一、填空题

1. 已知$a+a^{-1}=4$，则$a^4+a^{-4}=$________。

2. 在$\triangle ABC$外接圆，已知$R=3$，边长之比为$3:4:5$，$S_{\triangle ABC}=$________。

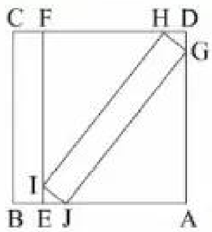
3. $\frac{1}{a^6}+\frac{1}{b^2}=\frac{4}{a^2+b^2}$，$\left(\frac{b}{a}\right)^{2013}-\left(\frac{a}{b}\right)^{2014}=$__________。

4. 四个互不相等的整数$ABCD$，满足下式的关系，则满足下式的关系，则D可能有_____个取值。

$$\begin{array}{r} ABBCB \\ +\ BCADA \\ \hline DBDDD \end{array}$$

5. 有一个鱼缸它的底为$100cm\times40cm$，高$50cm$，现在鱼缸内装水$40cm$，将一个底为$40cm\times20cm$，高为$10cm$的转块扔到鱼缸中。缸内水面上升了_______cm。

6. 有一个正方形abcd，边长为1，其中有两个全等矩形becf, ghij，$BE=$________。



求

7.

	油耗(升/公里)	可行距离(公里)
10:00	9.5	300
11:00	9.6	220

8. 一个正方体的表面积是$24cm^2$，里边有个内切圆，这个内切圆中还内接一个小正方体，小正方体表面积为 ________。

9. $13+a=9+b=3+c$，求$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=$________。

10. 甲手上有$1\sim5$号牌，乙手上有$6\sim11$号牌，现在要甲乙手中各抽一张牌，使得它们的乘积为3的倍数，则这样的概率为__________。

11. 直角坐标系xOy内有一个$\triangle OEF$，$E(-4,2),F(-2,-2)$。原点O为位似中心，相似比为2，点E的对应点为E'，求E'坐标________。

12. 一辆车的计程车速度为$55km/h$，出发时它的里程表上的里程数为$\overline{abc}$，行程结束时里程表上的速度为$\overline{cba}$，其中$a\geq1, a+b+c\leq7, a^2+b^2+c^2=$________

13. 有一个多项式，除以$2x^2-3$，商式是$7x-4$，余式是$-5x+2$，多项式为________。

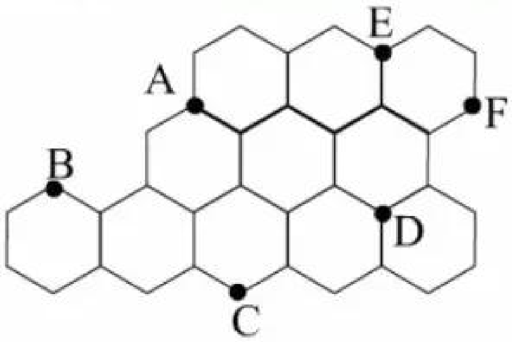
14. 有11个整数，平均数是10，中位数是9，众数只有一个8，问最大的正整数为________。

15. 有一个矩形$ABCD$，$DC=2BC,E,F$为AB边上，DE,DF将$\angle ADC$三等分，$S_{\triangle DEF}/S_{矩}=$ ________。

二、选择题

16. 若干个正六边形拼成的图形中，下列三角形与$\triangle ACD$全等的有（ ）、

A. $\triangle BCE$　　B. $\triangle ADF$　　C. $\triangle ADE$　　D. $\triangle CDE$

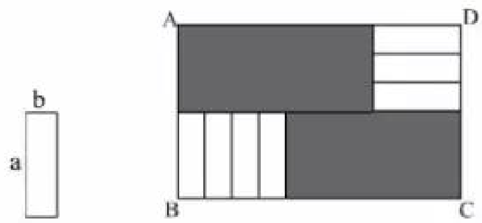


17. 抛物线$y=ax^2+bx+c$，抛物线上两点$A(-5,y_1),B(3,y_2)$,抛物线顶点在(x_0,y_0)，当$y_1>y_2\geq y_0$，求x_0的取值范围。

18. l_1,l_2交于点O，平面内有任意点M，M到l_1,l_2的距离分别为a,b，有序实数对，(a,b)为距离坐标，若有序实数对为$(2,3)$，这样的数有几个？

19. 有一种长方形纸片，其长为a，宽为b（$a>b$），现将这种纸片按下右图的方式拼成矩形$ABCD$，其中两块阴影部分没有被纸片覆盖，这两个阴影部分的面积之差为S，当BC的长改变时，S不变，a和b满足（ ）。

A. $a=2b$　　B. $a=3b$　　C. $a=\frac{4}{3}b$　　D. $a=4b$



三、解答题

20. 解关于x的方程$\left|\frac{1}{2}x-2\right|-3=a$。

21. 某商场需购进甲、乙两种不同型号的手机，每台手机的进价与售价如下图：

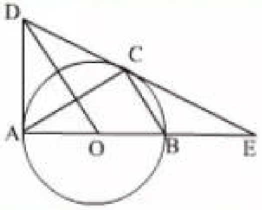
单位(元)	甲	乙
进价	4000	2500
售价	4300	3000

进货用了资金15.5万元，获得毛利2.1万元。

(1) 问该商场购进两种手机各多少台？

(2) 若现在进货资金不超过16万；且在(1)的基础上购进乙种手机，增加的数量是购进甲种手机减少数量的两倍，问该商场采用何种进货方案使得毛利最大？

22. 如图所示，C 在 $\odot O$ 上，$OD \parallel BC, AD$ 是切线，延长 DC 、AB 交于点 E 。



(1) 求证：DE 是切线。

(2) $\dfrac{CE}{DE}=\dfrac{2}{3}$，求 $\cos\angle ABC$ 的值。

23. (1) 设 n 是给定的正整数，化简：$\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}}-1$

(2) 根据(1)的结果，计算 $\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{1}{9^2}+\dfrac{1}{10^2}}$ 的值。

24. 已知抛物线过点 $A(-3,0), B(0,3), C(1,0)$

(1) 求解析式；

(2) P 是直线 AB 上方抛物线上一点，不与 A、B 重合，$PD \perp AB, PF \perp x$ 轴。

① 当 $C_{\triangle PDE}$ 最大时，求 P 的坐标

② 如图所示，以 AP 为边作正方形 $APMN$ ，M 或 N 恰好在对称轴上，求 P 的坐标。

1. $a+a^{-1}=4$，$a^2+a^{-2}=14$，$a^4+a^{-4}=194$

2. $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times(6\times\frac{3}{5})\times(6\times\frac{4}{5})=\frac{216}{25}$

【高中知识点】解三角形——三角形面积公式

3. $\frac{a^2+b^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2}{b^2}=4$，$\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}=2$，$b^4+a^4=2a^2b^2$，$a^2=b^2$

若 $a=b$，$(\frac{b}{a})^{2013}-(\frac{a}{b})^{2014}=0$

若 $a=-b$，$(\frac{b}{a})^{2013}-(\frac{a}{b})^{2014}=-2$

ans　0 或 -2

4. 第五列B+A=D，结合第一列A+B=D，可得第二列B+C=B没有进位

∴ C = 0

∴ A+B=D 也没有进位，算式即

$$\begin{array}{r} A\,B\,B\,0\,B \\ +\quad B\,0\,A\,D\,A \\ \hline D\,B\,D\,D\,D \end{array}$$

而 $A\ge 1, B\ge 1$，且 $A\ne B$

$\therefore D=A+B\ge 3$

D 可取到 $3,4,\cdots,9$，共 7 个值

5. $\frac{40\times20\times10}{100\times40}=2$

【注】我觉得答案也可以是 -40 cm，砖扔到鱼缸里，鱼缸就被砸破了

6. 连 BF, JH，过 H 作 $HM\perp AJ$ 于 M，则 $\triangle FBE\cong\triangle HJM$

$\therefore MJ=BE$

$\therefore AJ-DH=AJ-AM=MJ=BE$

$\therefore AJ=DH+BE=JE+BE=BJ$

$\therefore AJ=\frac{1}{2}$

$\therefore \angle GJA = 60°$

$\therefore \angle IJE = 30°$

设 $IJ = x$，则 $BE = x$，$JE = \frac{\sqrt{3}}{2}x$，$BJ = x + \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = 2 - \sqrt{3}$

7. 题目不全

8. 【注】题目表述应为内切球，不是内切圆

大正方体边长 2 cm，其内切球直径 2 cm，也作为小正方体的外接球

$\therefore$ 小正方体边长 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ cm

小正方体表面积 $6\times(\frac{\sqrt{2}}{3})^2 = 8$ cm^2

【高中知识点】立体几何——正方体与球

9. $\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2} = \frac{16+36+100}{2} = 8+18+50 = 76$

10. $1-\frac{4}{5}\times\frac{4}{6} = \frac{7}{15}$

11. $(-8,4)$

12. 【注】题目应当补充条件：行驶的时间刚好为整数（单位：小时）

$(100c+10b+a)-(100a+10b+c)=55t$

即 $99(c-a)=55t$

$9(c-a)=5t$

$\therefore c-a=5, t=9$

$\therefore a=1, c=6$

$\therefore b=0$

$a^2+b^2+c^2=37$

13． $(2x^2-3)(7x-4)+(-5x+2)=14x^3-8x^2-26x+14$

14．【注】题目意思应表述为，最大的正整数最大值可能为多少　　ans 35；

可构造出11个数分别为1, 1, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 35

15．设 $AD=1$， $DC=2$，则 $AE=\frac{1}{\sqrt{3}}$， $DF=2AD=2$， $AF=\sqrt{3}$，

$$EF=AF-AE=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}}{2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

二、

16．C

17． $x_0>-1$

18． 4

【高中知识点】解析几何——点的轨迹问题

19．设 $BC=x$，则

$S=(x-a)3b-(x-4b)a=(3b-a)x+ab$，当 $a=3b$ 时， S 不变

ans　B

21．⑴设购进甲、乙两种手机分别x,y台，则

$$\begin{cases}0.4x+0.25y=15.5\\0.03x+0.05y=2.1\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=20\\y=30\end{cases}$

答：购进甲手机20台，乙手机30台

⑵设增加购进乙手机数量为a台，则甲手机减少$\frac{a}{2}$台，则

$$(20-\frac{a}{2})\times0.4+(30+a)\times0.25\le16$$

解得$a\le10$

$$(20-\frac{a}{2})\times0.03+(30+a)\times0.05=0.035a+2.1\le2.45$$

∴当$a=10$时，利润最大，此时乙手机共40台，甲手机共15台

答：购进甲手机15台，乙手机40台，可达到利润最大，最大为2.45万元

22．⑴设 OD 与 AC 交于点 E，连 OC

则 $\left.\begin{matrix} AC \perp CB \\ OE // CB \end{matrix}\right\} \Rightarrow OE \perp AC \Rightarrow EA = EC \Rightarrow DA = DC$

$$\left.\begin{matrix} DA = DC \\ OA = OC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle DAO \cong \triangle DCO \Rightarrow \angle DCO = \angle DAO = 90^\circ$$

$\therefore DC$ 为切线，即 DE 为切线

(2) $\dfrac{CE}{DE} = \dfrac{2}{3}$，则 $\dfrac{DC}{DE} = \dfrac{1}{3}$

$\angle ODA = \angle ODE \quad \Rightarrow \quad \dfrac{OA}{OE} = \dfrac{DA}{DE} = \dfrac{DC}{DE} = \dfrac{1}{3}$

设 $OA = x$，则 $OE = 3x$

$\therefore OB = x, BE = 2x$

CE 为切线，$\angle ECB = \angle CAE \quad \Rightarrow \quad \triangle ECB \backsim \triangle EAC$

$\therefore \dfrac{EC}{EA} = \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{CB}{AC} \quad \Rightarrow \quad EC = 2\sqrt{2}x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{CB}{CA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

设 $CB = a$，则 $CA = \sqrt{2}a$

$CB^2 + CA^2 = AB^2$

24．(1) $y=-x^2-2x+3$

(2)① $\triangle PDE$ 为直角三角形，且 $\angle P=\angle BAC=45°$

$\therefore PE=\sqrt{2}PD=\sqrt{2}DE$

$\therefore C_{\triangle PDE}=PE+DE+PD=(\sqrt{2}+1)PE$

设 $P(m,-m^2-2m+3)$，易求得直线 AB 解析式为 $y=x+3$

则 $E(m,m+3)$

$\therefore PE=-m^2-3m=-(m+\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}$

$\therefore$ 当 $m=-\frac{3}{2}$ 时，PE 取到最大值 $\frac{9}{4}$，$C_{\triangle PDE}=(\sqrt{2}+1)PE$ 取到最大值 $\frac{9(\sqrt{2}+1)}{4}$

此时 $P(-\frac{3}{2},\frac{15}{4})$

②若 N 在对称轴上，则 $PF=2$，即 $-m^2-2m+3=2$

$\therefore m=-1\pm\sqrt{2}$

又 $-3<m<0$

$\therefore m=-1-\sqrt{2}$

$\therefore P(-1-\sqrt{2},2)$

若点 M 在对称轴上，则 $AF+PF=2$

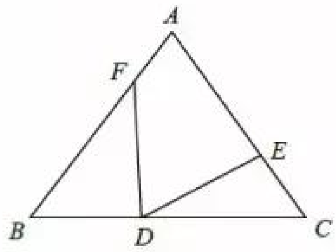
$\therefore 3+m-m^2-2m+3=2$

一、填空题

1. 已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$，则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=$__________。

2. 有__________个实数x，可以使得$\sqrt{120-\sqrt{x}}$为整数？

3. 如图，ΔABC中，$AB=AC$，$CD=BF$，$BD=CE$，用含$\angle A$的式子表示$\angle EDF$，应为$\angle EDF=$__________。



4. 在直角坐标系中，抛物线$y=x^2+mx-\frac{3}{4}m^2(m>0)$与$x$轴交于$A$、$B$两点，若$A$、$B$两点到原点的距离分别为$OA$、$OB$，且满足$\frac{1}{OB}-\frac{1}{OA}=\frac{2}{3}$，则m =__________。

5. 定圆A的半径为72，动圆B的半径为r，$r<72$且r是一个整数，动圆B保持内切于圆A且沿着圆A的圆周滚动一圈，若动圆B开始滚动时的切点与结束时的切点是同一点，则r共有__________个可能的值？

6. 学生若干人租游船若干只，如果每船坐4人，就余下20人；如果每船坐8人，那么就有一船不空也不满，则学生共有__________人？

二、选择题

9. 已知$x^2+ax-12$能分解成两个整系数的一次因式的积，则符合条件的整数a的个数为(　　)

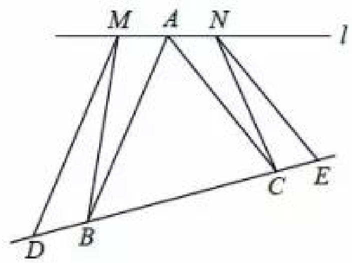
A.3　　B.4　　C.6　　D.8

10. 如图，D、E分别为ΔABC的底边所在直线上的两点，$DB=EC$，过A作直线l，作$DM//BA$交l于M，作$EN//CA$交l于N。设ΔABM面积为S_1，ΔACN面积为S_2，则(　　)

A. $S_1>S_2$

B. $S_1=S_2$

C. $S_1<S_2$



11. 设p_1，p_2，q_1、q_2为实数，则$p_1p_2=2(q_1+q_2)$，若方程甲：$x^2+p_1x+q_1=0$，乙：$x^2+p_2x+q_2=0$，则(　　)

A. 甲必有实根，乙也必有实根　　B. 甲没有实根，乙也没有实根

C. 甲、乙至少有一个有实根　　D. 甲、乙是否总有一个有实根不能确定

11. 设 p_1，p_2，q_1、q_2 为实数，则 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$，若方程甲：$x^2+p_1x+q_1=0$，乙：$x^2+p_2x+q_2=0$，则(　　)

A. 甲必有实根，乙也必有实根　　B. 甲没有实根，乙也没有实根

C. 甲、乙至少有一个有实根　　D. 甲、乙是否总有一个有实根不能确定

12. 设 $a=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\cdots+\frac{1007^2}{2013}$，$b=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{7}+\cdots+\frac{1007^2}{2015}$，则以下四个选项中最接近 $a-b$ 的整数为(　　)

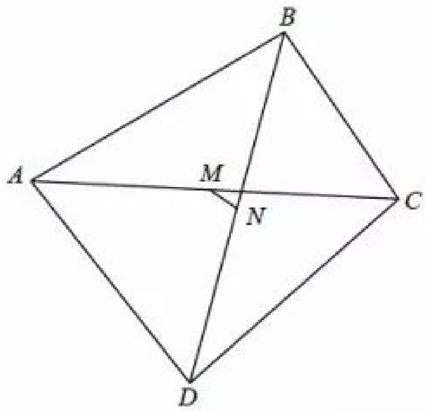
A. 252　　B. 504　　C. 1007　　D. 2013

二、解答题

13. 直角三角形 ABC 和直角三角形 ADC 有公共斜边 AC（B、D 位于 AC 的两侧），M、N 分别是 AC、BD 中点，且 M、N 不重合。

(1)线段 MN 与 BD 是否垂直？证明你的结论；

(2)若 $\angle BAC=30°$，$\angle CAD=45°$，$AC=4$，求 MN 的长。



1．$\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=1$，$1+\frac{b}{a}+1+\frac{a}{b}=1$，$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=-1$

2．$\sqrt{120-\sqrt{x}}\le\sqrt{120}<11$，$\sqrt{120-\sqrt{x}}=0,1,2,\cdots,10$，共 11 个

【高中知识点】不等式的放缩

3．$\triangle FBD\cong\triangle DCE$，

$$\angle EDF=180°-\angle FDB-\angle EDC=180°-\angle FDB-\angle BFD=\angle B=90°-\frac{1}{2}\angle A$$

4．$y=x^2+mx-\frac{3}{4}m^2=(x-\frac{m}{2})(x+\frac{3m}{2})$

$\frac{1}{OB}-\frac{1}{OA}=\frac{2}{3}$，$OA>OB$

$OA=\frac{3m}{2},OB=\frac{m}{2}$

$\frac{2}{m}-\frac{2}{3m}=\frac{2}{3}$，$m=2$

5．只需r是 72 的约数即可

$72=2^3\times3^2$，72 共有$4\times3=12$个约数

因此共有 12 个可能值

6．设x人，y船；则$x-4y=20$，$1\le x-8y\le7$

$\therefore 1\le 20-4y\le 7$，$\frac{13}{4}\le y\le\frac{19}{4}$，$y=4$，$x=36$

【高中知识点】不等式放缩——解不定方程

7． 原来是逆序的，现在变正序；原来是正序的，现在变逆序

因此现在的逆序数是$C_6^2-2=13$

【高中知识点】组合计数

8．$\frac{9}{10}n<x<\frac{10}{11}n$，要有唯一整数解，则$\frac{10}{11}n-\frac{9}{10}n=\frac{n}{110}\le2$

得$n\le220$

又当$n=220$时，不等式为$198<x<200$符合题意

因此$n_{\max}=220$

【高中知识点】数形结合思想——不等式解集与数轴

9．$-12=1\times(-12)=(-1)\times12=2\times(-6)=(-2)\times6=3\times(-4)=(-3)\times4$，total = 6

ans C

10．$S_{\triangle AMB}=S_{\triangle ADB}=S_{\triangle AEC}=S_{\triangle ANC}$，ans B

11．假设$\Delta_1<0,\Delta_2<0$，则$p_1^2<4q_1,p_2^2<4q_2$

$p_1p_2=2(q_1+q_2)>2\times\frac{p_1^2+p_2^2}{4}=\frac{p_1^2+p_2^2}{2}$，$p_1^2+p_2^2<2p_1p_2$，矛盾！

$\therefore$至少有一个有实根

ans C

12.

$$a-b=1+\frac{2^2-1^2}{3}+\frac{3^2-2^2}{5}+\frac{4^2-3^2}{7}+\cdots+\frac{1007^2-1006^2}{2013}-\frac{1007^2}{2015}$$

$$=1+1+1+1+\cdots+1-\frac{1007^2}{2015}$$

$$=1007-\frac{1007^2}{2015}=\frac{1007\times1008}{2015}$$

$$\frac{1007\times1008}{2015}>\frac{1007\times1008}{2016}=\frac{1007}{2}=503.5$$

$$\frac{1007\times1008}{2015}<\frac{1007\times1008}{2014}=\frac{1008}{2}=504$$

即 $503.5<a-b<504$

ans B

【高中知识点】不等式放缩

13. (1)连 MB,MD

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\angle ABC=90^\circ\\ MA=MC\end{array}\right\}\Rightarrow MB=\dfrac{1}{2}AC\\ \left.\begin{array}{r}\angle ADC=90^\circ\\ NA=NC\end{array}\right\}\Rightarrow MD=\dfrac{1}{2}AC\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}MB=MD\\ NB=ND\end{array}\right\}\Rightarrow MN\perp BD$$

⑵ $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$

$\therefore A,B,C,D$ 共圆，且 M 是圆心

$\therefore MB=MD=\dfrac{1}{2}AC=2$

$\angle BMN=\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=75^\circ$

$\therefore MN=MB\cos 75^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

14．设 $a_1=a,a_2=b$，则

$a_3=\dfrac{b}{a}$，$a_4=\dfrac{1}{a}$，$a_5=\dfrac{1}{b}$，$a_6=\dfrac{a}{b}$，$a_7=a$，$a_8=b$

$\therefore a_1,a_2,\cdots,a_m$ 以 6 为周期

$\therefore$ 当 m 是 6 的倍数时，只要 $a\neq b$，则一定满足题意

当 m 不是 6 的倍数时，因 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 以 6 为周期，且不全相等

$\therefore$ 所以周期可能为 2 或 3

若周期为 2，则 $a_1=a_3$，即 $b=a^2$，同时 $a_2=a_4$，即 $b=\dfrac{1}{a}$

$\therefore a=1,b=1$，矛盾！

若周期为 3，则 $a_1=a_4$，即 $a=\dfrac{1}{a}$，同时 $a_2=a_5$，即 $b=\dfrac{1}{b}$

$\therefore a=1,b=1$，矛盾！

因此，当且仅当 m 是 6 的倍数时，一定满足题意

一、填空题

1. 实数 x,y,z 满足 $|2x-6|+|y+1|+\sqrt{(x-4)y^2}+x^2+z^2=2+2xz$，则 $x+y-z=$__________。

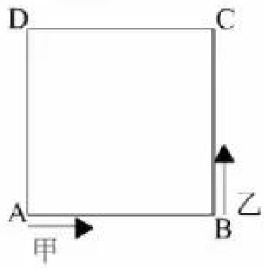
2. 若 $\frac{1001}{3}$ 的分子、分母同时加上正整数 n 时，该分数称为整数。这样的正整数 n 共有_______个。

3. 已知 $a^2=7-3a, b^2=7-3b$，且 $a\neq b$，则 $\frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2}=$____________。

4. 设 p 是奇数，则方程 $2xy=p(x+y)$ 满足 $x<y$ 的正整数解是_____________。

5. 方程 $x=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的解为_______________。

6. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为100米，甲、乙两个动点分别从 A 点和 B 点同时出发按逆时针方向移动。甲的速度是7米/秒，乙的速度是10米/秒。经过_________秒，甲、乙两动点第一次位于正方形的同一条边上。



7. 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，动点 P,Q,R 分别同时从顶点 A,B,C 出发，沿 AB,BC,CA 按逆时针方向以各自的速度匀速移动，且 P,Q,R 经过 $\triangle ABC$ 的一边所用时间分别为1秒，2秒，3秒。从运动开始起，在1秒内，经过_________秒 $\triangle PQR$ 的面积取到最小值。

8. 二次函数 $f(x)$ 的图像开口向上，与 x 轴交于 A,B 两点，与 y 轴交于点 C，以 D 为顶点，若三角形 ABC 的外接圆与 y 轴相切，且 $\angle DAC=150°$，则 $x\neq 0$ 时，$\frac{f(x)}{|x|}$ 的最小值是________。

二、解答题

9. 已知 a 是正常数，且关于 x 的方程 $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}=\frac{\sqrt{ax}}{x^2-3x+2}$ 仅有一个实数根，求实数 a 的取值范围。

10. 如图，抛物线的顶点坐标是 $\left(\frac{5}{2},-\frac{9}{8}\right)$，且经过点 $A(8,14)$。

(1) 求该抛物线的解析式；

(2) 设该抛物线与 y 轴相交于点 B，与 x 轴相交于 C、D 两点(点 C 在点 D 的左边)，求点 B、C、D 的坐标；

1．$|2x-6|+|y+1|+\sqrt{(x-4)y^2}+(x-z)^2=2$

$x\geq 4$，则$|2x-6|\geq 2$

$\therefore x=4$，$y+1=0$，$x=z$

故$x=z=4$，　$y=-1$

$x+y-z=-1$

2．$\dfrac{n+1001}{n+3}=1+\dfrac{998}{n+3}$，

$998=2\times 499$，$n+3\geq 4$，故$n+3=499$或998，共 2 个

【高中知识衔接】线性分式表达式——分离变量

3．$a^2+3a-7=0$，$b^2+3b-7=0$

则$a+b=-3$，$ab=-7$

$$\frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2}=\frac{a^3+b^3}{(ab)^2}=\frac{(a+b)^3-3(a+b)ab}{(ab)^2}=\frac{(-3)^3-3(-3)(-7)}{(-7)^2}=\frac{-27-63}{49}=-\frac{90}{49}$$

4．【注】原题应为p是奇质数

$(2x-p)(2y-p)=p^2$

则$2x-p=1$，$2y-p=p^2$

$\therefore x=\dfrac{p+1}{2}$，$y=\dfrac{p^2+p}{2}$

5．显然$x>0$

两边平方得$x^2=x-\dfrac{1}{x}+1-\dfrac{1}{x}+2\sqrt{(x-\dfrac{1}{x})(1-\dfrac{1}{x})}$

两边同乘x，得$x^3=x^2+x-2+2\sqrt{(x^2-1)(x-1)}$

即$x^3-x^2-x-2\sqrt{(x^2-1)(x-1)}+2=0$

$x^3-x^2-x+1-2\sqrt{x^3-x^2-x+1}+1=0$

即$(\sqrt{x^3-x^2-x+1}-1)^2=0$

$\therefore x^3-x^2-x=0$

解得$x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

6．10s 时，乙到C点，甲跑 70m，在AB边

20s 时，乙到D点，甲跑 140m，在BC边

30s 时，乙到 A 点，甲跑 210m，在 CD 边
40s 时，乙到 B 点，甲跑 280m，在 CD 边
50s 时，乙到 C 点，甲跑 350m，在 AD 边
60s 时，乙到 D 点，甲跑 420m，在 AB 边
70s 时，乙到 A 点，甲跑 490m，在 AB 边
因此，经过 70s 时，甲乙位于同一条边

7．设点 P 速度为 6，Q 的速度为 3，R 的速度为 2，边长 $AB=6$

则 $S_{\triangle APR}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AP\cdot AR=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 6t\times(6-2t)$

$S_{\triangle BPQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}BP\cdot BQ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 3t\times(6-6t)$

$S_{\triangle CQR}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}CQ\cdot CR=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2t\times(6-3t)$

$\therefore S_{\triangle APR}+S_{\triangle BPQ}+S_{\triangle CQR}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(66t-36t^2)$

当上式取最大值时，$S_{\triangle PQR}$ 面积最小

当因此当 $t=\dfrac{11}{12}$ 时，$S_{\triangle PQR}$ 面积最小

【高中知识点】解三角形——三角形的面积

8．【注】原题角度大小的条件应为$\angle ADB = 150^\circ$

圆心坐标为$M(-\frac{b}{2a}, c)$，则$|MC| = \left|\frac{b}{2a}\right|$

$|MA| = \sqrt{(x_A + \frac{b}{2a})^2 + c^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} + c^2}$

$|MA| = |MC|$，得$\frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} + c^2$

得$ac = 1$

在$\triangle ADB$中，$|DA| = |DB|$，$\angle ADB = 150^\circ$，则

$|AB| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$，$y_D = \frac{-\Delta}{4a}$

$|AB| = (4 + 2\sqrt{3})(-y_D)$，解得$\Delta = 28 - 16\sqrt{3}$

即$b^2 - 4ac = \frac{4}{3}$

得$b^2 = 32 - 16\sqrt{3}$

因此$b = \pm(2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})$

因此，$f(x)=ax^2+bx+\frac{1}{a}$，且 $a>0$

则 $\frac{f(x)}{|x|}=a|x|+\frac{1}{a|x|}+b\geq 2-(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})=-2\sqrt{6}+2\sqrt{2}+2$

因此，最小值为 $-2\sqrt{6}+2\sqrt{2}+2$

【高中知识点】解析几何——圆的方程、两根差公式、分离变量、均值不等式

9．【注】原题应为“有且仅有一个实数根”，这样表达的更准确一些

原方程

$$\Leftrightarrow \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}=\frac{\sqrt{ax}}{(x-1)(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=\sqrt{ax} \\ x\neq 1 \\ x\neq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-12x+9=ax \\ x\geq \frac{3}{2} \\ x\neq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=4x+\frac{9}{x}-12 \\ x\geq \frac{3}{2} \\ x\neq 2 \end{cases}$$

当 $x=2$ 时，$4x+\frac{9}{x}-12=\frac{1}{2}$

∴要使上述方程有且仅有一个实根，则 $a>0$ 且 $a\neq\frac{1}{2}$

【高中知识点】等价转化思想，参变分离思想，分类讨论思想，对勾函数的图像与性质

10.

⑴设 $y=a(x-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{8}$，将 $(8,14)$ 代入，得 $a=\frac{1}{2}$

∴ $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+2$

⑵ $y=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)$，故 $B(0,2)$，$C(1,0)$，$D(4,0)$

⑶作点 B 关于 x 轴的对称点 $E(0,-2)$

一、填空题

1、在$\triangle ABC$中，设$\overrightarrow{CA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{b}$，$P$是中线$AE$与中线$CF$的交点，则$\overrightarrow{BP}=$______。（用$\vec{a},\vec{b}$表示）

2、已知a是正实数，则$a+\dfrac{2}{a}$的最小值等于______

3、正整数360共有______个正因数。

4、小明负责小组里4个同学的作业本的收发，但做事比较马虎。如果他随机的分发4个同学的本子，那么他把每个同学的本子都发错的概率是______

5、计算：$\dfrac{1}{\left|\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right|}=$______

6、计算：$\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{2013\times2014}=$______

7、一卷直径为10厘米的圆柱形无芯卷筒纸是由长为L厘米的纸绕80圈而成，那么$L=$___

8、满足方程：$\dfrac{4}{m}+\dfrac{2}{n}=1$的正整数有序数对的（$m,n$）个数为______

9、已知实数x满足$2x^2-4x=\dfrac{6}{x^2-2x}-1$，则$x^2-2x$的值为______

10、直线$x-y=1$与反比例函数$y=\dfrac{k}{x}$的图像如果恰有一个交点，则该交点必定在第_____象限。

11、平面上边长为1的正方形$ABCD$绕着其中心旋转$45°$得到正方形$A'B'C'D'$，那么这两个正方形重叠部分的面积为______

12、请在下列表格的9个小方格中分别填入数字1、2、3、4、5、6、7、8、9，使得每行每列，以及两条对角线上的三个数之和相等（**只需要填1种答案**）______

13、在前1000个整数1，2，3，…，1000中，数码1共出现了______次

14、设$A(0,-2)$，$B(4,2)$是平面直角坐标系中的两点，P是线段AB垂直平分线上的点，如果点P与点$C(1,5)$的距离等于$2\sqrt{2}$，则点P的坐标为______

1. $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{3}$

【高中知识点】向量的分解

2. $a+\frac{2}{a}\geq 2\sqrt{a\cdot\frac{2}{a}}=2\sqrt{2}$

【高中知识点】均值不等式

3. $360=2^3\times 3^2\times 5$

约数个数为 $4\times 3\times 2=24$

4. 所有可能的情况为

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432
2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431
3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421
4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

全都发错有 9 种可能，因此概率为 $\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$

5. $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}$

6. $\dfrac{2013}{2014}$

【高中知识点】裂项求和

7. 设纸的厚度为r，则

$2\times 80r=10$

即$r=\dfrac{1}{16}$

$L=2\pi(r+2r+3r+\cdots+80r)=6480\pi r=405\pi$ cm

【高中知识点】等差数列求和

8.

$(m-4)(n-2)=8$

$=8\times 1=1\times 8$

$=2\times 4=4\times 2$

$=(-8)\times(-1)=(-1)\times(-8)$

$=(-4)\times(-2)=(-2)\times(-4)$

依次检验，只有前 3 组符合题意，故(m,n)的个数为3个

9．设$x^2-2x=t$，则

$2t=\frac{6}{t}-1$，即$2t^2+t-6=0$，即$(t+2)(2t-3)=0$

$\therefore t=-2$或$\frac{3}{2}$

又$t=(x-1)^2-1\geq -1$

$\therefore t=\frac{3}{2}$

10．四

11．考虑四个角的小直角三角形，每个小直角三角形的斜边上的高为$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

则面积为$(\frac{\sqrt{2}-1}{2})^2=\frac{3-2\sqrt{2}}{4}$

因此，重叠的面积为$1-\frac{3-2\sqrt{2}}{4}=\frac{2\sqrt{2}+1}{4}$

$$\begin{matrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{matrix}$$

12．

13．一位数中，1出现了1次
两位数中1在十位上出现了10次，在个位上，出现了9次
这样，前两位数共出现20次
三位数中，1在百位上共出现了100次，十位和个位看成一个整体，共出现了数字1有$20\times 9=180$次
最后数1000里面出现了1有1次
一共有$20+100+180+1=301$次
【高中知识点】组合计数

14．线段AB垂直平分线的方程为$y=-x+2$
因此，设$P(t,-t+2)$，则$|PC|^2=(t-1)^2+(-t+2-5)^2=8$
即$2t^2+4t+10=8$，解得$t=-1$
因此$P(-1,3)$
【高中知识点】解析几何——直线与圆的方程

15．两式相减，得$97x=97y$，即$x=y$

16．$(-4,4)$

【高中知识点】解析几何——点关于直线的对称

17．在$\triangle ABC$中作$\angle CAB$的角平分线AD

设$AB=x$，则$\angle C=36^\circ$，$\angle CAB=\angle B=72^\circ$，$\angle CAD=\angle BAD=36^\circ$

可得$\triangle BAD\backsim\triangle BCA$

故$\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{BD}{BA}$

则$BD=\dfrac{BA^2}{BC}=x^2$

$\therefore CD=CB-BD=1-x^2$

又$\angle C=\angle CAD=36^\circ$，故$DA=DC=1-x^2$

又$\angle ADB=\angle B=72^\circ$，故$AB=AD$，即$x=1-x^2$

$\therefore x^2+x-1=0$

解得$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$或$\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$（舍）

$\therefore AB=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

过A作$\triangle ABC$的高AE，则

$$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{x^2-(\frac{x^2}{2})^2}$$

$$x^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

则$AE=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}-(\dfrac{3-\sqrt{5}}{4})^2}=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

则$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}CB\cdot AE=\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}$

那么，过点 P 作平行于 CD 的直线，必与抛物线相切（否则在平行线的上方，有到比 CD 的距离更远的点）

$C(-4,-6)$，$D(1,-1)$，则直线 CD 的斜率为 $k=\dfrac{-1-(-6)}{1-(-4)}=1$

设过 P 的直线为 $y=x+b$，代入 $y=-x^2-2x+3$

得 $x^2+3x+(b-3)=0$

$\therefore \Delta=9-4(b-3)=21-4b=0$

$\therefore b=\dfrac{21}{4}$

方程即 $x^2+3x+\dfrac{9}{4}=0$，所以得 $x=-\dfrac{3}{2}$

则 $y=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{21}{4}=\dfrac{15}{4}$

$\therefore$ 当 $S_{\triangle PCD}$ 面积最大时，P 的坐标为 $P(-\dfrac{3}{2},\dfrac{15}{4})$

【高中知识点】解析几何——直线的方程