海淀区高三年级第二学期期末练习

数　　学（文科）

2018.5

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题纸交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合 $A=\{1,2,4\}$，$B=\{1,3,5\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$

（A）$\{1\}$　（B）$\{3,5\}$　（C）$\{1,6\}$　（D）$\{1,3,5,6\}$

（2）已知复数 z 在复平面上对应的点为（1，−1），则

（A）$z=-1+\mathrm{i}$　（B）$z=1+\mathrm{i}$　（C）$z+\mathrm{i}$ 是实数　（D）$z+\mathrm{i}$ 是纯虚数

（3）若直线 $x+y+a=0$ 是圆 $x^2+y^2-2y=0$ 的一条对称轴，则 a 的值为

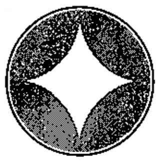
（A）1　（B）−1　（C）2　（D）−2

（4）已知 $x>y>0$，则

（A）$\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$　（B）$\left(\frac{1}{2}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^y$

（C）$\cos x>\cos y$　（D）$\ln(x+1)>\ln(y+1)$

（5）如图，半径为 1 的圆内有一阴影区域，在圆内随机撒入一大把豆子，共 n 颗，其中落在阴影区域内的豆子共 m 颗，则阴影区域的面积约为



（A）$\frac{m}{n}$　（B）$\frac{n}{m}$

（C）$\frac{m\pi}{n}$　（D）$\frac{n\pi}{m}$

（6）设曲线 C 是双曲线，则“C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$”是“C 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$”的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

（7）某校为了解高一年级 300 名学生对历史、地理学科的选课情况，对学生进行编号，用 1，2，…，300 表示，并用（x_i，y_i）表示第 i 名学生的选课情况，其中

$$x_i=\begin{cases}0，第i名学生不选历史，\\1，第i名学生选历史，\end{cases}$$

$$y_i=\begin{cases}0，第i名学生不选地理，\\1，第i名学生选地理.\end{cases}$$

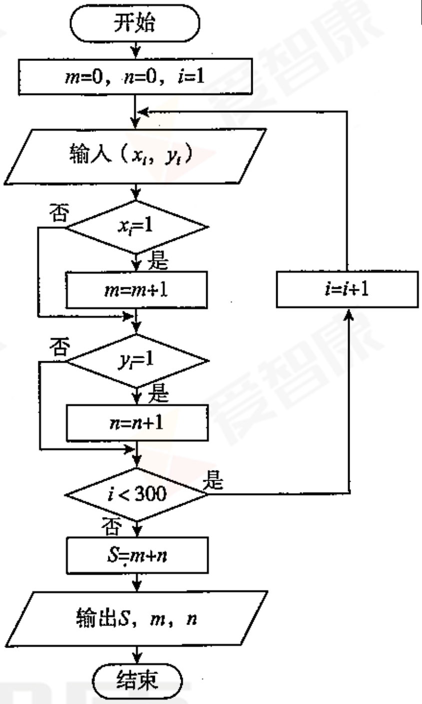
根据如图所示的程序框图，下列说法中错误的是

（A）m 为选择历史的学生人数

（B）n 为选择地理的学生人数

（C）S 为至少选择历史、地理一门学科的学生人数

（D）S 为选择历史的学生人数与选择地理的学生人数之和



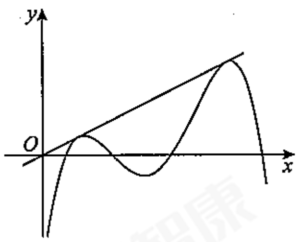
（8）如图，已知直线 $y=kx$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切于两点，函数 $g(x)=kx+m$（$m>0$），则函数 $F(x)=g(x)-f(x)$

（A）有极小值，没有极大值

（B）有极大值，没有极小值

（C）至少有两个极小值和一个极大值

（D）至少有一个极小值和两个极大值



第二部分（非选择题，共110分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）已知抛物线 C 的焦点为 $F(0，1)$，则抛物线 C 的标准方程为________.

（10）已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，且满足 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$________，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$________.

（11）将函数 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍，纵坐标不变，得到函数 $g(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象，则 $\omega=$________，$\varphi=$________.

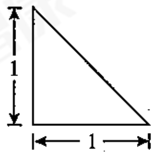
（12）在△ABC 中，$a:b:c=4:5:6$，则 $\tan A=$________.

（13）A，B 两个居民小区的居委会欲组织本小区的中学生，利用双休日去市郊的敬老院参加献爱心活动．两个小区每位同学的往返车费及服务老人的人数如下表：

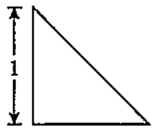
	A 小区	B 小区
往返车费	3 元	5 元
服务老人的人数	5 人	3 人

根据安排，去敬老院的往返总车费不能超过 37 元，且 B 小区参加献爱心活动的同学比 A 小区的同学至少多 1 人，则接受服务的老人最多有________人．

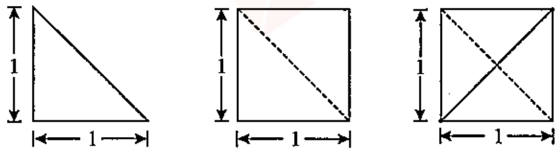
（14）某几何体的主视图和俯视图如右图所示，在下列图形中，可能是该几何体左视图的图形是__________．（写出所有可能的序号）



主视图



俯视图



① ② ③

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_{n+1}-a_n=2n+3$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若数列 $\{a_n+b_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2\cos x\sin(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 的相邻两条对称轴的距离；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\alpha]$ 上单调递增，求 α 的最大值.

（17）（本小题 14 分）

如图 1，已知菱形 $AECD$ 的对角线 AC，DE 交于点 F，点 E 为 AB 的中点．将三角形 ADE 沿线段 DE 折起到 PDE 的位置，如图 2 所示．

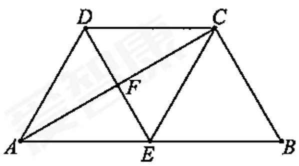


图 1

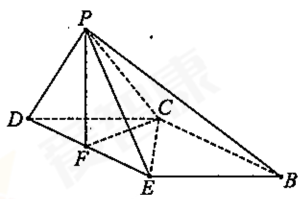


图 2

（Ⅰ）求证：$DE\perp$ 平面 PCF；

（Ⅱ）求证：平面 $PBC\perp$ 平面 PCF；

（Ⅲ）在线段 PD，BC 上是否分别存在点 M，N，使得平面 $CFM//$ 平面 PEN？若存在，请指出点 M，N 的位置，并证明；若不存在，请说明理由.

（18）（本小题 13 分）

某中学为了解高二年级中华传统文化经典阅读的整体情况，从高二年级随机抽取 10 名学生进行了两轮测试，并把两轮测试成绩的平均分作为该名学生的考核成绩．记录的数据如下：

	1号	2号	3号	4号	5号	6号	7号	8号	9号	10号
第一轮测试成绩	96	89	88	88	92	90	87	90	92	90
第二轮测试成绩	90	90	90	88	88	87	96	92	89	92

（Ⅰ）从该校高二年级随机选取一名学生，试估计这名学生考核成绩大于等于 90 分的概率；

（Ⅱ）从考核成绩大于等于 90 分的学生中再随机抽取两名同学，求这两名同学两轮测试成绩均大于等于 90 分的概率；

（Ⅲ）记抽取的 10 名学生第一轮测试成绩的平均数和方差分别为$\overline{x_1}$，s_1^2，考核成绩的平均数和方差分别为$\overline{x_2}$，s_2^2，试比较$\overline{x_1}$与$\overline{x_2}$，s_1^2 与 s_2^2 的大小．（只需写出结论）

（19）（本小题 13 分）

已知函数$f(x)=\left(x+\dfrac{a}{x}\right)e^x$，$a\in\mathbf{R}$．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的零点；

（Ⅱ）当 $a\geqslant -5$ 时，求证：$f(x)$ 在区间（1，$+\infty$)上为增函数．

（20）（本小题 14 分）

已知椭圆 C：$x^2+2y^2=2$ 的左右顶点分别为 A_1，A_2.

（Ⅰ）求椭圆 C 的长轴长与离心率；

（Ⅱ）若不垂直于 x 轴的直线 l 与椭圆 C 相交于 P, Q 两点，直线 A_1P 与 A_2Q 交于点 M，直线 A_1Q 与 A_2P 交于点 N.

求证：直线 MN 垂直于 x 轴．

海淀区高三年级第二学期期末练习参考答案及评分标准

数　学（文科）

2018.5

一．选择题:本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	B	D	C	A	C	C

二．填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．$x^2 = 4y$　　　10．$1, 2\sqrt{3}$　　　11．$\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}$

12．$\frac{\sqrt{7}}{3}$　　　13．35　　　14．①②③

注：① 10 题、11 题第一个空答对给 3 分，第 2 个空答对给 2 分；

② 14 题只写出 1 个序号给 2 分，只写出 2 个序号给 3 分。

三．解答题：本大题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）方法 1：

因为数列$\{a_n\}$是等差数列，

所以$a_n + a_{n+2} = 2a_{n+1}$.

因为$2a_{n+1} - a_n = 2n+3$，

所以$a_{n+2} = 2n+3$.

所以，当$n \geq 3$时，$a_n = 2(n-2)+3 = 2n-1$.

所以$a_n = 2n-1\,(n=1,2,3,\cdots)$.　　　………………6 分

方法 2：

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

因为$2a_{n+1} - a_n = 2n+3$，

所以$\begin{cases} 2a_2 - a_1 = 5 \\ 2a_3 - a_2 = 7. \end{cases}$

所以$\begin{cases} a_1+2d=5 \\ a_1+3d=7. \end{cases}$

所以$\begin{cases} a_1=1 \\ d=2. \end{cases}$

所以$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1\,(n=1,2,3,\cdots)$ ··················6 分

（II）因为数列$\{a_n+b_n\}$是首项为 1，公比为 2 的等比数列，

所以$a_n+b_n=2^{n-1}$

因为$a_n=2n-1$，

所以$b_n=2^{n-1}-(2n-1)$.

设数列$\{b_n\}$的前n项和为S_n，

则$S_n=(1+2+4+\cdots+2^{n-1})-[1+3+5+\cdots+(2n-1)]$

$$=\frac{1-2^n}{1-2}-\frac{n(1+2n-1)}{2}$$

$$=2^n-1-n^2$$

所以数列$\{b_n\}$的前n项和为2^n-1-n^2.. ··················13 分

16.（本小题 13 分）

解：（I） $f(x)=2\cos x(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x)+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$=\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x-\sqrt{3}\times\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$$

所以函数$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

所以曲线 $y=f(x)$ 的相邻两条对称轴的距离为 $\frac{T}{2}$，即 $\frac{\pi}{2}$. ………………6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

当 $x\in[0,\alpha]$ 时，$2x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},2\alpha-\frac{\pi}{3}]$.

因为 $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增，且 $f(x)$ 在 $[0,\alpha]$ 上单调递增，

所以 $[-\frac{\pi}{3},2\alpha-\frac{\pi}{3}]\subseteq[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$，

即 $\begin{cases}\alpha>0\\2\alpha-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

解得 $0<\alpha\le\frac{5}{12}\pi$.

故 α 的最大值为 $\frac{5}{12}\pi$. ………………13 分

17.（本小题 14 分）

（Ⅰ）证明：折叠前，因为四边形 $AECD$ 为菱形，所以 $AC\perp DE$；

所以折叠后，$DE\perp PF, DE\perp CF$，

又 $PF\cap CF=F, PF, CF\subset$ 平面 PCF，

所以 $DE\perp$ 平面 PCF ………………4 分

（Ⅱ）因为四边形 $AECD$ 为菱形，

所以 $DC//AE, DC=AE$.

又点 E 为 AB 的中点，

所以 $DC//EB, DC=EB$.

所以四边形 $DEBC$ 为平行四边形.

所以 $CB//DE$.

又由（Ⅰ）得，$DE\perp$ 平面 PCF，

所以 $CB\perp$ 平面 PCF .

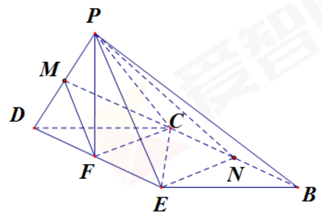
因为 $CB\subset$ 平面 PBC ，

所以平面 $PBC\perp$ 平面 PCF . ……………………9 分

（III）存在满足条件的点 M,N , 且 M,N 分别是 PD 和 BC 的中点.

如图，分别取 PD 和 BC 的中点 M,N .

连接 EN,PN,MF,CM .



因为四边形 $DEBC$ 为平行四边形，

所以 $EF//CN,EF=\frac{1}{2}BC=CN$.

所以四边形 $ENCF$ 为平行四边形.

所以 $FC//EN$.

在 ΔPDE 中， M,F 分别为 PD,DE 中点，

所以 $MF//PE$.

又 $EN,PE\subset$ 平面 $PEN,PE\cap EN=E$, $MF,CF\subset$ 平面 CFM ,

所以平面 $CFM//$ 平面 PEN . ……………………14 分

18. （本小题 13 分）

解：（Ⅰ）这 10 名学生的考核成绩（单位：分）分别为：

93，89.5，89，88，90，88.5，91.5，91，90.5，91.

其中大于等于 90 分的有 1 号、5 号、7 号、8 号、9 号、10 号，共 6 人.

所以样本中学生考核成绩大于等于 90 分的频率是 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

从该校高二年级随机选取一名学生，估计这名学生考核成绩大于等于 90 分的概率为 0.6.
……………………4 分

（Ⅱ）设事件 A 为“从考核成绩大于等于 90 分的学生中任取 2 名同学，这 2 名同学两轮测试成绩均大于等于 90 分”，

由（Ⅰ）知，考核成绩大于等于 90 分的学生共 6 人，其中两轮测试成绩均大于等于 90 分的学生有 1 号，8 号，10 号，共 3 人.

因此，从考核成绩大于等于 90 分的学生中任取 2 名同学，

包含（1 号，5 号）、（1 号，7 号）、（1 号，8 号）、（1 号，9 号）、（1 号、10 号）、（5 号，7 号）、（5 号，8 号）、（5 号，9 号）、（5 号，10 号）、（7 号，8 号）、（7 号，9 号）、（7 号，10 号）、（8 号，9 号）、（8 号，10 号）、（9 号，10 号）共 15 个基本事件，

而事件 A 包含（1 号，8 号）、（1 号、10 号）、（8 号，10 号）共 3 个基本事件，

所以 $P(A)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.　　　　…………………9 分

（III）$\overline{x_1}=\overline{x_2}$

$s_1^2>s_2^2$　　　　…………………13 分

19.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ） $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

令 $f(x)=0$, 得 $x^2+a=0, x^2=-a$.

当 $a\geq 0$ 时，方程无解， $f(x)$ 没有零点；

当 $a<0$ 时，得 $x=\pm\sqrt{-a}$.　　　　…………………4 分

综上，当 $a\geq 0$ 时 $f(x)$ 无零点；当 $a<0$ 时， $f(x)$ 零点为 $\pm\sqrt{-a}$.

（Ⅱ） $f'(x)=(1-\dfrac{a}{x^2})e^x+(x+\dfrac{a}{x})e^x$

$$=\frac{(x^3+x^2+ax-a)e^x}{x^2}.$$

令 $g(x)=x^3+x^2+ax-a\ (x>1)$，

则 $g'(x)=3x^2+2x+a$，

其对称轴为 $x=-\dfrac{1}{3}$，

所以 $g'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g'(x)>3\times 1^2+2\times 1+a=5+a$.

当 $a\geq -5$ 时， $g'(x)>0$ 恒成立，

所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数.　　　　…………………13 分

20.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）椭圆 C 的方程可化为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，

所以 $a=\sqrt{2}, b=1, c=1$.

所以长轴长为 $2a=2\sqrt{2}$，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.　　　　…………………4 分

（Ⅱ）方法 1：

证明：显然直线 A_1P、A_2Q、A_1Q、A_2P 都存在斜率，且互不相等，分别设为 k_1,k_2,k_3,k_4.

设直线 A_1P 的方程为 $y=k_1(x+\sqrt{2})$，A_2Q 的方程为 $y=k_2(x-\sqrt{2})$，

联立可得 $x_M=\dfrac{\sqrt{2}(k_2+k_1)}{k_2-k_1}$.

同理可得 $x_N=\dfrac{\sqrt{2}(k_4+k_3)}{k_4-k_3}$.

下面去证明 $k_1k_4=-\dfrac{1}{2}$.

设 $P(x_0,y_0)$，则 $x_0^{\ 2}+2y_0^{\ 2}=2$.

所以 $k_1k_4=\dfrac{y_0}{x_0+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{y_0}{x_0-\sqrt{2}}=\dfrac{y_0^{\ 2}}{x_0^{\ 2}-2}=\dfrac{y_0^{\ 2}}{-2y_0^{\ 2}}=-\dfrac{1}{2}$.

同理 $k_2k_3=-\dfrac{1}{2}$.

所以 $x_N=\dfrac{\sqrt{2}\left(\dfrac{-\frac{1}{2}}{k_1}+\dfrac{-\frac{1}{2}}{k_2}\right)}{\dfrac{-\frac{1}{2}}{k_1}-\dfrac{-\frac{1}{2}}{k_2}}=\dfrac{\sqrt{2}(k_2+k_1)}{k_2-k_1}=x_M$.

所以直线 MN 垂直于 x 轴.　　　　……………………14 分

方法 2：

设直线 l 方程为 $y=kx+m,P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y=kx+m\\x^2+2y^2=2\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$.

当 $\Delta>0$ 时，$x_1+x_2=\dfrac{-4km}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{1+2k^2}$.

直线 A_1P 方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})$，直线 A_2Q 方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})$，

联立可得 $\dfrac{y_1}{x_1+\sqrt{2}}(x+\sqrt{2})=\dfrac{y_2}{x_2-\sqrt{2}}(x-\sqrt{2})$，

得 $(\frac{y_2}{x_2-\sqrt{2}}-\frac{y_1}{x_1+\sqrt{2}})x=\sqrt{2}(\frac{y_1}{x_1+\sqrt{2}}+\frac{y_2}{x_2-\sqrt{2}})$

$[y_2(x_1+\sqrt{2})-y_1(x_2-\sqrt{2})]x=\sqrt{2}[y_1(x_2-\sqrt{2})+y_2(x_1+\sqrt{2})]$

其中，$y_2(x_1+\sqrt{2})-y_1(x_2-\sqrt{2})=(kx_2+m)(x_1+\sqrt{2})-(kx_1+m)(x_2-\sqrt{2})$

$$=\sqrt{2}k(x_1+x_2)+m(x_1-x_2)+2\sqrt{2}m$$

$$=\sqrt{2}k\frac{-4km}{1+2k^2}+m(x_1-x_2)+2\sqrt{2}m$$

$$=\frac{2\sqrt{2}m}{1+2k^2}+m(x_1-x_2)$$

$$=m(\frac{2\sqrt{2}}{1+2k^2}+x_1-x_2)$$

$y_1(x_2-\sqrt{2})+y_2(x_1+\sqrt{2})=(kx_1+m)(x_2-\sqrt{2})+(kx_2+m)(x_1+\sqrt{2})$

$$=2kx_1x_2+m(x_1+x_2)+\sqrt{2}k(x_2-x_1)$$

$$=2k\frac{2m^2-2}{1+2k^2}+m\frac{-4km}{1+2k^2}+\sqrt{2}k(x_2-x_1)$$

$$=\frac{-4k}{1+2k^2}+\sqrt{2}k(x_2-x_1)$$

$$=-\sqrt{2}k(\frac{2\sqrt{2}}{1+2k^2}+x_1-x_2)$$

所以 $x_M=\frac{-2k}{m}$，即点 M 的横坐标与 P,Q 两点的坐标无关，只与直线 l 的方程有关.

所以 $x_N=\frac{-2k}{m}=x_M$，直线 MN 垂直于 x 轴. ……………………14 分