



北京市东城区 2017—2018 学年度第二学期高三综合练习(一)

2018.4

数学(文科)

本试卷共 4 页,150 分。考试时长 120 分钟。考生务必把答案答在答题卡上,在试卷上作答无效。考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题:共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项。

(1) 若集合 $A = \{x | -3 < x < 1\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $\{x | -3 < x < -1\}$ (B) $\{x | -3 < x < 2\}$
 (C) $\{x | -1 < x < 1\}$ (D) $\{x | 1 < x < 2\}$

(2) 复数 $z = \frac{i}{1-i}$ 在复平面内对应的点位于

- (A) 第一象限 (B) 第二象限
 (C) 第三象限 (D) 第四象限

(3) 若 x, y 满足 $\begin{cases} x+y-2 \leq 0, \\ 2x+y-2 \geq 0, \\ y \geq 0, \end{cases}$, 则 $y-x$ 的最大值为

- (A) -2 (B) -1
 (C) 2 (D) 4

(4) 执行如图所示的程序框图,如果输出的 S 值为 30,那么空白的判断框中应填入的条件是

- (A) $n \leq 2$
 (B) $n \leq 3$
 (C) $n \leq 4$
 (D) $n \leq 5$



(5) 某三棱锥的三视图如图所示,则该三棱锥最长棱的棱长为

- (A) 2
 (B) $2\sqrt{2}$
 (C) $2\sqrt{3}$
 (D) 4



(6) 函数 $f(x) = \frac{4}{x} - 2^x$ 的零点所在区间是

- (A) $(0, \frac{1}{2})$ (B) $(\frac{1}{2}, 1)$
 (C) $(1, \frac{3}{2})$ (D) $(\frac{3}{2}, 2)$



- (7) 已知平面向量 a, b, c 均为非零向量, 则“($a+b$) $c=(b+c)a$ ”是“向量 a, c 同向”的
 (A) 充分而不必要条件
 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件
 (D) 既不充分也不必要条件

- (8) 为弘扬中华传统文化, 某校组织高一年级学生到古都西安游学, 在某景区, 由于时间关系, 每个班只能在甲、乙、丙三个景点中选择一个游览, 高一1班的27名同学决定投票来选定游览的景点, 约定每人只能选择一个景点, 得票数高于其它景点的入选。据了解, 在甲、乙两个景点中有18人会选择甲, 在乙、丙两个景点中有18人会选择乙, 那么关于这轮投票结果, 下列说法正确的是
 ①该班选择去甲景点游览;
 ②乙景点的得票数可能会超过9;
 ③丙景点的得票数不会比甲景点高;
 ④三个景点的得票数可能会相等。
 (A) ①② (B) ①③
 (C) ②④ (D) ③④



第二部分 (非选择题 共110分)

二、填空题: 共6小题, 每小题5分, 共30分。

(9) 命题“ $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ ”的否定是_____。

(10) 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点坐标为 $(\frac{1}{4}, 0)$, 则 $p =$ _____。

(11) 在平面直角坐标系 xOy 中, 以 Ox 为始边的角 θ 的终边经过点 $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, 则 $\sin \theta =$ _____,
 $\tan 2\theta =$ _____。

(12) 已知圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 上的点到直线 $y = kx - 2$ 的距离的最小值为 1, 则实数 $k =$ _____。

(13) 已知实数 x, y 满足 $2x+y=1$, 则 xy 的最大值为 _____。

(14) 定义: 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值与最小值的差为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的极差, 记作 $d(a, b)$,

①若 $f(x) = x^2 - 2x + 2$, 则 $d(1, 2) =$ _____;

②若 $f(x) = x + \frac{m}{x}$, 且 $d(1, 2) \neq |f(2) - f(1)|$, 则实数 m 的取值范围是 _____。

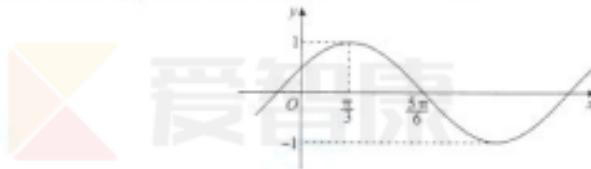


三、解答题:共6小题,共80分.解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程.
(15)(本小题13分)

- 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,且 $a_1=-6$, $S_5=S_{10}$.
- (Ⅰ)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (Ⅱ)若等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_2$, $b_5=S_7$,求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

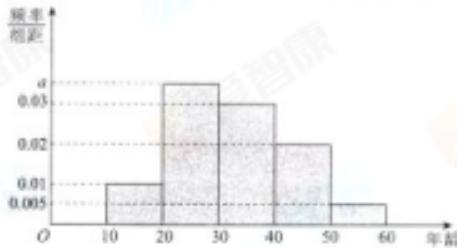
(16)(本小题13分)

- 函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$)的部分图象如图所示.
- (Ⅰ)求 $f(x)$ 的解析式;
- (Ⅱ)将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,得到函数 $y=g(x)$ 的图象.
令 $F(x)=f(x)+g(x)$,求函数 $F(x)$ 的单调递增区间.



(17)(本小题13分)

某网站从春节期间参与收发网络红包的手机用户中随机抽取10000名进行调查,将受访用户按年龄分成5组:[10,20),[20,30),...,[50,60],并整理得到如下频率分布直方图:



- (Ⅰ)求 a 的值;
- (Ⅱ)从春节期间参与收发网络红包的手机用户中随机抽取一人,估计其年龄低于40岁的概率;
- (Ⅲ)估计春节期间参与收发网络红包的手机用户的平均年龄.



(18)(本小题 14 分)

如图,四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle DAB = 60^\circ$, $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $ED = AD = 2$, $EF = 2$, $EF \parallel AB$, M 为 BC 中点.

(Ⅰ)求证: $FM \parallel$ 平面 BDE ;(Ⅱ)求证: $AC \perp BE$;(Ⅲ)若 G 为线段 BE 上的点, 当三棱锥 $G-BCD$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 时, 求 $\frac{BG}{BE}$ 的值.

(19)(本小题 14 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 长轴长为 $2\sqrt{3}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程;(Ⅱ)点 M 是以长轴为直径的圆 O 上一点, 圆 O 在点 M 处的切线交直线 $x=3$ 于点 N .

求证: 过点 M 且垂直于直线 ON 的直线 l 过椭圆 C 的右焦点.

(20)(本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = x \sin x + a \cos x + x$, $a \in \mathbb{R}$.

(Ⅰ)当 $a=-1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;(Ⅱ)当 $a=2$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值;(Ⅲ)当 $a>2$ 时, 若方程 $f(x)-3=0$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有唯一解, 求 a 的取值范围.



北京市东城区 2017—2018 学年度第二学期高三综合练习(一)

2018.4

数学(文科)参考答案及评分标准

一、选择题:共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

- (1) A (2) B (3) C (4) B
 (5) C (6) C (7) B (8) D

二、填空题:共 6 小题,每小题 5 分,共 30 分.

- (9) $\exists x_0 \in \mathbb{R}, e^{x_0} \leqslant 0$ (10) $\frac{1}{2}$
 (11) $\frac{4}{5}$ $-\frac{24}{7}$ (12) $-\frac{4}{3}$ 或 0
 (13) $\frac{1}{8}$ (14) 1 (1, 4)

三、解答题:共 6 小题,共 80 分.

(15)(共 13 分)

解:(I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,因为 $S_5 = S_4$, 所以 $a_5 = a_4 + 3d = 0$.因为 $a_3 = -6$, 所以 $d = 2$, $a_1 = -10$.所以 $a_n = 2n - 12$, $n \in \mathbb{N}^*$ 6 分(II) 设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,由(I)可知, $b_1 = -8$, $b_2 = -24$, 所以 $q = 3$.所以, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $\frac{(-8)(1-3^n)}{1-3} = 4(1-3^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ 13 分

(16)(共 13 分)

解:(I) 因为 $\frac{2\pi}{\omega} = 4(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) = 2\pi$,所以 $\omega = 1$.又因为 $\sin(\frac{\pi}{3} + \varphi) = 1$,所以 $\frac{\pi}{3} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$),即 $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbb{Z}$).因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$.所以 $f(x)$ 的解析式是 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$ 6 分



(II) 由已知 $g(x)=\sin[(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{6}]=\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$,

所以 $f(x)+g(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos x$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\cos x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{3}{2}\cos x$$

$$=\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{3}).$$

函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间为 $[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}] (k \in \mathbb{Z})$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2} \leqslant x+\frac{\pi}{3} \leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$,

得 $2k\pi-\frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$,

所以 $F(x)$ 的单调递增区间为 $[2k\pi-\frac{5\pi}{6}, 2k\pi+\frac{\pi}{6}] (k \in \mathbb{Z})$ 13 分

(17)(共 13 分)

解:(I) 根据频率分布直方图可知, $10 \times (a+0.005+0.01+0.02+0.03)=1$,

解得 $a=0.035$ 5 分

(II) 根据题意, 样本中年龄低于 40 岁的频率为

$10 \times (0.01+0.035+0.03)=0.75$,

所以从春节期间参与收发网络红包的手机用户中随机抽取一人,

估计其年龄低于 40 岁的概率为 0.75. 10 分

(III) 根据题意, 春节期间参与收发网络红包的手机用户的平均年龄估计为

$15 \times 0.1+25 \times 0.35+35 \times 0.3+45 \times 0.2+55 \times 0.05=32.5$ (岁). 13 分

(18)(共 14 分)

解:(I) 设 $AC \cap BD=O$, 连接 EO, MO .

因为 M, O 分别是 BC, BD 的中点,

因为 $EF \parallel AB$, 且 $EF=\frac{1}{2}AB$,

因为 $OM \parallel AB$, 且 $OM=\frac{1}{2}AB$,

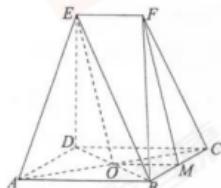
所以 $EF \parallel OM$, 且 $EF=OM$.

所以四边形 $EOMF$ 为平行四边形.

所以 $FM \parallel EO$.

又因为 $EO \subset \text{平面 } BDE$, $FM \not\subset \text{平面 } BDE$,

所以 $FM \parallel \text{平面 } BDE$ 5 分





(II) 因为 $ABCD$ 为菱形,

所以 $AC \perp BD$,

因为 $ED \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $ED \perp AC$.

因为 $BD \cap ED = D$,

所以 $AC \perp$ 平面 BDE ,

又因为 $BE \subset$ 平面 BDE ,

所以 $AC \perp BE$ 10 分

(III) 过 G 作 ED 的平行线交 BD 于 H .

由已知 $ED \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $GH \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 GH 为三棱锥 $G-BCD$ 的高.

因为三棱锥 $G-BCD$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$,

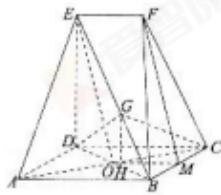
所以三棱锥 $G-BCD$ 的体积

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BC \cdot \sin 60^\circ \cdot GH = \frac{2\sqrt{3}}{9},$$

$$\text{所以 } GH = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } \frac{GH}{ED} = \frac{BG}{BE} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{所以 } \frac{BG}{BE} = \frac{1}{3}. 14 \text{ 分}$$



(19)(共 14 分)

$$\text{解: (I) 由题意得} \begin{cases} 2a = 2\sqrt{3}, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \end{cases} \text{解得 } c = 1.$$

$$\text{所以 } b^2 = a^2 - c^2 = 2.$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1. 5 \text{ 分}$$

(II) 由题意知, 圆 O 的方程为 $x^2 + y^2 = 3$.

设 $N(3, t)$, $M(x_0, y_0)$, $x_0^2 + y_0^2 = 3$.

由 $|ON|^2 = 3 + |MN|^2$,

$$\text{得 } 3^2 + t^2 = 3 + (x_0 - 3)^2 + (y_0 - t)^2,$$

$$\text{即 } 9 + t^2 = 3 + x_0^2 - 6x_0 + 9 + y_0^2 - 2ty_0 + t^2,$$

$$\text{即 } 3 - x_0^2 - 6x_0 + y_0^2 - 2ty_0 = 0,$$

$$\text{因为 } x_0^2 + y_0^2 = 3,$$



所以 $3x_0 + y_0 t - 3 = 0$.

当 $t=0$ 时, $x_0=1$, 直线 l 的方程为 $x=1$, 直线 l 过椭圆 C 的右焦点 $F(1,0)$,

当 $t \neq 0$ 时, 直线 MN 的方程为 $y - y_0 = -\frac{3}{t}(x - x_0)$,

即 $ty - t y_0 = -3x + 3x_0$, 即 $ty = -3(x-1)$, 直线 l 过椭圆 C 的右焦点 $F(1,0)$.

综上所述, 直线 l 过椭圆 C 的右焦点 $F(1,0)$ 14 分

(20)(共 13 分)

解:(I) 当 $a=-1$ 时, $f(x)=x\sin x-\cos x-x$,

所以 $f'(x)=2\sin x-x\cos x+1$, $f'(0)=1$.

又因为 $f'(0)=1$,

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=x+1$ 4 分

(II) 当 $a=2$ 时, $f(x)=x\sin x-2\cos x+x$,

所以 $f'(x)=-\sin x+x\cos x+1$.

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $1-\sin x > 0$, $x\cos x > 0$,

所以 $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增.

因此 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 $f(\frac{\pi}{2})=\pi$, 最小值为 $f(0)=2$ 8 分

(III) 当 $a>2$ 时, $f'(x)=(1-a)\sin x+x\cos x-1$,

设 $h(x)=(1-a)\sin x+x\cos x+1$,

$h'(x)=(2-a)\cos x-x\sin x$,

因为 $a>2$, 且 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

所以 $h'(x)<0$.

所以 $h(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减.

因为 $h(0)=1>0$, $h(\frac{\pi}{2})=1-a+1=2-a<0$,

所以存在唯一的 $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 使 $h(x_0)=0$, 即 $f'(x_0)=0$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, x_0]$ 上单调递增, 在区间 $[x_0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减.

因为 $f(0)=a$, $f(\frac{\pi}{2})=\pi$,

又因为方程 $f(x)=3$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有唯一解,

所以 $2 < a \leqslant 3$ 13 分