选修4—2：矩阵与变换

已知$\alpha=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$为矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & a\\-1 & 2\end{bmatrix}$属于实数λ的一个特征向量，求λ和$A^2$.

C．选修4—4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系中，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=t,\\y=\sqrt{3}t+2\end{cases}$（$t$为参数），圆$C$的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=a\sin\theta\end{cases}$（$a>0,\theta$为参数），点$P$是圆$C$上的任意一点.若点$P$到直线$l$距离的最大值为3，求$a$的值.

D．选修 4—5：不等式选讲

对任意 $x,y\in\mathrm{R}$，求 $|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$ 的最小值.

【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共 20 分．请在答题卡指定区域内作答．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22．(本小题满分 10 分)

甲，乙两人站在 P 点处分别向 A,B,C 三个目标进行射击，每人向三个目标各射击一次，每人每次射击每个目标均相互独立，且两人各自击中 A,B,C 的概率分别都为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$.

(1)设 X 表示甲击中目标的个数，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

(2)求甲乙两人共击中目标数为 2 个的概率.

23．(本小题满分 10 分)

已知 $n\in\mathrm{N}^*$，且 $n\geqslant4$，数列 T: a_1，a_2，…，a_n 中的每一项均在集合 $M=\{1,2,\cdots,n\}$ 中，且任意两项不相等.

(1)若 $n=7$，且 $a_2<a_3<a_4<a_5<a_6$,求数列 T 的个数；

(2)若数列 T 中存在唯一的 a_k ($k\in\mathrm{N}^*$，且 $k<n$)，满足 $a_k>a_{k+1}$，求所有符合条件的数列 T 的个数.

南京市、盐城市2018届高三年级第二次模拟考试

数学参考答案

说明：

1. 本解答给出的解法供参考．如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则．

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后续部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后续部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4. 只给整数分数，填空题不给中间分数．

一、填空题（本大题共14小题，每小题5分，计70分．不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上）

1．$(-\infty，2)$　2．$\sqrt{5}$　3．3　4．16　5．$\dfrac{3}{8}$　6．-9　7．2　8．$\sqrt{7}$

9．$\dfrac{4}{3}$　10．$(-1，1)$　11．$\sqrt{2}$　12．$\sqrt{6}$　13．2或-18　14．$[-4，0)$

二、解答题（本大题共6小题，计90分.解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内）

15．（本小题满分14分）

解：（1）设$f(x)$的周期为T，则$\dfrac{T}{2}=\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}$，所以$T=\pi$．

又$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$，所以$\omega=2$，所以$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$．　……………………………3分

因为点$(\dfrac{\pi}{12}，2)$在函数图象上，所以$2\sin(2\times\dfrac{\pi}{12}+\varphi)=2$，即$\sin(\dfrac{\pi}{6}+\varphi)=1$．

因为$-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，所以$f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$．　……………………………7分

（2）由$f(\dfrac{\alpha}{2})=-\dfrac{6}{5}$，得$\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{3})=-\dfrac{3}{5}$．

因为$\dfrac{2\pi}{3}<\alpha<\dfrac{7\pi}{6}$，所以$\pi<\alpha+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{3\pi}{2}$，

所以$\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{3})=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\dfrac{\pi}{3})}=-\dfrac{4}{5}$．　……………………………10分

所以$\cos\alpha=\cos[(\alpha+\dfrac{\pi}{3})-\dfrac{\pi}{3}]=\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{3})\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{3})\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=-\dfrac{4}{5}\times\dfrac{1}{2}+(-\dfrac{3}{5})\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{3\sqrt{3}+4}{10}$．　……………………………14分

（1）**解法一：**

取 CE 中点 F，连接 FB，MF.

因为 M 为 DE 的中点，F 为 CE 的中点，

所以 $MF /\!/ CD$ 且 $MF=\frac{1}{2}CD$. ……………………2 分

又因为在矩形 $ABCD$ 中，N 为 AB 的中点，

所以 $BN /\!/ CD$ 且 $BN=\frac{1}{2}CD$，

所以 $MF /\!/ BN$ 且 $MF=BN$，所以四边形 $BNMF$ 为平行四边形，

所以 $MN /\!/ BF$. ……………………4 分

又 $MN \not\subset$ 平面 BEC，$BF \subset$ 平面 BEC，

所以 $MN /\!/$ 平面 BEC. ……………………6 分

解法二：

取 AE 中点 G，连接 MG，GN.

因为 G 为 AE 的中点，M 为 DE 的中点，所以 $MG /\!/ AD$.

又因为在矩形 $ABCD$ 中，$BC /\!/ AD$，所以 $MG /\!/ BC$.

又因为 $MG \not\subset$ 平面 BEC，$BC \subset$ 平面 BEC，

所以 $MG /\!/$ 平面 BEC. ……………………2 分

因为 G 为 AE 的中点，N 为 AB 的中点，所以 $GN /\!/ BE$.

又因为 $GN \not\subset$ 平面 BEC，$BE \subset$ 平面 BEC，所以 $GN /\!/$ 平面 BEC.

又因为 $MG \cap GN=G$，MG，$GN \subset$ 平面 GMN，

所以平面 $GMN /\!/$ 平面 BEC. ……………………4 分

又因为 $MN \subset$ 平面 GMN，所以 $MN /\!/$ 平面 BEC. ……………………6 分

（2）因为四边形 $ABCD$ 为矩形，所以 $BC \perp AB$.

因为平面 $ABCD \perp$ 平面 ABE，平面 $ABCD \cap$ 平面 $ABE=AB$，$BC \subset$ 平面 $ABCD$，且 $BC \perp AB$，

所以 $BC \perp$ 平面 ABE. ……………………8 分

因为 $AH \subset$ 平面 ABE，所以 $BC \perp AH$.

因为 $AB=AE$，H 为 BE 的中点，所以 $BE \perp AH$. ……………………10 分

因为 $BC \cap BE=B$，$BC \subset$ 平面 BEC，$BE \subset$ 平面 BEC，

所以 $AH \perp$ 平面 BEC. ……………………12 分

又因为 $CE \subset$ 平面 BEC，所以 $AH \perp CE$. ……………………14 分

17.（本小题满分 14 分）

解：设商场 A、B 的面积分别为 S_1、S_2，点 P 到 A、B 的距离分别为 d_1、d_2，

则 $S_2=\lambda S_1$，$m_1=k\frac{S_1}{d_1^2}$，$m_2=k\frac{S_2}{d_2^2}$，k 为常数，$k>0$.

（1）在 $\triangle PAB$ 中，$AB=10$，$PA=15$，$\angle PAB=60°$，

由余弦定理，得 $d_2^2=PB^2=AB^2+PA^2-2AB\cdot PA\cos60°$

$$=10^2+15^2-2\times10\times15\times\frac{1}{2}=175.$$ ……………………2 分

又 $d_1^2=PA^2=225$，

此时，$m_1-m_2=k\frac{S_1}{d_1^2}-k\frac{S_2}{d_2^2}=k\frac{S_1}{d_1^2}-k\frac{\lambda S_1}{d_2^2}=kS_1(\frac{1}{d_1^2}-\frac{\lambda}{d_2^2})$， ……………………4 分

将 $\lambda=\frac{1}{2}$，$d_1^2=225$，$d_2^2=175$ 代入，得 $m_1-m_2=kS_1(\frac{1}{225}-\frac{1}{350})$.

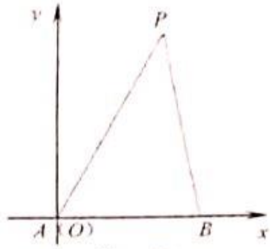
因为 $kS_1>0$，所以 $m_1>m_2$，

即居住在 P 点处的居民不在商场 B 相对于 A 的"更强吸引区域"内． ……………………6 分

（2）解法一：

以 AB 所在直线为 x 轴，A 为原点，建立如图所示的平面直角坐标系，

则 $A(0,\ 0)$，$B(10,\ 0)$，设 $P(x,\ y)$，



（第 17 题）

由 $m_1<m_2$ 得，$k\dfrac{S_1}{{d_1}^2}<k\dfrac{S_2}{{d_2}^2}$，将 $S_2=\lambda S_1$ 代入，得 ${d_2}^2<\lambda {d_1}^2$． ……8 分

代入坐标，得 $(x-10)^2+y^2<\lambda(x^2+y^2)$，

化简得 $(1-\lambda)x^2+(1-\lambda)y^2-20x+100<0$． ……………………10 分

因为 $0<\lambda<1$，配方得 $(x-\dfrac{10}{1-\lambda})^2+y^2<(\dfrac{10\sqrt{\lambda}}{1-\lambda})^2$，

所以商场 B 相对于 A 的"更强吸引区域"是：圆心为 $C(\dfrac{10}{1-\lambda},\ 0)$，半径为 $r_1=\dfrac{10\sqrt{\lambda}}{1-\lambda}$ 的圆的内部．

与商场 B 相距 2 km 以内的区域(含边界)是：圆心为 $B(10,\ 0)$，半径为 $r_2=2$ 的圆的内部及圆周．

由题设，圆 B 内含于圆 C，即 $BC<|r_1-r_2|$． ……………………12 分

因为 $0<\lambda<1$，所以 $\dfrac{10}{1-\lambda}-10<\dfrac{10\sqrt{\lambda}}{1-\lambda}-2$，

整理得 $4\lambda-5\sqrt{\lambda}+1<0$，解得 $\dfrac{1}{16}<\lambda<1$．

所以，所求 λ 的取值范围是 $(\dfrac{1}{16},\ 1)$． ……………………14 分

解法二：

要使与商场 B 相距 2 km 以内的区域(含边界)均为商场 B 相对于 A 的"更强吸引区域"，

则当 $d_2\leqslant 2$ 时，不等式 $m_1<m_2$ 恒成立．

由 $m_1<m_2$，得 $k\dfrac{S_1}{{d_1}^2}<k\dfrac{S_2}{{d_2}^2}=k\dfrac{\lambda S_1}{{d_2}^2}$，化简得 ${d_1}^2>\dfrac{{d_2}^2}{\lambda}$． ……………………8 分

设 $\angle PBA=\theta$，

则 ${d_1}^2=PA^2=AB^2+PB^2-2AB\cdot PB\cos\theta=100+{d_2}^2-20d_2\cos\theta$， ……………………10 分

所以 $100+{d_2}^2-20d_2\cos\theta>\dfrac{{d_2}^2}{\lambda}$，即 $\dfrac{100+{d_2}^2-\dfrac{{d_2}^2}{\lambda}}{20d_2}>\cos\theta$．

上式对于任意的 $\theta\in[0,\ \pi]$ 恒成立，则有 $\dfrac{100+{d_2}^2-\dfrac{{d_2}^2}{\lambda}}{20d_2}>1$， ……………………12 分

即 $1-\dfrac{1}{\lambda}>20\cdot\dfrac{1}{d_2}-100\cdot(\dfrac{1}{d_2})^2=-100(\dfrac{1}{d_2}-\dfrac{1}{10})^2+1$ (*)．

由于 $d_2\leqslant 2$，所以 $\dfrac{1}{d_2}\geqslant\dfrac{1}{2}$．

当 $\dfrac{1}{d_2}=\dfrac{1}{2}$ 时，不等式(*)右端的最大值为 -15，

所以 $1-\dfrac{1}{\lambda}>-15$，解得 $\lambda>\dfrac{1}{16}$．

又 $0<\lambda<1$，

所以 λ 的取值范围是 $(\dfrac{1}{16},\ 1)$． ……………………14 分

18.（本小题满分 16 分）

解：（1）因为$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ a=\sqrt{2},\end{cases}$　所以 $c=1$，$b^2=a^2-c^2=1$．

所以椭圆 E 的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$．　……………………………2 分

解法一：

（2）由（1）得 $A(0,1)$．

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$C(x_0,y_0)$，其中 x_0，y_0 均不为 0，且 $x_1\neq x_2$．

因为 P，Q 两点都在椭圆 E 上，所以 $x_1^2+2y_1^2=2$ 且 $x_2^2+2y_2^2=2$，

两式相减得$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\times\dfrac{y_0}{x_0}=-\dfrac{1}{2}$．　……………………………4 分

又$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_0-m}{x_0}$，所以$\dfrac{y_0-m}{x_0}\times\dfrac{y_0}{x_0}=-\dfrac{1}{2}$，　……………………………6 分

即 $x_0^2=2y_0(m-y_0)$．　①

又 $AC\perp OC$，所以$\dfrac{y_0-1}{x_0}\times\dfrac{y_0}{x_0}=-1$，　……………………………8 分

即 $x_0^2=y_0(1-y_0)$．　②

由①②得 $y_0=2m-1$，$x_0^2=(1-2m)(2m-2)>0$，

所以$\dfrac{1}{2}<m<1$．　……………………………10 分

（3）设 $B(x_3,y_3)$，点 B 在椭圆 E 上，所以 $x_3^2+2y_3^2=2$．

又 $AC\perp OC$，所以$\dfrac{y_3-1}{x_3}\times\dfrac{y_0}{x_0}=-1$，即 $y_3=-\dfrac{x_0}{y_0}x_3+1$，

代入上式消去 y_3，得 $x_3=\dfrac{4x_0y_0}{y_0^2+2x_0^2}$，　……………………………12 分

所以$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{1}{2}AO\times|x_3|}{\frac{1}{2}AO\times|x_0|}=|\dfrac{x_3}{x_0}|=|\dfrac{4y_0}{y_0^2+2x_0^2}|$．

由（2）知 $y_0=2m-1$，$x_0^2=(1-2m)(2m-2)$，$\dfrac{1}{2}<m<1$，

所以$\dfrac{S_1}{S_2}=|\dfrac{4(2m-1)}{(2m-1)^2+2(1-2m)(2m-2)}|=|\dfrac{4}{3-2m}|=\dfrac{4}{3-2m}$．　……………………………14 分

因为$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{8}{3}$，所以$\dfrac{4}{3-2m}=\dfrac{8}{3}$，解得 $m=\dfrac{3}{4}$，

此时 $y_0=2m-1=\dfrac{1}{2}$，$x_0^2=(1-2m)(2m-2)=\dfrac{1}{4}$，所以 $x_0=\pm\dfrac{1}{2}$，

所以 C 点坐标为$(\pm\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$，$D$ 点坐标为$(0,\dfrac{3}{4})$，

所以直线 l 的方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$．　……………………………16 分

解法二：

（2）由（1）得 $A(0,1)$．设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$C(x_0,y_0)$．

设直线 l 方程为 $y=kx+m(k\neq0)$，

将其与椭圆 E 的方程联立，消去 y 得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$　(*)，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-4km}{1+2k^2}$，　……………………………4 分

所以 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{-2km}{1+2k^2}$，$y_0=kx_0+m=\dfrac{m}{1+2k^2}$，即 $C(\dfrac{-2km}{1+2k^2},\dfrac{m}{1+2k^2})$，

所以 $k_{AC}=\dfrac{y_0-1}{x_0}=\dfrac{\dfrac{m}{1+2k^2}-1}{\dfrac{-2km}{1+2k^2}}=\dfrac{2k^2+1-m}{2km}$．　……………………………6 分

又因为 $k_{OC}=\dfrac{y_0}{x_0}=\dfrac{\dfrac{m}{1+2k^2}}{\dfrac{-2km}{1+2k^2}}=-\dfrac{1}{2k}$，且 $AC\perp OC$，

所以 $k_{AC}\times k_{OC}=\dfrac{2k^2+1-m}{2km}\times(-\dfrac{1}{2k})=-1$，

整理得 $m=\dfrac{2k^2+1}{4k^2+1}$．　……………………………8 分

因为 $k\neq0$，则 $m=\dfrac{2k^2+1}{4k^2+1}=\dfrac{4k^2+1-2k^2}{4k^2+1}=1-\dfrac{2k^2}{4k^2+1}=1-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2k^2}}\in(\dfrac{1}{2},1)$，

所以实数 m 的取值范围为 $(\dfrac{1}{2},1)$．　……………………………10 分

（3）设 $B(x_3,y_3)$，

$k_{AB}=-\dfrac{1}{k_{OC}}=2k$，所以直线 AB 的方程为 $y=2kx+1$，

与椭圆 E 方程联立解得 $x=-\dfrac{8k}{1+8k^2}$ 或 0（舍），即 $x_3=-\dfrac{8k}{1+8k^2}$．　……………………12 分

又因为 $x_0=\dfrac{-2km}{1+2k^2}=\dfrac{-2k}{1+2k^2}\times\dfrac{2k^2+1}{4k^2+1}=\dfrac{-2k}{1+4k^2}$，

所以 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{\frac{1}{2}AO\times|x_3|}{\frac{1}{2}AO\times|x_0|}=\left|\dfrac{\dfrac{-8k}{1+8k^2}}{\dfrac{-2k}{1+4k^2}}\right|=\dfrac{4+16k^2}{1+8k^2}$．　……………………………14 分

因为 $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{8}{3}$，所以 $\dfrac{4+16k^2}{1+8k^2}=\dfrac{8}{3}$，解得 $k=\pm\dfrac{1}{2}$，

此时 $m=\dfrac{2k^2+1}{4k^2+1}=\dfrac{3}{4}$，$D$ 点坐标为 $(0,\dfrac{3}{4})$，

所以直线 l 的方程为 $y=\pm\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$．　……………………………16 分

19.（本小题满分 16 分）

（1）解：$y=f(x)+2x=xe^x$，由 $y'=(1+x)e^x=0$，解得 $x=-1$.

列表如下：

x	$(-\infty,\ -1)$	-1	$(-1,\ +\infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	极小值	↗

所以当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $-\dfrac{1}{e}$. ……………………2 分

（2）解：$F(x)=f(x)+g(x)=xe^x-x-\ln x+k$，$F'(x)=(x+1)(e^x-\dfrac{1}{x})$.

设 $h(x)=e^x-\dfrac{1}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$ 恒成立，

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增.

又 $h(\dfrac{1}{2})=\sqrt{e}-2<0$，$h(1)=e-1>0$，且 $h(x)$ 的图像在 $(0,\ +\infty)$ 上不间断，

因此 $h(x)$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上存在唯一的零点 $x_0\in(\dfrac{1}{2},\ 1)$，且 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$. ……………………4 分

当 $x\in(0,\ x_0)$ 时，$h(x)<0$，即 $F'(x)<0$；当 $x\in(x_0,\ +\infty)$ 时，$h(x)>0$，即 $F'(x)>0$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,\ x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,\ +\infty)$ 上单调递增，

于是 $x=x_0$ 时，函数 $F(x)$ 取极(最)小值为 $F(x_0)=x_0e^{x_0}-x_0-\ln x_0+k$ ……………………6 分

$=1-x_0-\ln\dfrac{1}{e^{x_0}}+k=1+k$.

因为 $F(x)>0$ 的解集为 $(0,\ +\infty)$，

所以 $1+k>0$，即 $k>-1$. ……………………8 分

（3）证明：由（2）知 $m=x_0$，

①当 $1+k\geqslant 0$，即 $k\geqslant -1$ 时，$F(x)\geqslant 0$ 恒成立，

于是 $G(x)=F(x)+\ln x=xe^x-x+k$，$G'(x)=(x+1)e^x-1$.

因为 $x\in(0,\ m)$，所以 $x+1>1$，$e^x>1$，于是 $G'(x)>0$ 恒成立，

所以函数 $G(x)$ 在 $(0,\ m)$ 上单调递增. ……………………10 分

②当 $1+k<0$，即 $k<-1$ 时，$0<e^k<\dfrac{1}{2}<x_0=m$，

$F(e^k)=e^k(e^{e^k}-1)>0$，$F(m)=F(x_0)=1+k<0$，

又 $F(x)$ 在 $(0,\ m)$ 上单调递减且图像不间断，

所以 $F(x)$ 在 $(0,\ m)$ 上存在唯一的零点 x_1. ……………………12 分

当 $0<x\leqslant x_1$ 时，$F(x)\geqslant 0$，$G(x)=F(x)+\ln x=xe^x-x+k$，$G'(x)=(x+1)e^x-1$，

因为 $0<x\leqslant x_1$，所以 $x+1>1$，$e^x>1$，于是 $G'(x)>0$ 恒成立，

所以函数 $G(x)$ 在 $(0,\ x_1]$ 上单调递增； ① ……………………14 分

当 $x_1\leqslant x<m$ 时，$F(x)\leqslant 0$，$G(x)=-F(x)+\ln x$，$G'(x)=-F'(x)+\dfrac{1}{x}$，

由（2）知，当 $x_1\leqslant x<m$ 时，$F'(x)<0$，于是 $G'(x)>0$ 恒成立，

所以函数 $G(x)$ 在 $[x_1,\ m)$ 上单调递增； ②

设任意 s，$t\in(0,\ m)$，且 $s<t$，

若 $t\leqslant x_1$，则由①知 $G(s)<G(t)$，

若 $s<x_1<t$，则由①知 $G(s)<G(x_1)$，由②知 $G(x_1)<G(t)$，于是 $G(s)<G(t)$，

若 $x_1 \leqslant s$，由②知 $G(s)<G(t)$.

因此总有 $G(s)<G(t)$.

所以 $G(x)$在$(0，m)$上单调递增.

综上，函数 $G(x)$在$(0，m)$上单调递增. ……………………16 分

20．(本小题满分 16 分)

(1) **解**：因为 $b_n(2)-b_n(1)=1$，

所以$(a_n+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})=1$，即 $a_{n+2}-a_{n+1}=1$，

因此数列$\{a_{n+1}\}$是公差为 1 的等差数列，

所以 $b_n(4)-b_n(1)=(a_n+a_{n+4})-(a_n+a_{n+1})\ =a_{n+4}-a_{n+1}=3$. ……………………2 分

(2) (i) **解**：因为 $b_{n+1}(k)=2b_n(k)$，所以 $a_{n+1}+a_{n+1+k}=2(a_n+a_{n+k})$，

分别令 $k=1$ 及 $k=2$，得$\begin{cases} a_{n+1}+a_{n+2}=2(a_n+a_{n+1}), & ① \\ a_{n+1}+a_{n+3}=2(a_n+a_{n+2}), & ② \end{cases}$ ……………………4 分

由①得 $a_{n+2}+a_{n+3}=2(a_{n+1}+a_{n+2})$， ③ ……………………6 分

③－②得 $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$， ④ ……………………8 分

①－④得 $2a_{n+1}=4a_n$，即 $a_{n+1}=2a_n$，

又 $a_1=2$，所以 $a_n=2^n$. ……………………10 分

(ii) **证明**：假设集合 A 与集合 B 中含有相同的元素，不妨设 $b_n(k)=5b_m(k+2)$，n，$m\in\mathbf{N}^*$，

即 $a_n+a_{n+k}=5(a_m+a_{m+k+2})$，

于是 $2^n+2^{n+k}=5(2^m+2^{m+k+2})$，

整理得 $2^{n-m}=\dfrac{5(1+2^{k+2})}{1+2^k}$. ……………………12 分

因为$\dfrac{5(1+2^{k+2})}{1+2^k}=5(4-\dfrac{3}{1+2^k})\in[15，20)$，即 $2^{n-m}\in[15，20)$，

因为 n，$m\in\mathbf{N}^*$，从而 $n-m=4$， ……………………14 分

所以$\dfrac{5(1+2^{k+2})}{1+2^k}=16$，即 $4\times2^k=11$.

由于 k 为正整数，所以上式不成立，

因此集合 A 与集合 B 中不含有相同的元素，即 $A\cap B=\varnothing$. ……………………16 分

南京市、盐城市2018届高三年级第二次模拟考试

数学附加题参考答案及评分标准 2018.03

说明：

1．本解答给出的解法供参考．如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则．

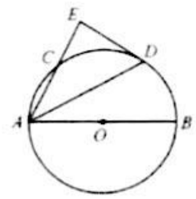
2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后续部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后续部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数，填空题不给中间分数．

21．【选做题】在A、B、C、D四小题中只能选做2题，每小题10分，共计20分．请在答卷卡指定区域内作答．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

A．选修4—1：几何证明选讲



证明：连结 OD，因为 $OD=OA$，所以 $\angle OAD=\angle ODA$．

因为 AD 平分 $\angle BAE$，所以 $\angle OAD=\angle EAD$． ………………3分

所以 $\angle EAD=\angle ODA$，所以 $OD\parallel AE$． ………………5分

又因为 $AE\perp DE$，所以 $DE\perp OD$． ………………8分

又因为 OD 为半径，所以 DE 是圆 O 的切线． ………………10分

B．选修4—2：矩阵与变换

解：因为 $\begin{bmatrix}1 & a\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$，所以 $\begin{cases}1+a=\lambda,\\ -1+2=\lambda,\end{cases}$

解方程组得 $\begin{cases}a=0,\\ \lambda=1.\end{cases}$ ……………………………5分

所以 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}$． ……………………………10分

C．选修4—4：坐标系与参数方程

解：因为直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t,\\ y=\sqrt{3}t+2\end{cases}$（$t$ 为参数），

所以直线 l 的普通方程为 $y=\sqrt{3}x+2$． ……………………………3分

又因为圆 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\ y=a\sin\theta\end{cases}$ （$a>0$，θ 为参数），

所以圆 C 的普通方程为 $x^2+y^2=a^2$． ……………………………6分

因为圆 C 的圆心到直线 l 的距离 $d=1$， ……………………………8分

所以 $1+a=3$，解得 $a=2$． ……………………………10分

D. 选修 4—5：不等式选讲

解：方法一：

$|x-1|+|x|\geqslant|x-1-x|=1$，

当且仅当 $x(x-1)\leqslant0$，即 $0\leqslant x\leqslant1$ 时取等号. ……………………………4 分

$|y-1|+|y+1|\geqslant|y-1-y-1|=2$，

当且仅当 $(y-1)(y+1)\leqslant0$，即 $-1\leqslant y\leqslant1$ 时取等号. ……………………………8 分

所以 $|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|\geqslant3$，

当且仅当 $0\leqslant x\leqslant1$，$-1\leqslant y\leqslant1$ 时取等号，

所以 $|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$ 的最小值为 3. ……………………………10 分

方法二：

因为 $f(x)=|x-1|+|x|=\begin{cases}2x-1，& x\geqslant1，\\ 1，& 0\leqslant x<1，\\ 1-2x，& x<0，\end{cases}$

所以 $f(x)_{\min}=1$. ……………………………4 分

因为 $g(y)=|y-1|+|y+1|=\begin{cases}2y，& y\geqslant1，\\ 2，& -1\leqslant y<1，\\ -2y，& y<-1，\end{cases}$

所以 $g(y)_{\min}=2$. ……………………………8 分

综上，$|x-1|+|x|+|y-1|+|y+1|$ 的最小值为 3. ……………………………10 分

【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分.

22.（本小题满分 10 分）

解：（1）随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，3.

$P(X=0)=(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$，

$P(X=1)=\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{4})+(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{4})+(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{4}=\frac{11}{24}$，

$P(X=2)=(1-\frac{1}{2})\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$，

$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$.

所以，随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{11}{24}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{24}=\frac{13}{12}$. ……………………………5 分

（2）设 Y 表示乙击中目标的个数，

由（1）亦可知，$P(Y=0)=\frac{1}{4}$，$P(Y=1)=\frac{11}{24}$，$P(Y=2)=\frac{1}{4}$.

则 $P(X=0，Y=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$，

$P(X=1，Y=1)=\frac{11}{24}\times\frac{11}{24}=\frac{121}{576}$，

$P(X=2，Y=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$， …………………………8 分

所以 $P(X+Y=2)=P(X=0，Y=2)+P(X=1，Y=1)+P(X=2，Y=0)=\frac{193}{576}$.

所以，甲乙两人共击中目标数为 2 个的概率为$\frac{193}{576}$. …………………………10 分

23.（本小题满分 10 分）

解：（1）当 $n=7$ 时，$M=\{1，2，\cdots，7\}$，

数列 T 的个数为 $C_7^2\times A_2^2=42$. …………………………2 分

（2）当 $k=1$ 时，则 $a_1>a_2$，$a_2<a_3<\cdots<a_n$，

此时 a_2 为 1，a_1 共有 $n-1$ 种选法，余下的 $n-2$ 个数，按从小到大依次排列，共有 1 种，

因此 $k=1$ 时，符合条件的数列 T 共有 $n-1=C_n^1-1$ 个. …………………………3 分

当 $2\leqslant k\leqslant n-2$ 时，则 $a_1<a_2<\cdots<a_k$，$a_k>a_{k+1}$，$a_{k+1}<a_{k+2}<\cdots<a_n$，

从集合 M 中任取 k 个数，按从小到大的顺序排列，

再将余下的 $n-k$ 个数，按从小到大的顺序排列，

即得满足条件 $a_1<a_2<\cdots<a_k$，$a_{k+1}<a_{k+2}<\cdots<a_n$ 的数列的个数为 $C_n^kC_{n-k}^{n-k}$，

这里包含了 $a_k<a_{k+1}$ 即 $a_1<a_2<\cdots<a_k<a_{k+1}<a_{k+2}<\cdots<a_n$ 的情形，

因此符合条件的数列 T 的个数为 $C_n^kC_{n-k}^{n-k}-1=C_n^k-1$. …………………………7 分

当 $k=n-1$ 时，则 $a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}$，$a_{n-1}>a_n$

此时 a_{n-1} 为 n，a_n 共有 $n-1$ 种选法，余下的 $n-2$ 个数，按从小到大依次排列，共有 1 种，

因此 $k=n-1$ 时，符合条件的数列 T 共有 $n-1=C_n^{n-1}-1$ 个. …………………………8 分

于是所有符合条件的数列 T 的个数为：

$$C_n^1-1+C_n^2-1+\cdots+C_n^{n-1}-1=C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}-n+1$$

$$=2^n-C_n^0-C_n^n-n+1$$

$$=2^n-n-1.$$ …………………………10 分