2018年普通高等学校招生全国统一考试
广东省理科数学模拟试卷(一)
参考答案及评分标准

评分标准：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分.
3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数.
4. 只给整数分数，选择题不给中间分.

1. B　由$-1<1-x<1$，可得$0<x<2$，即$A=\{x|0<x<2\}$. 由$x^2<1$，可得$-1<x<1$，即$B=\{x|-1<x<1\}$. 所以$A\cap B=\{x|0<x<1\}$.

2. D　因为$(2-i)(a+4i)=2a-ai+8i+4=(2a+4)+(8-a)i$为纯虚数，所以$2a+4=0$，解得$a=-2$.

3. A　此点取自黑色部分的概率是$\frac{4^2\pi-1^2\pi}{10^2\pi}=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$.

4. C　令$t=\frac{x}{2}$，则$x=2t$，所以$f(t)=8t^3-6t$，即$f(x)=8x^3-6x$，则$f'(x)=24x^2-6$，$f'(1)=18$.

5. C　由C可知一条渐近线方程为$bx-ay=0$，设$F(c,0)$，则点F到C的一条渐近线的距离$d=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=b=2a$，则双曲线$C$的离心率$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{5}$.

6. A　$\left(x+\frac{1}{x}\right)(1+2x)^5=x(1+2x)^5+\frac{1}{x}(1+2x)^5$，因为$x(1+2x)^5$的展开式中含$x^3$的项为$x\cdot C_5^2(2x)^2=40x^3$，$\frac{1}{x}(1+2x)^5$的展开式中含$x^3$的项为$\frac{1}{x}\cdot C_5^4(2x)^4=80x^3$，所以$x^3$的系数为$40+80=120$.

7. B　由题可知该几何体为一个长方体截去了两个半圆柱而形成的，则该几何体的表面积为$4\times6\times2+2(4\times6-4\pi)+2\times2\pi\times4=96+8\pi$.

8. D　对于选项D，把C向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到$y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x$，该函数为偶函数，其图象关于$y$轴对称.

9. D　$n=1,s=0$；$n=2,s=2$；$n=3,s=4$；…；$n=99,s=\frac{99^2-1}{2}$；$n=100,s=\frac{100^2}{2}$；$n=101>100$，结束. 所以选D.

10. C　由$A=\frac{\pi}{3}$，$2b\sin B+2c\sin C=bc+\sqrt{3}a$，可知$b\sin B+c\sin C=\frac{\sqrt{3}}{3}bc\sin A+a\sin A$，得$b^2+c^2=\frac{\sqrt{3}}{3}abc+a^2$，

所以 $2bc\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}abc$，解得 $a=2\sqrt{3}\cos A=\sqrt{3}$. 又 $b^2+c^2=bc+3\geqslant 2bc$，所以 $bc\leqslant 3$.

从而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

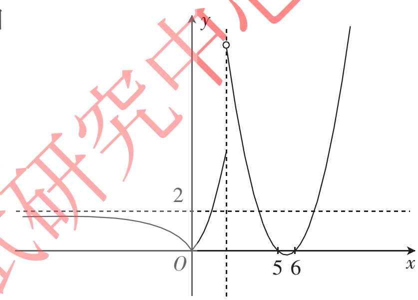
11. A　设切线 MA 的方程为 $x=ty+m$，代入抛物线方程得 $y^2-ty-m=0$. 由直线与抛物线相切得 $\Delta=t^2+4m=0$，则 $A\left(\frac{t^2}{4},\frac{t}{2}\right)$，$B\left(\frac{t^2}{4},-\frac{t}{2}\right)$. 将点 A 的坐标代入 $x=ty+m$，得 $m=-\frac{t^2}{4}$，所以 $M\left(-\frac{t^2}{4},0\right)$.

故 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{4}=\frac{1}{4}\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{16}$. 当 $t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ 的最小值为 $-\frac{1}{16}$.

12. B　不妨设 $a<b<c<d$，由 $2-2^{a+1}=2^{b+1}-2$，得 $2^a+2^b=2$. 结合图象(右图)可知，$c+d=11$，$c\in(4,5)$，则 $2^c+2^d=2^c+2^{11-c}=2^c+\frac{2^{11}}{2^c}$.

令 $g(t)=t+\frac{2^{11}}{t}(16<t<32)$，易知 $g(t)$ 在 $(16,32)$ 上单调递减，

故 $2^c+2^d\in(96,144)$，则 $2^a+2^b+2^c+2^d\in(98,146)$.

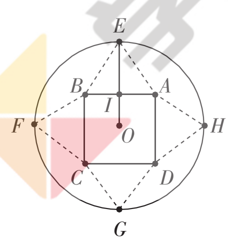


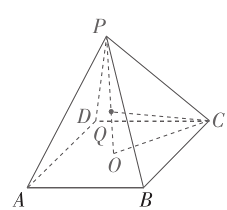
13. 1　因为 $|\boldsymbol{e}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2|^2=1-2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+3=1$，所以 $|\boldsymbol{e}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{e}_2|=1$.

14. 2　作出不等式组表示的可行域，由图可知(图略)，当直线 $y=-x+z$ 过点 $(4,-2)$ 时，$z=x+y$ 取得最大值，最大值为 2.

15. $-\sqrt{3}$　由题可得 $m=\frac{2\cos 140^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{-2\cos 40^\circ-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{-2\cos(30^\circ+10^\circ)-\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}=\frac{-\sqrt{3}\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=-\sqrt{3}$.

16. $\frac{500\sqrt{3}\pi}{27}$　如下图，连结 OE 交 AB 于点 I，设 E,F,G,H 重合于点 P，正方形的边长为 $x(x>0)$，则 $OI=\frac{x}{2}$，$IE=6-\frac{x}{2}$. 因为该四棱锥的侧面积是底面积的 2 倍，所以 $4\cdot\frac{x}{2}\left(6-\frac{x}{2}\right)=2x^2$，解得 $x=4$. 设该四棱锥的外接球的球心为 Q，半径为 R，则 $OC=2\sqrt{2}$，$OP=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，$R^2=(2\sqrt{3}-R)^2+(2\sqrt{2})^2$，解得 $R=\frac{5}{\sqrt{3}}$，外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{500\sqrt{3}\pi}{27}$.





17. 解：(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 a_3,a_6,a_{11} 成等比数列，

所以 $a_6^2=a_3a_{11}$. 即 $(a_1+5d)^2=(a_1+2d)(a_1+10d)$. …………………… 3 分

化简得 $5d-2a_1=0$. …………………… 5 分

又 $a_1=5$，所以 $d=2$. 从而 $a_n=2n+3$. …………………………………………………… 6 分

(2)因为 $b_n=(2n+3)\cdot 3^{n-1}$，…………………………………………………… 7 分

所以 $S_n=5\times 3^0+7\times 3^1+9\times 3^2+\cdots+(2n+3)3^{n-1}$. …………………………………… 8 分

所以 $3S_n=5\times 3^1+7\times 3^2+9\times 3^3+\cdots+(2n+3)3^n$. …………………………………… 9 分

以上两个等式相减得 $-2S_n=5+2\times\dfrac{3(3^{n-1}-1)}{2}-(2n+3)3^n$，…………………………… 11 分

化简得 $S_n=(n+1)3^n-1$. …………………………………………………… 12 分

18. 解：(1)被系统评为“积极性”的概率为 $\dfrac{30}{50}=\dfrac{3}{5}$，$X\sim B\left(3,\dfrac{3}{5}\right)$.

故 $P(X\leqslant 2)=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{98}{125}$. …………………………………………………… 2 分

X 的数学期望 $E(X)=3\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{9}{5}$. …………………………………………………… 5 分

(2)“$x>y$”包含“$x=3,y=2$”，“$x=3,y=1$”，“$x=3,y=0$”，“$x=2,y=1$”，“$x=2,y=0$”，“$x=1,y=0$”，

$P(x=3,y=2)=\dfrac{C_4^3}{C_6^3}\times\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{30}$，…………………………………………………… 6 分

$P(x=3,y=1)=\dfrac{C_4^3}{C_6^3}\times\dfrac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\dfrac{2}{15}$，…………………………………………………… 7 分

$P(x=3,y=0)=\dfrac{C_4^3}{C_6^3}\times\dfrac{C_2^0}{C_4^2}=\dfrac{1}{30}$，…………………………………………………… 8 分

$P(x=2,y=1)=\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}\times\dfrac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\dfrac{2}{5}$，…………………………………………………… 9 分

$P(x=2,y=0)=\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}\times\dfrac{C_2^0}{C_4^2}=\dfrac{1}{10}$，…………………………………………………… 10 分

$P(x=1,y=0)=\dfrac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}\times\dfrac{C_2^0}{C_4^2}=\dfrac{1}{30}$，…………………………………………………… 11 分

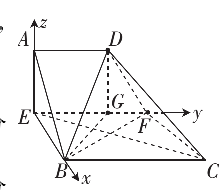
所以 $P(x>y)=\dfrac{1}{30}+\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{30}=\dfrac{11}{15}$. …………………………………… 12 分

19. (1)证明：由题可得 $EF\parallel AD$，则 $AE\perp EF$，…………………………………………………… 1 分

又 $AE\perp CF$，且 $EF\cap CF=F$，所以 $AE\perp$ 平面 $EBCF$. …………………………………… 3 分

因为 $AE\subset$ 平面 $AEFD$，所以平面 $AEFD\perp$ 平面 $EBCF$. …………………………………… 5 分

(2)解：(方法一)过点 D 作 $DG\parallel AE$ 交 EF 于点 G，连结 BG，则 $DG\perp$ 平面 $EBCF$，$DG\perp EC$.



又 $BD\perp EC$，$BD\cap DG=D$，所以 $EC\perp$ 平面 BDG，$EC\perp BG$. ………………………… 6 分

易证 $\triangle EGB\backsim\triangle BEC$，则 $\dfrac{EG}{EB}=\dfrac{EB}{BC}$，得 $EB=2\sqrt{2}$. ………………………… 7 分

以 E 为坐标原点，$\overrightarrow{EB}$ 的方向为 x 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$.

则 $F(0,3,0)$，$D(0,2,2\sqrt{2})$，$C(2\sqrt{2},4,0)$，$A(0,0,2\sqrt{2})$，$B(2\sqrt{2},0,0)$.

故 $\overrightarrow{BD}=(-2\sqrt{2},2,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{FD}=(0,-1,2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BC}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{CD}=(-2\sqrt{2},-2,2\sqrt{2})$. ………… 9 分

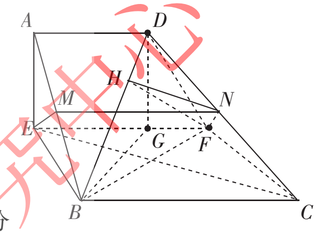
设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 FBD 的法向量,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-2\sqrt{2}x+2y+2\sqrt{2}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FD}=-y+2\sqrt{2}z=0,\end{cases}$

令 $z=1$,得 $\boldsymbol{n}=(3,2\sqrt{2},1)$. …………………………………………………………………… 10 分

设 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$是平面 BCD 的法向量,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=4b=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=-2\sqrt{2}a-2b+2\sqrt{2}c=0,\end{cases}$

令 $a=1$,得 $\boldsymbol{m}=(1,0,1)$. …………………………………………………………………… 11 分

因为 $\cos<\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}>=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{4}{\sqrt{18}\times\sqrt{2}}=\dfrac{2}{3}$,所以二面角 $F-BD-C$ 的余弦值为$\dfrac{2}{3}$. ……………… 12 分



(方法二)依题意可得 $EF\perp$平面 AEB,$BC/\!/EF$.

即 $BC\perp$平面 AEB,所以平面 $ABCD\perp$平面 AEB.

取 AB 的中点 M,CD 的中点 N,连结 EM,MN,FN,

因为 $AE=BE$,所以 $EM\perp AB$.

又平面 $AEB\cap$平面 $ABCD=AB$,所以 $EM\perp$平面 $ABCD$. ……………………… 6 分

因为 $MN/\!/BC$,且 $MN=3$,$EF/\!/BC$,且 $EF=3$,

所以 $MN\underline{/\!/}EF$. 即四边形 $EMNF$ 是平行四边形.

所以 $EM/\!/FN$. 从而 $FN\perp$平面 $ABCD$. 所以 $FN\perp BD$. …………………………………… 7 分

作 $NH\perp BD$ 交 BD 于点 H,连结 FH,因为 $FN\perp BD$,$NH\perp BD$,所以 $BD\perp$平面 NFH. 所以 $BD\perp HF$,所以$\angle FHN$ 是二面角 $F-BD-C$ 的平面角. …………………………………………………… 8 分

过点 D 作 $DG/\!/AE$ 交 EF 于点 G,连结 BG,则 $DG\perp$平面 $EBCF$,$DG\perp EC$.

又 $BD\perp EC$,$BD\cap DG=D$,所以 $EC\perp$平面 BDG,$EC\perp BG$. ……………………………… 9 分

易证$\triangle EGB\backsim\triangle BEC$,则$\dfrac{EG}{EB}=\dfrac{EB}{BC}$,得 $EB=2\sqrt{2}$. …………………………………………… 10 分

易得 $FD=3$,$DC=2\sqrt{5}$,$FN=EM=2$,$BD=2\sqrt{5}$.

在$\triangle BDC$ 中,$\cos\angle BDC=\dfrac{BD^2+DC^2-BC^2}{2BD\cdot DC}=\dfrac{3}{5}$,则 $\sin\angle BDC=\dfrac{4}{5}$.

由 $\sin\angle BDC=\dfrac{4}{5}=\dfrac{NH}{DN}$,得 $NH=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. ……………………………………………… 11 分

所以 $\tan\angle FHN=\dfrac{2}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. 则 $\cos\angle FHN=\dfrac{2}{3}$.

所以二面角 $F-BD-C$ 的余弦值为$\dfrac{2}{3}$. ………………………………………………………… 12 分

20. 解:(1)由题意可得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1\end{cases}$, ……………………………………………………… 2 分

解得$\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$. 故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………… 4 分

(2)由题意可知直线 l 的斜率存在且不为 0,

故可设直线 l 的方程为 $y=kx+m(m\neq 0)$,点 P,Q 的坐标分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$,

由 $S_{\triangle PMO}=\frac{1}{2}|MO||y_1|,S_{\triangle QMO}=\frac{1}{2}|MO||y_2|,S_{\triangle PNO}=\frac{1}{2}|NO||x_1|,S_{\triangle QNO}=\frac{1}{2}|NO||x_2|$,

化简得$\frac{y_1^2+y_2^2}{y_1y_2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}$, ………………………………………… 6 分

$\frac{y_1^2+y_2^2}{y_1y_2}-2=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}-2,\frac{(y_1-y_2)^2}{y_1y_2}=\frac{(x_1-x_2)^2}{x_1x_2}$,即$\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=k^2$. ………………………… 7 分

由$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$,消去 y 得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$, ………………………… 8 分

则 $\Delta=64k^2m^2-16(1+4k^2)(m^2-1)=16(4k^2-m^2+1)>0$,且 $x_1+x_2=\frac{-8km}{1+4k^2},x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{1+4k^2}$.

故 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$. ………………………… 10 分

因此$\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}=k^2$,即$\frac{-8k^2m^2}{1+4k^2}+m^2=0$. ………………………… 11 分

又 $m\neq 0$,所以 $k^2=\frac{1}{4}$. 又结合图象可知,$k=-\frac{1}{2}$,所以直线 l 的斜率为定值. ………………………… 12 分

21. 解:(1)$f'(x)=(x-1)e^x+a\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{(x-1)(xe^x-a)}{x}(x>0)$, ………………………… 1 分

令 $g(x)=xe^x-a(x>0),g'(x)=(x+1)e^x>0$,故 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

则 $g(x)>g(0)=-a$. ………………………………………… 3 分

因此,当 $a\leqslant 0$ 或 $a=e$ 时,$f'(x)$只有一个零点; ………………………… 4 分

当 $0<a<e$ 或 $a>e$ 时,$f'(x)$有两个零点. ………………………… 5 分

(2)当 $a\leqslant 0$ 时,$xe^x-a>0$,则函数 $f(x)$在 $x=1$ 处取得最小值 $f(1)=-e$. ………………………… 7 分

当 $a>0$ 时,则函数 $y=xe^x-a$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,则必存在正数 x_0,

使得 $x_0e^{x_0}-a=0$. ………………………………………… 8 分

若 $a>e$,则 $x_0>1$,函数 $f(x)$在$(0,1)$与$(x_0,+\infty)$上单调递增,在$(1,x_0)$上单调递减,

又 $f(1)=-e$,故不符合题意. ………………………………………… 9 分

若 $a=e$,则 $x_0=1,f'(x)\geqslant 0$,函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

又 $f(1)=-e$,故不符合题意. ………………………………………… 10 分

若 $0<a<e$,则 $0<x_0<1$,设正数 $b=e^{-\frac{e}{a}-1}\in(0,1)$,

则 $f(b)=(b-2)e^b+a(\ln b-b+1)<a(\ln e^{-\frac{e}{a}-1}-b+1)=a\left(-\frac{e}{a}-b\right)=-e-ab<-e$,

与函数 $f(x)$的最小值为$-e$ 矛盾. ………………………………………… 11 分

综上所述,$a\leqslant 0$,即 $a\in(-\infty,0]$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1)因为圆 C_1 的普通方程为 $x^2+y^2-4x-8y=0$，

把 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入方程得 $\rho^2-4\rho\cos\theta-8\rho\sin\theta=0$.

所以 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta+8\sin\theta$，…………………………………………… 2 分

C_2 的平面直角坐标系方程为 $y=\sqrt{3}x$. …………………………………………………………… 4 分

(2)分别将 $\theta=\frac{\pi}{3}, \theta=\frac{\pi}{6}$ 代入 $\rho=4\cos\theta+8\sin\theta$，得 $\rho_1=2+4\sqrt{3}, \rho_2=4+2\sqrt{3}$. ………………………… 8 分

则△OMN 的面积为 $\frac{1}{2}\times(2+4\sqrt{3})\times(4+2\sqrt{3})\times\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=8+5\sqrt{3}$. ………………………… 10 分

23. 解：(1)由题意可得 $g(x)=\begin{cases}-3x+3, x\leqslant -2\\ -5x-1, -2<x<\frac{1}{4}\\ 3x-3, x\geqslant\frac{1}{4}\end{cases}$，…………………………………………………… 1 分

当 $x\leqslant -2$ 时，$-3x+3<6$，得 $x>-1$，无解；…………………………………………………… 2 分

当 $-2<x<\frac{1}{4}$ 时，$-5x-1<6$，得 $x>-\frac{7}{5}$，即 $-\frac{7}{5}<x<\frac{1}{4}$；…………………………………… 3 分

当 $x\geqslant\frac{1}{4}$ 时，$3x-3<6$，得 $\frac{1}{4}\leqslant x<3$. ……………………………………………………… 4 分

综上，$g(x)<6$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{7}{5}<x<3\right\}$. …………………………………………………… 5 分

(2)因为存在 $x_1, x_2\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_1)=-g(x_2)$ 成立，

所以 $\{y|y=f(x), x\in\mathbf{R}\}\cap\{y|y=-g(x), x\in\mathbf{R}\}\neq\varnothing$. ………………………………………… 6 分

又 $f(x)=3|x-a|+|3x+1|\geqslant|(3x-3a)-(3x+1)|=|3a+1|$，…………………………………… 7 分

由(1)可知 $g(x)\in\left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$，则 $-g(x)\in\left(-\infty, \frac{9}{4}\right]$. ………………………………………… 8 分

所以 $|3a+1|\leqslant\frac{9}{4}$，解得 $-\frac{13}{12}\leqslant a\leqslant\frac{5}{12}$.

故 a 的取值范围为 $\left[-\frac{13}{12}, \frac{5}{12}\right]$. ………………………………………………………… 10 分