



## 2018 年石景山区高三统一测试

# 数学（理）试卷

考生须知

1. 本试卷共 6 页，共三道大题，20 道小题，满分 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，选择题、作图题请用 2B 铅笔作答，其他试题请用黑色字迹签字笔作答，在试卷上作答无效。

### 第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设集合  $A = \{x | (x+1)(x-2) < 0\}$ ，集合  $B = \{x | 1 < x < 3\}$ ，则  $A \cup B =$  ( )

- A.  $\{x | -1 < x < 3\}$     B.  $\{x | -1 < x < 1\}$     C.  $\{x | 1 < x < 2\}$     D.  $\{x | 2 < x < 3\}$

2. 下列函数中既是奇函数，又在区间  $(0, +\infty)$  上单调递减的函数为 ( )

- A.  $y = \sqrt{x}$     B.  $y = -x^3$

- C.  $y = \log_{\frac{1}{2}} x$     D.  $y = x + \frac{1}{x}$

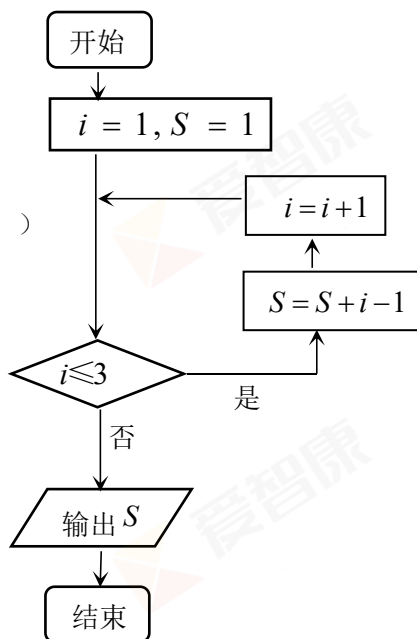
3. 执行如图所示的程序框图，则输出的  $S$  的值是 ( )

- A. 1    B. 2  
C. 4    D. 7

4. 在  $\triangle ABC$  中， $A = 60^\circ$ ， $AC = 4$ ，

$BC = 2\sqrt{3}$ ，则  $\triangle ABC$  的面积为 ( )

- A.  $4\sqrt{3}$     B. 4  
C.  $2\sqrt{3}$     D.  $2\sqrt{2}$





5.若某多面体的三视图(单位:  $cm$ )如图所示,

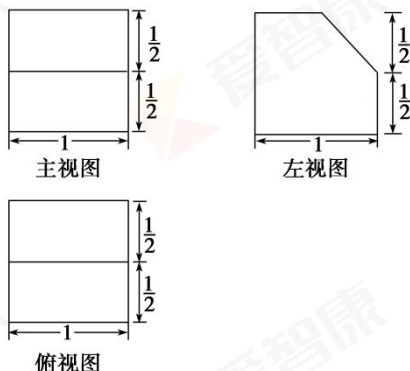
则此多面体的体积是( )

A.  $\frac{7}{8}cm^3$

B.  $\frac{2}{3}cm^3$

C.  $\frac{5}{6}cm^3$

D.  $\frac{1}{2}cm^3$



6.现有4种不同颜色对如图所示的四个部分进行

涂色,要求有公共边界的两块不能用同一种颜色,

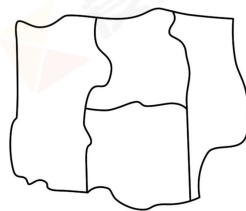
则不同的涂色方法共有( )

A. 24种

B. 30种

C. 36种

D. 48种



7.设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则“ $a > b$ ”是“ $a|a| > b|b|$ ”的( )

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分又不必要条件

8.如图,已知线段  $AB$  上有一动点  $D$  ( $D$  异于  $A, B$ ), 线段  $CD \perp AB$ , 且满足

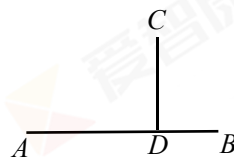
$CD^2 = \lambda AD \cdot BD$  ( $\lambda$  是大于0且不等于1的常数), 则点  $C$  的运动轨迹为( )

A. 圆的一部分

B. 椭圆的一部分

C. 双曲线的一部分

D. 抛物线的一部分



## 第二部分(非选择题共110分)

二、填空题共6小题,每小题5分,共30分.

9.双曲线  $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$  的焦距是\_\_\_\_\_, 渐近线方程是\_\_\_\_\_.





10. 若变量  $x, y$  满足 
$$\begin{cases} x+y \leq 2, \\ 2x-3y \leq 9, \\ x \geq 0, \end{cases}$$
 则  $x^2 + y^2$  的最大值是\_\_\_\_\_.

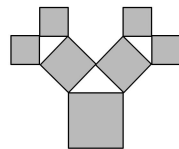
11. 已知圆  $C$  的参数方程为 
$$\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \sin \theta + 2, \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数}),$$
 以原点为极点,  $x$  轴的正半轴为

极轴建立极坐标系, 直线的极坐标方程为  $\rho \sin \theta + \rho \cos \theta = 1$ , 则直线截圆  $C$  所得的弦长是\_\_\_\_\_.

12. 已知函数 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ x^3, & x < 1 \end{cases}$$
 若关于  $x$  的方程  $f(x) = k$  有两个不同零点, 则  $k$  的取值范

围是\_\_\_\_\_.

13. 如图所示: 正方形上连接着等腰直角三角形, 等腰直角三角形腰上再连接正方形,  $\dots$ , 如此继续下去得到一个树形图形, 称为“勾股树”. 若某勾股树含有 1023 个正方形, 且其最大的正方形的边长为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则其最小正方形的边长为\_\_\_\_\_.



14. 设  $W$  是由一平面内的  $n(n \geq 3)$  个向量组成的集合. 若  $\vec{a} \in W$ , 且  $\vec{a}$  的模不小于  $W$  中除  $\vec{a}$  外的所有向量和的模. 则称  $\vec{a}$  是  $W$  的极大向量. 有下列命题:

① 若  $W$  中每个向量的方向都相同, 则  $W$  中必存在一个极大向量;

② 给定平面内两个不共线向量  $\vec{a}, \vec{b}$ , 在该平面内总存在唯一的平面向量  $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$ , 使

得  $W = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  中的每个元素都是极大向量;

③ 若  $W_1 = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ ,  $W_2 = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$  中的每个元素都是极大向量, 且  $W_1, W_2$  中无公共元素, 则  $W_1 \cup W_2$  中的每一个元素也都是极大向量.

其中真命题的序号是\_\_\_\_\_.



三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. (本小题共 13 分)

已知函数  $f(x) = 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1$ .

(I) 求函数  $f(x)$  的最小正周期;

(II) 求函数  $f(x)$  在区间  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  上的最小值和最大值.

16. (本小题共 13 分)

抢“微信红包”已经成为中国百姓欢度春节时非常喜爱的一项活动. 小明收集班内 20 名同学今年春节期间抢到红包金额  $x$  (元) 如下 (四舍五入取整数):

102	52	41	121	72
162	50	22	158	46
43	136	95	192	59
99	22	68	98	79

对这 20 个数据进行分组, 各组的频数如下:

组别	红包金额分组	频数
$A$	$0 \leq x < 40$	2
$B$	$40 \leq x < 80$	9
$C$	$80 \leq x < 120$	$m$
$D$	$120 \leq x < 160$	3
$E$	$160 \leq x < 200$	$n$

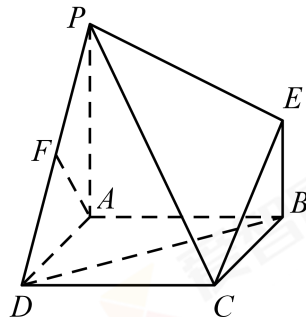


- (I) 写出  $m, n$  的值, 并回答这 20 名同学抢到的红包金额的中位数落在哪个组别;
- (II) 记  $C$  组红包金额的平均数与方差分别为  $v_1, s_1^2$ ,  $E$  组红包金额的平均数与方差分别为  $v_2, s_2^2$ , 试分别比较  $v_1$  与  $v_2, s_1^2$  与  $s_2^2$  的大小; (只需写出结论)
- (III) 从  $A, E$  两组的所有数据中任取 2 个数据, 记这 2 个数据差的绝对值为  $\xi$ , 求  $\xi$  的分布列和数学期望.

17. (本小题共 14 分)

如图, 四边形  $ABCD$  是正方形,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $EB \parallel PA$ ,  $AB = PA = 4$ ,  $EB = 2$ ,  $F$  为  $PD$  的中点.

- (I) 求证:  $AF \perp PC$ ;
- (II) 求证:  $BD \parallel$  平面  $PEC$ ;
- (III) 求二面角  $D-PC-E$  的大小.





18. (本小题共 13 分)

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 动点  $E$  到定点  $(1,0)$  的距离与它到直线  $x=-1$  的距离相等.

(I) 求动点  $E$  的轨迹  $C$  的方程;

(II) 设动直线  $l: y=kx+b$  与曲线  $C$  相切于点  $P$ , 与直线  $x=-1$  相交于点  $Q$ .

证明: 以  $PQ$  为直径的圆恒过  $x$  轴上某定点.

19. (本小题共 14 分)

已知  $f(x)=e^x-ax^2$ , 曲线  $y=f(x)$  在  $(1,f(1))$  处的切线方程为  $y=bx+1$ .

(I) 求  $a, b$  的值;

(II) 求  $f(x)$  在  $[0,1]$  上的最大值;

(III) 当  $x \in \mathbf{R}$  时, 判断  $y=f(x)$  与  $y=bx+1$  交点的个数. (只需写出结论, 不要求证明)



20. (本小题共 13 分)

对于项数为  $m$  ( $m > 1$ ) 的有穷正整数数列  $\{a_n\}$ , 记  $b_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

( $k = 1, 2, \dots, m$ ), 即  $b_k$  为  $a_1, a_2, \dots, a_k$  中的最大值, 称数列  $\{b_n\}$  为数列  $\{a_n\}$  的“创新数列”.

比如 1, 3, 2, 5, 5 的“创新数列”为 1, 3, 3, 5, 5.

(I) 若数列  $\{a_n\}$  的“创新数列”  $\{b_n\}$  为 1, 2, 3, 4, 4, 写出所有可能的数列  $\{a_n\}$ ;

(II) 设数列  $\{b_n\}$  为数列  $\{a_n\}$  的“创新数列”, 满足  $a_k + b_{m-k+1} = 2018$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ),

求证:  $a_k = b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ );

(III) 设数列  $\{b_n\}$  为数列  $\{a_n\}$  的“创新数列”, 数列  $\{b_n\}$  中的项互不相等且所有项的和等于所有项的积, 求出所有的数列  $\{a_n\}$ .



## 2018 年石景山区高三统一测试

### 数学（理）试卷答案及评分参考

题号	9	10	11	12	13	14
答案	$2\sqrt{3}, y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$	10	$\sqrt{2}$	(0,1)	$\frac{1}{32}$	②③

#### 一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	C	C	A	D	C	B

#### 二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

(两空题目，第一空 2 分，第二空 3 分)

#### 三、解答题共 6 小题，共 80 分.

15. (本小题共 13 分)

解: (I)  $f(x) = 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - 1$

$$= \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right)$$

$$= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{所以周期为 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(II) 因为  $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ ,

$$\text{所以 } \frac{7\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{13\pi}{6}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以当 } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6} \text{ 时, 即 } x = \pi \text{ 时 } f(x)_{\max} = 1.$$

$$\text{当 } 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \text{ 时, 即 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时 } f(x)_{\min} = -2. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$





16. (本小题共 13 分)

解: (I)  $m=4, n=2, B;$  ..... 3 分

(II)  $v_1 < v_2, s_1^2 < s_2^2;$  ..... 6 分

(III)  $\xi$  的可能取值为 0, 30, 140, 170,

$\xi$	0	30	140	170
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$\xi$  的数学期望为  $E\xi = 0 \times \frac{1}{6} + 30 \times \frac{1}{6} + 140 \times \frac{1}{3} + 170 \times \frac{1}{3} = \frac{325}{3}.$

..... 13 分

17. (本小题共 14 分)

(I) 证明: 依题意,  $PA \perp$  平面  $ABCD$ .

如图, 以  $A$  为原点, 分别以  $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AP}$  的方向为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的正方向建立空间直角坐标系. ....2 分

依题意, 可得  $A(0,0,0)$ ,  $B(0,4,0)$ ,  $C(4,4,0)$ ,  $D(4,0,0)$ ,  $P(0,0,4)$ ,  $E(0,4,2)$ ,  $F(2,0,2)$ .

因为  $\overrightarrow{AF} = (2,0,2)$ ,  $\overrightarrow{PC} = (4,4,-4)$ ,

所以  $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{PC} = 8 + 0 + (-8) = 0$ . ....5 分

所以  $AF \perp PC$ . ....6 分

(II) 证明: 取  $PC$  的中点  $M$ , 连接  $EM$ .

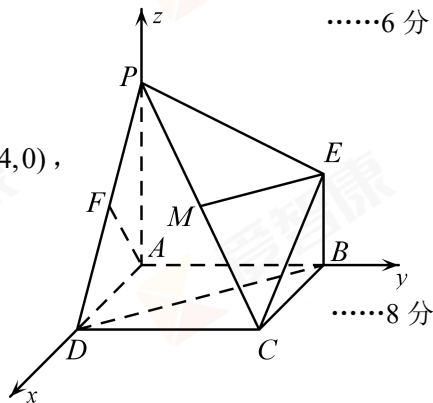
因为  $M(2,2,2)$ ,  $\overrightarrow{EM} = (2,-2,0)$ ,  $\overrightarrow{BD} = (4,-4,0)$ ,

所以  $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{EM}$ ,

所以  $BD \parallel EM$ .

又因为  $EM \subset$  平面  $PEC$ ,  $BD \not\subset$  平面  $PEC$ ,

所以  $BD \parallel$  平面  $PEC$ . ....9 分





(III) 解: 因为  $AF \perp PD$ ,  $AF \perp PC$ ,

$$PD \cap PC = P,$$

所以  $AF \perp$  平面  $PCD$ , 故  $\overrightarrow{AF} = (2, 0, 2)$  为平面  $PCD$  的一个法向量. ....10 分

设平面  $PCE$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ ,

$$\text{因为 } \overrightarrow{PC} = (4, 4, -4), \overrightarrow{PE} = (0, 4, -2),$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PE} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 4x + 4y - 4z = 0, \\ 4y - 2z = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } y = -1, \text{ 得 } x = -1, z = -2, \text{ 故 } \vec{n} = (-1, -1, -2). \quad \dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{AF}, \vec{n} \rangle = \frac{-2 - 0 - 4}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\text{所以二面角 } D-PC-E \text{ 的大小为 } \frac{5\pi}{6}. \quad \dots\dots 14 \text{ 分}$$

18. (本小题共 13 分)

(I) 解: 设动点  $E$  的坐标为  $(x, y)$ ,

由抛物线定义知, 动点  $E$  的轨迹是以  $(1, 0)$  为焦点,  $x = -1$  为准线的抛物线,

$$\text{所以动点 } E \text{ 的轨迹 } C \text{ 的方程为 } y^2 = 4x. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 证明: 由 } \begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{ 消去 } x \text{ 得: } ky^2 - 4y + 4b = 0.$$

$$\text{因为直线 } l \text{ 与抛物线相切, 所以 } \Delta = 16 - 16kb = 0, \text{ 即 } b = \frac{1}{k}. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y = kx + \frac{1}{k}.$$

$$\text{令 } x = -1, \text{ 得 } y = -k + \frac{1}{k}.$$

$$\text{所以 } Q \left( -1, -k + \frac{1}{k} \right). \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$



设切点坐标  $P(x_0, y_0)$ ，则  $ky_0^2 - 4y_0 + \frac{4}{k} = 0$ ，

解得：  $P(\frac{1}{k^2}, \frac{2}{k})$ ， .....11 分

设  $M(m, 0)$ ，

$$\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{MP} = \left( \frac{1}{k^2} - m \right) (-1 - m) + \frac{2}{k} \left( -k + \frac{1}{k} \right) = m^2 + m - 2 - \frac{m-1}{k^2}$$

所以当  $\begin{cases} m^2 + m - 2 = 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases}$ ，即  $m = 1$  时，  $\overrightarrow{MQ} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$

所以  $MQ \perp MP$

所以以  $PQ$  为直径的圆恒过  $x$  轴上定点  $M(1, 0)$ 。 .....13 分

19. (本小题共 14 分)

解：(I)  $f'(x) = e^x - 2ax$ ，

由已知可得  $f'(1) = e - 2a = b$ ，  $f(1) = e - a = b + 1$

解之得  $a = 1, b = e - 2$ 。 .....3 分

(II) 令  $g(x) = f'(x) = e^x - 2x$ 。

则  $g'(x) = e^x - 2$ ， .....5 分

故当  $0 \leq x < \ln 2$  时，  $g'(x) < 0$ ，  $g(x)$  在  $[0, \ln 2)$  单调递减；

当  $\ln 2 < x \leq 1$  时，  $g'(x) > 0$ ，  $g(x)$  在  $(\ln 2, 1]$  单调递增；

所以  $g(x)_{\min} = g(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0$ ， .....8 分

故  $f(x)$  在  $[0, 1]$  单调递增，

所以  $f(x)_{\max} = f(1) = e - 1$ 。 .....11 分

(III) 当  $x \in R$  时，  $y = f(x)$  与  $y = bx + 1$  有两个交点。 .....14 分



20. (本小题共 13 分)

解: (I) 所有可能的数列  $\{a_n\}$  为 1,2,3,4,1; 1,2,3,4,2; 1,2,3,4,3;

1,2,3,4,4 .....3 分

(II) 由题意知数列  $\{b_n\}$  中  $b_{k+1} \geq b_k$ .

又  $a_k + b_{m-k+1} = 2018$ , 所以  $a_{k+1} + b_{m-k} = 2018$  .....4 分

$$a_{k+1} - a_k = (2018 - b_{m-k}) - (2018 - b_{m-k+1}) = b_{m-k+1} - b_{m-k} \geq 0$$

所以  $a_{k+1} \geq a_k$ , 即  $a_k = b_k$  ( $k=1,2,\dots,m$ ) .....8 分

(III) 当  $m=2$  时, 由  $b_1 + b_2 = b_1 b_2$  得  $(b_1 - 1)(b_2 - 1) = 1$ , 又  $b_1, b_2 \in N^*$

所以  $b_1 = b_2 = 2$ , 不满足题意;

当  $m=3$  时, 由题意知数列  $\{b_n\}$  中  $b_{n+1} > b_n$ , 又  $b_1 + b_2 + b_3 = b_1 b_2 b_3$

当  $b_1 \neq 1$  时此时  $b_3 > 3$ ,  $b_1 + b_2 + b_3 < 3b_3$ , 而  $b_1 b_2 b_3 > 6b_3$ , 所以等式成立  $b_1 = 1$ ;

当  $b_2 \neq 2$  时此时  $b_3 > 3$ ,  $b_1 + b_2 + b_3 < 3b_3$ , 而  $b_1 b_2 b_3 \geq 3b_3$ , 所以等式成立  $b_2 = 2$ ;

当  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 2$  得  $b_3 = 3$ , 此时数列  $\{a_n\}$  为 1,2,3.

当  $m \geq 4$  时,  $b_1 + b_2 + \dots + b_m < m b_m$ , 而  $b_1 b_2 \dots b_m \geq (m-1)! b_m > m b_m$ , 所以不存在满足题意的数列  $\{a_n\}$ .

综上数列  $\{a_n\}$  依次为 1,2,3. ....13 分

【注: 若有其它解法, 请酌情给分】