

2017 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

本试卷 5 页，23 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x < 1\}$ ， $B = \{x | 3^x < 1\}$ ，则

A. $A \cap B = \{x | x < 0\}$ B. $A \cup B = \mathbf{R}$ C. $A \cup B = \{x | x > 1\}$ D. $A \cap B = \emptyset$

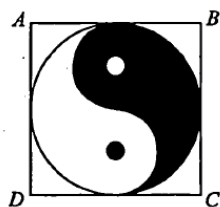
【考点】：集合的简单运算，指数函数

【思路】：利用指数函数的性质可以将集合 B 求解出来，之后利用集合的计算求解即可。

【解析】：由 $3^x < 1 \Rightarrow x < 0$ ，解得 $B = \{x | x < 0\}$ ，故而

$$A \cap B = B = \{x | x < 0\}, A \cup B = A = \{x | x < 1\}, \text{选 A.}$$

2. 如图，正方形 ABCD 内的图形来自中国古代的太极图.正方形内切圆中的黑色部分和白色部分关于正方形的中心成中心对称.在正方形内随机取一点，则此点取自黑色部分的概率是



A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{\pi}{8}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{\pi}{4}$

【考点】：几何概型

【思路】：几何概型的面积问题， $P = \frac{\text{基本事件所包含的面积}}{\text{总面积}}$ 。

【解析】： $P = \frac{S_1}{S} = \frac{\frac{1}{2}\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{8}$ ，故而是选 B。

3. 设有下面四个命题

p_1 ：若复数 z 满足 $\frac{1}{z} \in \mathbf{R}$ ，则 $z \in \mathbf{R}$ ；

p_2 ：若复数 z 满足 $z^2 \in \mathbf{R}$ ，则 $z \in \mathbf{R}$ ；

p_3 ：若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 z_2 \in \mathbf{R}$ ，则 $z_1 = \overline{z_2}$ ；

p_4 ：若复数 $z \in \mathbf{R}$ ，则 $\overline{z} \in \mathbf{R}$ 。

其中的真命题为

A. p_1, p_3

B. p_1, p_4

C. p_2, p_3

D. p_2, p_4

【考点】：复数，简易逻辑

【思路】：将四个命题中的复数分别用基本形式假设即可。

【解析】： p_1 ：不妨设 $\frac{1}{z} = a (a \in \mathbf{R}) \Rightarrow z = \frac{1}{a} \in \mathbf{R}$ ，真命题；

p_2 ：不妨设 $z^2 = a (a \in \mathbf{R}) \Rightarrow z = \begin{cases} \pm\sqrt{a} \in \mathbf{R} (a \geq 0) \\ \sqrt{-a}i \notin \mathbf{R} (a < 0) \end{cases}$ ，假命题；

p_3 ：不妨设 $z_1 = a_1 + b_1i, z_2 = a_2 + b_2i \Rightarrow z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \in \mathbf{R} \Rightarrow a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0$ ，此

时明显不一定满足 $b_1 + b_2 = 0$ ，假命题。

p_4 : 不妨设. $z = a \in R \Rightarrow \bar{z} = a \in R$, 真命题。

故选 B。

4. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_4 + a_5 = 24$, $S_6 = 48$, 则 $\{a_n\}$ 的公差为

A. 1

B. 2

C. 4

D. 8

【考点】: 等差数列, 难度较小。

【思路】: 将求和公式化简即可得到公差。

【解析】: $S_6 = \frac{6(a_1 + a_6)}{2} = 48 \Rightarrow a_1 + a_6 = 16$, $a_4 + a_5 = a_1 + a_8 = 24$, 作差

$$a_8 - a_6 = 8 = 2d \Rightarrow d = 4$$

故选 C。

5. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递减, 且为奇函数. 若 $f(1) = -1$, 则满足 $-1 \leq f(x-2) \leq 1$ 的 x 的取值范围是

A. $[-2, 2]$

B. $[-1, 1]$

C. $[0, 4]$

D. $[1, 3]$

【考点】: 函数不等式, 函数的单调性。

【思路】: 奇函数左右两侧单调性相同, 根据奇函数的性质求解 $f(-1) = 1$, 利用单调性代入不等式即可。

【解析】: $-1 \leq f(x-2) \leq 1 \Rightarrow f(1) \leq f(x-2) \leq f(-1) \Rightarrow -1 \leq x-2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3$ 故选 D。

6. $(1 + \frac{1}{x^2})(1+x)^6$ 展开式中 x^2 的系数为

A. 15

B. 20

C. 30

D. 35

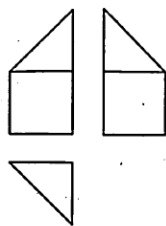
【考点】: 二项式定理。

【思路】: 将 $(1+x)^6$ 的通项求解出来即可。

【解析】: $T_{r+1} = C_6^r x^r$ 可得整体的通项 $C_6^r x^r$, $C_6^r x^{r-2}$, $r = 2 \Rightarrow C_6^r x^r = 15x^2$,

$r = 4 \Rightarrow C_6^r x^{r-2} = 15x^2$, 故可得 x^2 的系数为 30, 故选 C。

7. 某多面体的三视图如图所示，其中正视图和左视图都由正方形和等腰直角三角形组成，正方形的边长为 2，俯视图为等腰直角三角形.该多面体的各个面中有若干个是梯形，这些梯形的面积之和为



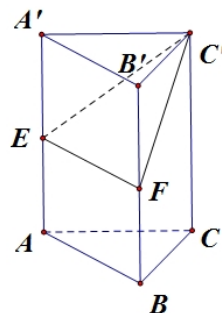
- A . 10 B . 12 C . 14 D . 16

【考点】：立体图形的三视图，立体图形的表面积。

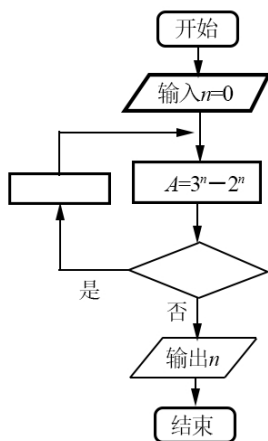
【思路】：将三视图还原即可。

【解析】：将三视图还原可得右图图形，故多面体有两个面是梯形，此时可得

$$S = 2 \times \frac{1}{2} (2 + 4) \times 2 = 12, \text{故当选 B.}$$



8. 右面程序框图是为了求出满足 $3^n - 2^n > 1000$ 的最小偶数 n ，那么在  和  两个空白框中，可以分别填入



- A . $A > 1000$ 和 $n=n+1$ B . $A > 1000$ 和 $n=n+2$ C . $A \leq 1000$ 和 $n=n+1$ D . $A \leq 1000$ 和 $n=n+2$

【考点】：程序框图。

【思路】：此题的难点在于考察点的不同，考察判断框和循环系数。根据判断条件可得为当型结构，故而判断框中应该是 $A \leq 1000$ ，又题目要求为最小偶数，故而循环系数当为 $n=n+2$ 。

【解析】：选 D。

9. 已知曲线 $C_1: y = \cos x$, $C_2: y = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$, 则下面结论正确的是

- A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2
- B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2
- C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2
- D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_2

【考点】：三角函数的变换。

【思路】：熟悉两种常见的三角函数变换, 先变周期和先变相位不一致。

先变周期: $y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{2}\right)$

先变相位: $y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

【解析】：选 D。

10. 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, 过 F 作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 直线 l_1 与 C 交于 A, B 两点, 直线 l_2 与 C 交于 D, E 两点, 则 $|AB| + |DE|$ 的最小值为

- A. 16 B. 14 C. 12 D. 10

【考点】：抛物线与直线的位置关系。

【思路】：由题意可得两条直线的斜率一定存在且不为 0, 分别假设为 k 和 $\frac{1}{k}$, 故可得

$$l_1: y = k(x-1), \text{ 联立 } \begin{cases} y = k(x-1) \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0, \quad \text{假设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$$

故而根据韦达定理可得 $x_1 + x_2 = \frac{2k^2 + 4}{k^2} = 2 + \frac{4}{k^2}$ ，此时 $|AB| = x_1 + x_2 + p = 4 + \frac{4}{k^2}$ ，同理可得

$|DE| = 4 + 4k^2$ ，故而 $|AB| + |DE| = 8 + 4k^2 + \frac{4}{k^2} \geq 8 + 8 = 16$ ，当且仅当

$4k^2 = \frac{4}{k^2} \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$ 时取等号。

【解析】：选 A。

11. 设 xyz 为正数，且 $2^x = 3^y = 5^z$ ，则

A. $2x < 3y < 5z$

B. $5z < 2x < 3y$

C. $3y < 5z < 2x$

D. $3y < 2x < 5z$

【考点】：指对运算与不等式，计算量较大。

【思路】：将指数形式化简即可求出三个变量，不妨设 $2^x = 3^y = 5^z = m > 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \log_2 m = \frac{1}{\log_m 2} \\ y = \log_3 m = \frac{1}{\log_m 3} \\ z = \log_5 m = \frac{1}{\log_m 5} \end{cases}$ 。

将三者代入答案即可解答。

【解析】：分别可求得 $2x = \frac{2}{\log_m 2} = \frac{1}{\log_m 2^{\frac{1}{2}}}$, $3y = \frac{3}{\log_m 3} = \frac{1}{\log_m 3^{\frac{1}{3}}}$, $5z = \frac{5}{\log_m 5} = \frac{1}{\log_m 5^{\frac{1}{5}}}$ ，分别对

分母乘以 30 可得 $30 \log_m 2^{\frac{1}{2}} = \log_m 2^{15}$, $30 \log_m 3^{\frac{1}{3}} = \log_m 3^{10}$, $30 \log_m 5^{\frac{1}{5}} = \log_m 5^6$ ，

故而可得 $\begin{cases} m > 1 \\ 3^{10} > 2^{15} > 5^6 \end{cases} \Rightarrow \log_m 3^{10} > \log_m 2^{15} > \log_m 5^6 \Rightarrow 3y < 2x < 5z$ ，故选 D。

12. 几位大学生响应国家的创业号召，开发了一款应用软件。为激发大家学习数学的兴趣，他们推出了“解数学题获取软件激活码”的活动。这款软件的激活码为下面数学问题的答案：已知数列 1, 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 8, 1, 2, 4, 8, 16, ...，其中第一项是 2^0 ，接下来的两项是 $2^0, 2^1$ ，再接下来的三项是 $2^0, 2^1, 2^2$ ，依此类推。求满足如下条件的最小整数 N ： $N > 100$ 且该数列的前 N 项和为 2 的整数幂。那么该款软件的激活码是

A. 440

B. 330

C. 220

D. 110

【考点】：行列式（杨辉三角）求和问题，计算量较大。

【思路】：将已知的数列列举成行列式的形式，

2^0 第一行，1 个数，求和为 $2^1 - 1$

$2^0 \quad 2^1$ 第二行，2 个数，求和为 $2^2 - 1$

$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2$ 第三行，3 个数，求和为 $2^3 - 1$

$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3$ 第四行，4 个数，求和为 $2^4 - 1$

$2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4$ 第五行，5 个数，求和为 $2^5 - 1$

故而可得，第 n 行， n 个数，求和为 $2^n - 1$ ，因此前 n 行，一共有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个数，求和为 $2^{n+1} - n - 2$

【解析】：根据上面的分析，我们可以类推得到，

前 14 行，有 105 个数，求和为 $2^{15} - 16$ ，当 $N = 110$ 时，求和为 $2^{15} - 16 + 2^5 - 1 = 2^{15} - 17 \neq 2^n$

前 20 行，有 210 个数，求和为 $2^{21} - 22$ ，当 $N = 220$ 时，求和为 $2^{21} - 22 + 2^{10} - 1 = 2^{21} + 2^{10} - 23 \neq 2^n$

前 25 行，有 225 个数，求和为 $2^{26} - 26$ ，当 $N = 330$ 时，求和为 $2^{26} - 26 + 2^5 - 1 = 2^{26} + 2^5 - 27 \neq 2^n$

前 29 行，有 435 个数，求和为 $2^{30} - 31$ ，当 $N = 440$ 时，求和为 $2^{30} - 31 + 2^5 - 1 = 2^{30}$ ，故人选 A。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 a, b 的夹角为 60° ， $|a|=2$ ， $|b|=1$ ，则 $|a+2b| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【考点】：向量的模长。

【思路】：牢记求解模长问题利用平方的思路，直接将所求的内容进行平方即可。

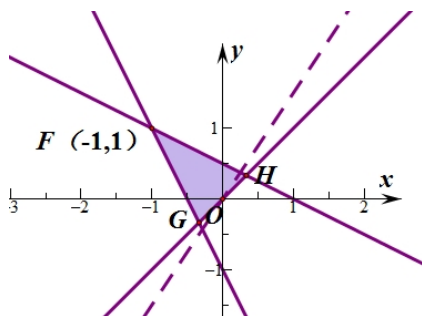
【解析】： $\left| \overset{r}{a} + 2\overset{r}{b} \right|^2 = \overset{r}{a}^2 + 4\overset{r}{b}^2 + 4\overset{r}{a} \cdot \overset{r}{b} = 4 + 4 + 4 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 12$ ，故而模长为 $\left| \overset{r}{a} + 2\overset{r}{b} \right| = 2\sqrt{3}$ 。

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \leq 1 \\ 2x+y \geq -1 \\ x-y \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z = 3x - 2y$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【考点】：简单的线性规划。

【思路】：根据约束条件，画出可行域即可。

【解析】：如图所示，可行域为阴影部分，令 $z = 3x - 2y = 0 \Rightarrow l_0: y = \frac{3}{2}x$ 为初始直线，当 l_0 向上平移时， $z = 3x - 2y$ 逐渐变小，故而在点 $F(-1, 1)$ 处取到最小值-5。



15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右顶点为 A ，以 A 为圆心， b 为半径做圆 A ，圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M, N 两点。若 $\angle MAN = 60^\circ$ ，则 C 的离心率为_____。

【考点】：圆锥曲线离心率问题。

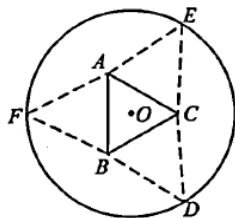
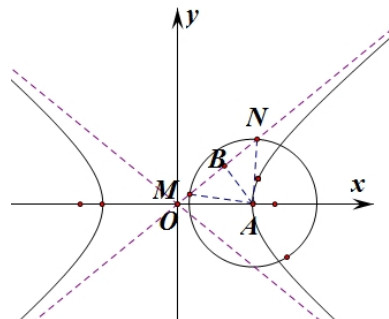
【思路】：利用角度计算可得答案。

【解析】：如图所示，过点 A 作渐近线的垂线 AB ，由 $\angle MAN = 60^\circ \Rightarrow \angle BAN = 30^\circ$ ，又

$$AM = b \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{2}b, OA = a \Rightarrow OB = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2}, \text{ 故而}$$

$$\tan \angle BOA = \frac{b}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2}}, \text{ 解得 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

16. 如图，圆形纸片的圆心为 O ，半径为 5 cm，该纸片上的等边三角形 ABC 的中心为 O 。 D, E, F 为圆 O 上的点， $\triangle DBC, \triangle ECA, \triangle FAB$ 分别是以 BC, CA, AB 为底边的等腰三角形。沿虚线剪开后，分别以 BC, CA, AB 为折痕折起 $\triangle DBC, \triangle ECA, \triangle FAB$ ，使得 D, E, F 重合，得到三棱锥。当 $\triangle ABC$ 的边长变化时，所得三棱锥体积（单位： cm^3 ）的最大值为_____。



【考点】：立体几何体积计算，函数与导数综合。

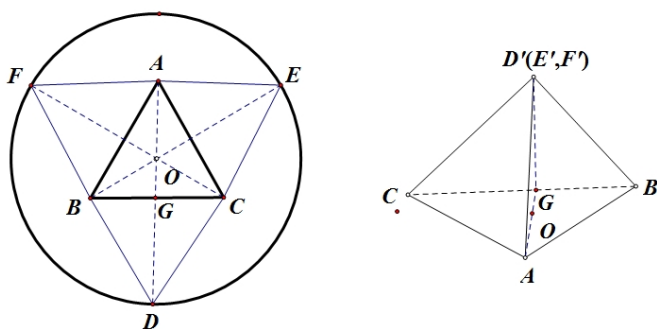
【思路】：根据题意可得 $\triangle DBC$ ， $\triangle ECA$ ， $\triangle FAB$ 分别全等，故而可得三棱锥是正三棱锥，斜高即为三个三角形的高，即为 DG ，高为 OD （右图）。不妨设三角形 ABC 的边长为 a （ $0 < a < 5\sqrt{3}$ ），此时在

左图中， $OG = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ， $DG = R - OG = 5 - \frac{\sqrt{3}}{3}a$ ， $5 - \frac{\sqrt{3}}{3}a > \frac{\sqrt{3}}{3}a \Rightarrow 0 < a < \frac{5}{2}\sqrt{3}$ ，故而正三棱锥的高

$$OD' = \sqrt{D'G^2 - OG^2} = \sqrt{25 - \frac{10\sqrt{3}}{3}a}，此时即可计算体积。$$

【解析】：根据体积公式可得 $V_{D'-ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \sqrt{25 - \frac{10\sqrt{3}}{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{12} \sqrt{25a^4 - \frac{10\sqrt{3}}{3}a^5}$ ，利用函数性

质可得，假设 $f(a) = 25a^4 - \frac{10\sqrt{3}}{3}a^5 \Rightarrow f'(a) = 50a^3 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a - 2 \right)$ ，故而当 $a = 2\sqrt{3}$ 时取最大值 $\sqrt{15}$ cm^3 。



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A ， B ， C 的对边分别为 a ， b ， c ，已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{a^2}{3\sin A}$

(1) 求 $\sin B \sin C$ ；

(2) 若 $6\cos B \cos C = 1$ ， $a = 3$ ，求 $\triangle ABC$ 的周长。

【考点】：解三角形。

【思路】：根据三角形面积公式可以求得第一问，第二问直接利用余弦定理求解即可。

【解析】：(1) 由题意可得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{a^2}{3 \sin A}$ ，化简可得 $2a^2 = 3bc \sin^2 A$ ，根据正弦定理化

简可得： $2 \sin^2 A = 3 \sin B \sin C \sin^2 A \Rightarrow \sin B \sin C = \frac{2}{3}$ 。

(2) 由 $\begin{cases} \sin B \sin C = \frac{2}{3} \\ \cos B \cos C = \frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \cos A = -\cos(A+B) = \sin B \sin C - \cos B \cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{2\pi}{3}$ ，因此可得

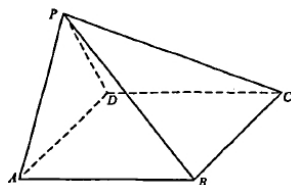
$B = \frac{\pi}{3} - C$ ，将之代入 $\sin B \sin C = \frac{2}{3}$ 中可得： $\sin\left(\frac{\pi}{3} - C\right) \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin C \cos C - \frac{1}{2} \sin^2 C = 0$ ，化

简可得 $\tan C = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow C = \frac{\pi}{6}, B = \frac{\pi}{6}$ ，利用正弦定理可得 $b = \frac{a}{\sin A} \sin B = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$ ，同理可得

$c = \sqrt{3}$ ，故而三角形的周长为 $3 + 2\sqrt{3}$ 。

18. (12分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，且 $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$ 。



(1) 证明：平面 $PAB \perp$ 平面 PAD ；

(2) 若 $PA=PD=AB=DC$ ， $\angle APD = 90^\circ$ ，求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值。

【考点】：立体几何，空间向量。

【思路】：(1) 利用线面垂直的性质即可求得。(2) 建立空间直角坐标系即可

【解析】：(1) $\because AB \parallel CD, CD \perp PD \therefore AB \perp PD$ ，又 $\because AB \perp PA, PA \cap PD = P, PA、PD$ 都在平面 PAD 内，故而可得 $AB \perp PAD$ 。又 AB 在平面 PAB 内，故而平面 $PAB \perp$ 平面 PAD 。

(2) 不妨设 $PA = PD = AB = CD = 2a$ ，以 AD 中点 O 为原点， OA 为 x 轴， OP 为 z 轴建立平面直角坐标系。故而可得各点坐标： $P(0, 0, \sqrt{2}a), A(\sqrt{2}a, 0, 0), B(\sqrt{2}a, 2a, 0), C(-\sqrt{2}a, 2a, 0)$ ，因此可得

$\vec{PA} = (\sqrt{2}a, 0, -\sqrt{2}a), \vec{PB} = (\sqrt{2}a, 2a, -\sqrt{2}a), \vec{PC} = (-\sqrt{2}a, 2a, -\sqrt{2}a)$ ，假设平面 PAB 的法向量

$\vec{n}_1 = (x, y, 1)$ ，平面 PBC 的法向量 $\vec{n}_2 = (m, n, 1)$ ，故可得
$$\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{PA} = \sqrt{2}ax - \sqrt{2}a = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{PB} = \sqrt{2}ax - 2ay - \sqrt{2}a = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

，即 $\vec{n}_1 = (1, 0, 1)$ ，同理可得
$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \vec{PC} = -\sqrt{2}am + 2an - \sqrt{2}a = 0 \Rightarrow m = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{PB} = \sqrt{2}am + 2an - \sqrt{2}a = 0 \Rightarrow n = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
，即 $\vec{n}_2 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ 。因此

法向量的夹角余弦值： $\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。很明显，这是一个钝角，故而可得余弦为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

19. (12分)

为了监控某种零件的一条生产线的生产过程，检验员每天从该生产线上随机抽取 16 个零件，并测量其尺寸（单位：cm）。根据长期生产经验，可以认为这条生产线正常状态下生产的零件的尺寸服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。

(1) 假设生产状态正常，记 X 表示一天内抽取的 16 个零件中其尺寸在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的零件数，求 $P(X \geq 1)$ 及 X 的数学期望；

(2) 一天内抽检零件中，如果出现了尺寸在 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之外的零件，就认为这条生产线在这一天的生产过程可能出现了异常情况，需对当天的生产过程进行检查。

(i) 试说明上述监控生产过程方法的合理性；

(ii) 下面是检验员在一天内抽取的 16 个零件的尺寸：

9.95	10.12	9.96	9.96	10.01	9.92	9.98	10.04
10.26	9.91	10.13	10.02	9.22	10.04	10.05	9.95

经计算得 $\bar{x} = \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} x_i = 9.97$ ， $s = \sqrt{\frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{16} (\sum_{i=1}^{16} x_i^2 - 16\bar{x}^2)} \approx 0.212$ ，其中 x_i 为抽

取的第 i 个零件的尺寸， $i = 1, 2, \dots, 16$ 。

用样本平均数 $\bar{x}$ 作为 μ 的估计值 $\hat{\mu}$ ，用样本标准差 s 作为 σ 的估计值 $\hat{\sigma}$ ，利用估计值判断是否需对当天的生产过程进行检查？剔除 $(\hat{\mu} - 3\hat{\sigma}, \hat{\mu} + 3\hat{\sigma})$ 之外的数据，用剩下的数据估计 μ 和 σ （精确到

0.01) .

附：若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(\mu - 3\sigma < Z < \mu + 3\sigma) = 0.9974$ ，

$$0.9974^{16} = 0.9592, \quad \sqrt{0.008} \approx 0.09.$$

【考点】：统计与概率。

【思路】：（1）这是典型的二项分布，利用正态分布的性质计算即可。（2）考察正态分布，代入运算即可。

【解析】：

$$(1) P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.9974^{16} = 1 - 0.9592 = 0.0408$$

由题意可得， X 满足二项分布 $X \sim B(16, 0.0016)$ ，因此可得 $EX(16, 0.0016) = 16 \times 0.0016 = 0.0256$

(2)

①由（1）可得 $P(X \geq 1) = 0.0408 < 5\%$ ，属于小概率事件，故而如果出现 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 的零件，需要进行检查。

②由题意可得 $\bar{x} = 9.97, s^2 = 0.212 \Rightarrow \bar{x} - 3s = 9.334, \bar{x} + 3s = 10.606$ ，故而在 $(9.334, 10.606)$ 范围外

存在 9.22 这一个数据，因此需要进行检查。此时：
$$\mu = \bar{x} = \frac{9.97 \times 16 - 9.22}{15} = 10.02,$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2} \approx 0.09.$$

20. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)，四点 $P_1(1, 1)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求 C 的方程；

(2) 设直线 l 不经过 P_2 点且与 C 相交于 A, B 两点. 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 -1 ，证明： l 过定点.

【考点】：圆锥曲线。

【思路】：（1）根据椭圆的对称性可以排除 $P_1(1,1)$ 。（2）联立方程即可，此时有两种方法联立，第一种，假设直线 AB 的方程，第二种假设直线 P_2A 和 P_2B 。

【解析】：

（1）根据椭圆对称性可得， $P_1(1,1)$ $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 不可能同时在椭圆上， $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$

一定同时在椭圆上，因此可得椭圆经过 $P_2(0,1)$ ， $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，代入椭圆方程可

得： $b=1, \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow a=2$ ，故而可得椭圆的标准方程为： $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。

（2）由题意可得直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率一定存在，不妨设直线 P_2A 为： $y=kx+1$ ， P_2B 为：

$$y=(1-k)x+1. \text{联立} \begin{cases} y=kx+1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (4k^2+1)x^2 + 8kx = 0, \text{假设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \text{ 此时可得:}$$

$$A\left(\frac{-8k}{4k^2+1}, \frac{1-4k^2}{4k^2+1}\right), B\left(\frac{8(1+k)}{4(1+k)^2+1}, \frac{1-4(1+k)^2}{4(1+k)^2+1}\right), \text{此时可求得直线的斜率为:}$$

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1-4(1+k)^2}{4(1+k)^2+1} - \frac{1-4k^2}{4k^2+1}}{\frac{8(1+k)}{4(1+k)^2+1} - \frac{-8k}{4k^2+1}}, \text{化简可得 } k_{AB} = -\frac{1}{(1+2k)^2}, \text{此时满足 } k \neq -\frac{1}{2}.$$

①当 $k = -\frac{1}{2}$ 时， AB 两点重合，不合题意。

②当 $k \neq -\frac{1}{2}$ 时，直线方程为： $y = -\frac{1}{(1+2k)^2} \left(x + \frac{8k}{4k^2+1}\right) + \frac{1-4k^2}{4k^2+1}$ ，即 $y = -\frac{(4k^2+4k-1+x)}{(1+2k)^2}$ ，

当 $x=2$ 时， $y=-1$ ，因此直线恒过定点 $(2, -1)$ 。

21. (12 分)

已知函数 $f(x) = ae^{2x} + (a-2)e^x$ 。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

【考点】: 导数综合问题.

【思路】: (1) 直接进行求导, 分类讨论 (2) 函数有两个零点, 故而函数不单调; 根据函数单调性判断函数图像即可.

【解析】:

(1) 对函数进行求导可得 $f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2)e^x - 1 = (ae^x - 1)(e^x + 1)$.

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) = (ae^x - 1)(e^x + 1) \leq 0$ 恒成立, 故而函数恒递减

② 当 $a > 0$ 时, $f'(x) = (ae^x - 1)(e^x + 1) > 0 \Rightarrow x > \ln \frac{1}{a}$, 故而可得函数在 $\left(-\infty, \ln \frac{1}{a}\right)$ 上单调递

减, 在 $\left(\ln \frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

(2) 函数有两个零点, 故而可得 $a > 0$, 此时函数有极小值 $f\left(\ln \frac{1}{a}\right) = \ln a - \frac{1}{a} + 1$, 要使得函数有两个零点, 亦即极小值小于 0, 故而可得 $\ln a - \frac{1}{a} + 1 < 0 (a > 0)$, 令 $g(a) = \ln a - \frac{1}{a} + 1$, 对函数进行求导即可得到 $g'(a) = \frac{a+1}{a^2} > 0$, 故而函数恒递增, 又 $g(1) = 0$, $\therefore g(a) = \ln a - \frac{1}{a} + 1 \Rightarrow 0 < a < 1$, 因此可得函数有两个零点的范围为 $a \in (0, 1)$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3\cos\theta, \\ y = \sin\theta, \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的参数方程为

$$\begin{cases} x = a + 4t, \\ y = 1 - t, \end{cases} \text{ (} t \text{ 为参数)}.$$

(1) 若 $a = -1$, 求 C 与 l 的交点坐标;

(2) 若 C 上的点到 l 的距离的最大值为 $\sqrt{17}$, 求 a .

【考点】：参数方程。

【思路】：（1）将参数方程化为直角方程后，直接联立方程求解即可（2）将参数方程直接代入距离公式即可。

【解析】：

将曲线 C 的参数方程化为直角方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ ，直线化为直角方程为 $y = -\frac{1}{4}x + 1 - \frac{1}{4}a$

（1）当 $a=1$ 时，代入可得直线为 $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ ，联立曲线方程可得：
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \\ x^2 + 9y^2 = 9 \end{cases}$$

，解得 $\begin{cases} x = -\frac{21}{25} \\ y = \frac{24}{25} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ ，故而交点为 $\left(-\frac{21}{25}, \frac{24}{25}\right)$ 或 $(3, 0)$

（2）点 $\begin{cases} x = 3\cos\theta, \\ y = \sin\theta, \end{cases}$ 到直线 $y = -\frac{1}{4}x + 1 - \frac{1}{4}a$ 的距离为 $d = \frac{|3\cos\theta + 4\sin\theta + a - 4|}{\sqrt{17}} \leq \sqrt{17}$ ，即：

$|3\cos\theta + 4\sin\theta + a - 4| \leq 17$ ，化简可得 $-17 - (a - 4) \leq 3\cos\theta + 4\sin\theta \leq 17 - (a - 4)$ ，根据辅助角公式可得 $-13 - a \leq 5\sin(\theta + \varphi) \leq 21 - a$ ，又 $-5 \leq 5\sin(\theta + \varphi) \leq 5$ ，解得 $a = -8$ 或者 $a = 16$ 。

23. [选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x) = -x^2 + ax + 4$ ， $g(x) = |x+1| + |x-1|$ 。

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x) \geq g(x)$ 的解集；

（2）若不等式 $f(x) \geq g(x)$ 的解集包含 $[-1, 1]$ ，求 a 的取值范围。

【考点】：不等式选讲。

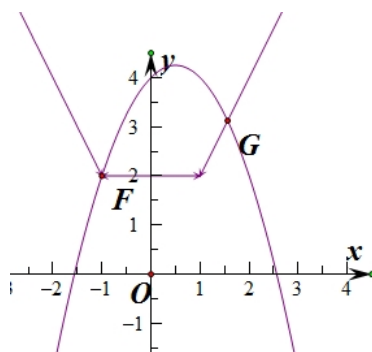
【思路】：（1）将函数化简作图即可（2）将参数方程直接代入距离公式即可。

【解析】：

将函数 $g(x) = |x+1| + |x-1|$ 化简可得 $g(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ -2x & x < -1 \end{cases}$

(1) 当 $a=1$ 时, 作出函数图像可得 $f(x) \geq g(x)$ 的范围在 F 和 G 点中间, 联立 $\begin{cases} y = 2x \\ y = -x^2 + x + 4 \end{cases}$ 可

得点 $G\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}, \sqrt{17}-1\right)$, 因此可得解集为 $\left[-1, \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right]$ 。



(2) 即 $f(x) \geq g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 内恒成立, 故而可得 $-x^2 + ax + 4 \geq 2 \Rightarrow x^2 - 2 \leq ax$ 恒成立, 根据图像可得: 函数 $y = ax$ 必须在 l_1, l_2 之间, 故而可得 $-1 \leq a \leq 1$ 。

