北京市朝阳区高三年级第二次综合练习

数学学科测试 （理工类）

2018．5

（考试时间 120 分钟　　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

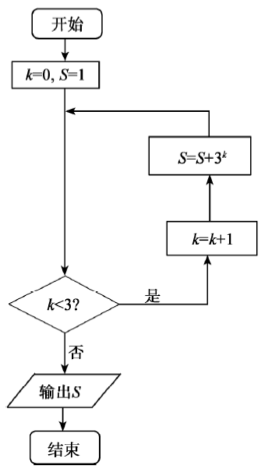
1．已知集合 $A=\{x|\log_2 x>1\}$，$B=\left\{x\middle|x\geq 1\right\}$，则 $A\cup B=$

A．$(1,2]$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(1,2)$　　D．$[1,+\infty)$

2．在△ABC 中，$AB=1, AC=\sqrt{2}, \angle C=\frac{\pi}{6}$，则 $\angle B=$

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}$　　C．$\frac{3\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$

3．执行如图所示的程序框图，则输出的 S 值为



A．10　　B．13

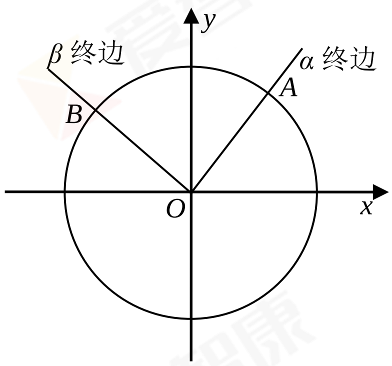
C．40　　D．121

4．在极坐标系中，直线 $l:\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=2$ 与圆 $C:\rho=2\cos\theta$ 的位置关系为

A．相交且过圆心　　B．相交但不过圆心

C．相切　　D．相离

5．如图，角 α，β 均以 Ox 为始边，终边与单位圆 O 分别交于点 A，B，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$



A．$\sin(\alpha-\beta)$　　B．$\sin(\alpha+\beta)$

C．$\cos(\alpha-\beta)$　　D．$\cos(\alpha+\beta)$

6．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\geq a,\\ x^2, x<a,\end{cases}$ 则“$a\leq 0$”是“函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．某校象棋社团组织中国象棋比赛．采用单循环赛制，即要求每个参赛选手必须且只须和其他选手各比赛一场，胜者得 2 分，负者得 0 分，平局两人各得 1 分．若冠军获得者得分比其他人都多，且获胜场次比其他人都少，则本次比赛的参赛人数至少为

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

8. 若三个非零且互不相等的实数 x_1,x_2,x_3 成等差数列且满足 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{2}{x_3}$，则称 x_1,x_2,x_3 成一个“β 等差数列”.已知集合 $M=\{x||x|\le 100,x\in \mathbf{Z}\}$，则由 M 中的三个元素组成的所有数列中，“β 等差数列”的个数为

A．25　　B．50　　C．51　　D．100

第二部分（非选择题 共 110 分）

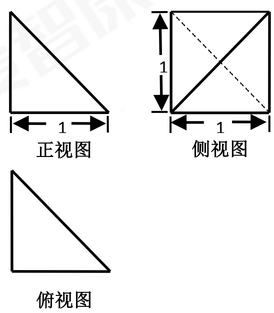
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9．计算 $\frac{1}{(1+\mathrm{i})^2}=$______.

10．双曲线 $x^2-y^2=\lambda(\lambda\ne 0)$ 的离心率是_____；该双曲线的两条渐近线的夹角是______.

11．若 $(x^3-\frac{1}{x})^n$ 展开式的二项式系数之和为 8，则 $n=$____，其展开式中的含 $\frac{1}{x^3}$ 项的系数为______.（用数字作答）

12. 已知某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥底面和三个侧面中，直角三角形个数是___.

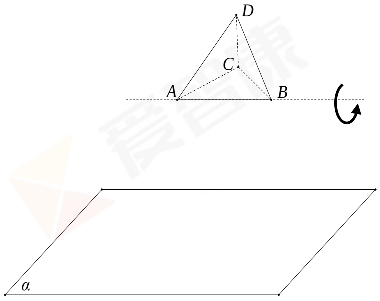


13．已知不等式组 $\begin{cases} y\ge 0, \\ |x|+y\le 2, \\ y+1\ge k(x+1) \end{cases}$ 在平面直角坐标系 xOy 中所表示的平面区域为 D，D 的面积为 S，则下面结论：

①当 $k>0$ 时，D 为三角形；　②当 $k<0$ 时，D 为四边形；

③当 $k=\frac{1}{3}$ 时，$S=4$；　④当 $0<k\le\frac{1}{3}$ 时，S 为定值.

其中正确的序号是______.



14．如图，已知四面体 $ABCD$ 的棱 AB // 平面 α，且 $AB=\sqrt{2}$，其余的棱长均为1．四面体 $ABCD$ 以 AB 所在的直线为轴旋转 x 弧度，且始终在水平放置的平面 α 的上方．如果将四面体 $ABCD$

在平面 α 内正投影面积看成关于 x 的函数，记为 $S(x)$，则函数 $S(x)$ 的最小值为_____；$S(x)$ 的最小正周期为_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.　(本小题满分 13 分)

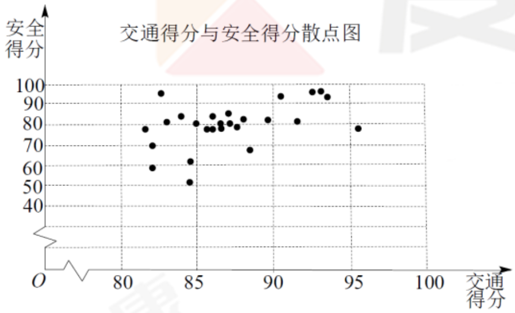
已知函数 $f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)-a$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{2},1)$，$a\in\mathbf{R}$.

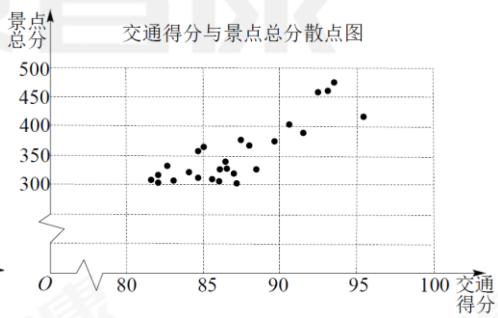
（Ⅰ）求 a 的值，并求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅱ）若当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，不等式 $f(x)\geq m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

16．(本小题满分 13 分)

某市旅游管理部门为提升该市 26 个旅游景点的服务质量，对该市 26 个旅游景点的交通、安全、环保、卫生、管理五项指标进行评分．每项评分最低分 0 分，最高分 100 分．每个景点总分为这五项得分之和．根据考核评分结果，绘制交通得分与安全得分散点图、交通得分与景点总分散点图如下：





请根据图中所提供的信息，完成下列问题：

（Ⅰ）若从交通得分前 5 名的景点中任取 1 个，求其安全得分大于 90 分的概率；

（Ⅱ）若从景点总分排名前 6 名的景点中任取 3 个，记安全得分不大于 90 分的景点个数为 ξ，求随机变量 ξ 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）记该市 26 个景点的交通平均得分为 $\overline{x_1}$，安全平均得分为 $\overline{x_2}$，写出 $\overline{x_1}$ 和 $\overline{x_2}$ 的大小关系？　（只写出结果）

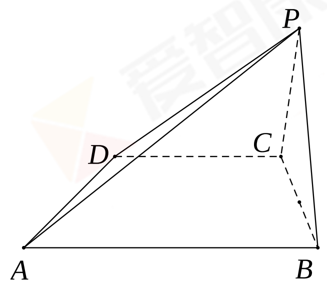
17．(本小题满分 14 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD$．$\triangle PBC$ 是等腰三角形，且 $PB=PC=3$；在梯形 $ABCD$ 中，$AB\parallel DC$，$AD\perp DC$，$AB=5, AD=4, DC=3$.

（Ⅰ）求证：$AB//$ 面 PDC；

（Ⅱ）求二面角 $A-PB-C$ 的余弦值；

（Ⅲ）在线段 AP 上是否存在点 H，使得 $BH\perp$ 平面 ADP？请说明理由.



18．(本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x)=xe^{x}+ax^{2}+2ax\ (a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $3x+y=0$，求 a 的值；

（Ⅱ）当 $-\frac{1}{2}\le a<0$ 时，讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

19． (本小题满分 14 分)

已知抛物线 $C:y^{2}=2x$.

（Ⅰ）写出抛物线 C 的准线方程，并求抛物线 C 的焦点到准线的距离；

（Ⅱ）过点 $(2,0)$ 且斜率存在的直线 l 与抛物线 C 交于不同两点 A,B，且点 B 关于 x 轴的对称点为 D，直线 AD 与 x 轴交于点 M.

（ⅰ）求点 M 的坐标；

（ⅱ）求 ΔOAM 与 ΔOAB 面积之和的最小值.

20． (本小题满分 13 分)

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：存在 $a_p=a_q(p,q\in\mathbf{N}^*,p>q)$，并且只要 $a_p=a_q$，就有 $a_{p+i}=ta_{q+i}(i=1,2,3,\cdots$；$t$ 为常数)，则称 $\{a_n\}$ 具有性质 T.

（Ⅰ）若 $\{a_n\}$ 具有性质 T，且 $t=3$，$a_1=4,a_2=5,a_4=1,a_5=5$，$a_7+a_8+a_9=36$，求 a_3；

（Ⅱ）若无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2^n+b$（$b\in\mathbf{R}$），证明存在无穷多个 b 的不同取值，使得数列 $\{a_n\}$ 具有性质 T；

（Ⅲ）设 $\{b_n\}$ 是一个无穷数列，数列 $\{a_n\}$ 中存在 $a_p=a_q\ (p,q\in\mathbf{N}^*,p>q)$，且 $a_{n+1}=b_n\cos a_n(n\in\mathbf{N}^*)$．求证：“$\{b_n\}$ 为常数列”是“对任意正整数 a_1，$\{a_n\}$ 都具有性质 T”的充分不必要条件.

北京市朝阳区高三年级第二次综合练习

数学学科测试答案（理工类）

2018．5

一、选择题：（本题满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	C	B	C	A	C	B

二、填空题：（本题满分 30 分）

题号	9	10		11		12	13	14	
答案	$-\frac{1}{2}\mathrm{i}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{2}$	3	-1	3	③④	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	π

三、解答题：（本题满分 80 分）

15． (本小题满分 13 分)

解：（Ⅰ）根据题意得 $2\sin\frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2})-a=1$．

即 $2\times(1+0)-a=1$，解得 $a=1$．

又 $f(x)=2\sin x(\sin x+\cos x)-1$

$=2\sin^2 x+2\sin x\cos x-1$

$=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，

得 $-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le 2x\le\frac{3\pi}{4}+2k\pi$，所以 $-\frac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{3\pi}{8}+k\pi$，

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi]\ (k\in\mathbf{Z})$． ……7 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$．

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，$2x-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$，

所以 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(2x-\frac{\pi}{4})\le 1$．

所以 $-1\le f(x)\le\sqrt{2}$．

当 $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$，即 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最小值 -1.

因为不等式 $f(x)\geq m$ 恒成立等价于 $m\leq f(x)_{最小值}$，

所以 $m\leq -1$.

故实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.　　……13 分

16．(本小题满分 13 分)

解：(Ⅰ) 由图可知，交通得分前 5 名的景点中安全得分大于 90 分的景点有 3 个.

故从交通得分前 5 名的景点中任取 1 个，其安全得分大于 90 分的概率为 $\frac{3}{5}$.　……3 分

(Ⅱ) 由图可知，景点总分前 6 名的景点中安全得分不大于 90 分的景点有 2 个.

设从景点总分前 6 名的景点中任取 3 个，安全得分不大于 90 分的个数为 ξ，则 ξ 的取值为 $0,1,2$.

所以 $P(\xi=0)=\frac{C_4^3}{C_6^3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$；　$P(\xi=1)=\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$；

$P(\xi=2)=\frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.

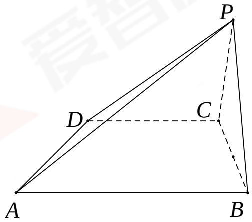
故 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

所以 $E\xi=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$.　　……10 分

(Ⅲ) $\overline{x_1}>\overline{x_2}$.　　……13 分

17．(本小题满分 14 分)

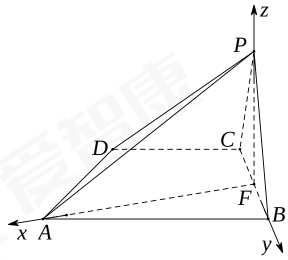


证明：(Ⅰ) 因为 $AB \parallel DC$，

又因为 $AB \not\subset$ 平面PDC， $DC \subset$ 平面PDC，

所以 $AB //$ 平面 PDC． ……3 分

(Ⅱ) 取 BC 中点 F，在 $\triangle PBC$ 中，因为 $PB = PC$，所以 $PF \perp BC$．



又易知 $AC = AB = 5$, 所以 $AF \perp BC$．

又因为平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$，且平面 $PBC \cap$ 平面 $ABCD=BC$，

所以 $PF \perp$ 平面 $ABCD$．所以 $PF \perp AF$．

以 F 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $F-xyz$．

在梯形 $ABCD$ 中，因为 $AB \parallel DC$， $AD \perp DC$， $AD = 4, DC = 3$， $AB = 5$，

所以 $BC = 2\sqrt{5}$， $AF = 2\sqrt{5}$．

又因为 $PB = 3$，所以 $PF = 2$．于是有 $P(0,0,2), A(2\sqrt{5},0,0), B(0,\sqrt{5},0), C(0,-\sqrt{5},0)$．

所以 $\overrightarrow{FA} = (2\sqrt{5},0,0)$， $\overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{5},\sqrt{5},0)$， $\overrightarrow{PB} = (0,\sqrt{5},-2)$．

因为 $AF \perp$ 平面 PBC，所以 $\overrightarrow{FA} = (2\sqrt{5},0,0)$ 是平面 PBC 的一个法向量.

设平面 PBA 的一个法向量为 $\boldsymbol{m} = (x,y,z)$，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -2\sqrt{5}x + \sqrt{5}y = 0, \\ \sqrt{5}y - 2z = 0. \end{cases} \text{所以} \begin{cases} y = 2x, \\ \sqrt{5}y = 2z. \end{cases}$$

令 $y = 2$，则 $\boldsymbol{m} = (1,2,\sqrt{5})$．

所以 $\cos < \overrightarrow{FA}, \boldsymbol{m} > = \dfrac{(2\sqrt{5},0,0)\cdot(1,2,\sqrt{5})}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+4+5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$．

由图可知，二面角 $A-PB-C$ 为锐角，

所以二面角 $A-PB-C$ 的余弦值 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$． ……9 分

(Ⅲ) 因为 $AB = 5, DC = 3$，且 $\overrightarrow{AB} = (-2\sqrt{5},\sqrt{5},0)$，所以 $\overrightarrow{CD} = -\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}$．

所以 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$$= \frac{2}{5}(-2\sqrt{5},\sqrt{5},0) + (0,-2\sqrt{5},0) = (-\frac{4\sqrt{5}}{5}, -\frac{8\sqrt{5}}{5}, 0).$$

设平面 ADP 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}x_1-\dfrac{8\sqrt{5}}{5}y_1=0,\\ -2\sqrt{5}x_1+2z_1=0.\end{cases} \text{所以} \begin{cases}x_1=-2y_1,\\ \sqrt{5}x_1=z_1.\end{cases}$$

令 $x_1=2$，则 $\boldsymbol{n}=(2,-1,2\sqrt{5})$.

假设线段 AP 上存在点 H，使得 $BH\perp$ 平面 ADP，且设 $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AP}(\lambda\in[0,1])$.

所以 $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AP}=\lambda(-2\sqrt{5},0,2)=(-2\sqrt{5}\lambda,0,2\lambda)$.

所以 $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}=(2\sqrt{5},-\sqrt{5},0)+(-2\sqrt{5}\lambda,0,2\lambda)=(2\sqrt{5}(1-\lambda),-\sqrt{5},2\lambda)$.

因为 $BH\perp$ 平面 ADP，所以 $\overrightarrow{BH}//\boldsymbol{n}$.

所以 $\dfrac{2\sqrt{5}(1-\lambda)}{2}=\dfrac{-\sqrt{5}}{-1}=\dfrac{2\lambda}{2\sqrt{5}}$. 显然 λ 不存在.

所以假设不成立，故线段 AP 上不存在点 H，使得 $BH\perp$ 平面 ADP. ……14 分

18. (本小题满分 13 分)

解：由题意可知 $f'(x)=(x+1)(\mathrm{e}^x+2a)$.

（Ⅰ）因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $3x+y=0$，

所以 $f(0)=0,\ f'(0)=-3.$ 由 $\mathrm{e}^0+2a=-3$ 得 $a=-2$. ……4 分

（Ⅱ）当 $-\dfrac{1}{2}\le a<0$ 时，令 $f'(x)=(x+1)(\mathrm{e}^x+2a)=0$ 得 $x=-1$ 或 $x=\ln(-2a)$.

①当 $\ln(-2a)<-1$，即 $a\in(-\dfrac{1}{2\mathrm{e}},0)$ 时，

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a),-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $(\ln(-2a),-1)$ 上单调递减，在 $(-\infty,\ln(-2a))$ 和 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $f(\ln(-2a))=a\ln^2(-2a)<0$，$f(0)=0$，

所以函数 $f(x)$ 有一个零点.

②当 $\ln(-2a)=-1$，即 $a=-\dfrac{1}{2e}$ 时，

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	$f(-1)=-a-\dfrac{1}{e}$	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $f(0)=0$，所以函数 $f(x)$ 有一个零点.

③当 $-1<\ln(-2a)<0$，即 $a\in(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2e})$ 时，

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\ln(-2a))$	$\ln(-2a)$	$(\ln(-2a),+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,\ln(-2a))$ 上单调递减，在 $(-\infty,-1)$ 和 $(\ln(-2a),+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $f(-2)=-2e^{-2}+4a-4a=-2e^{-2}<0$，$f(-1)=-a-\dfrac{1}{e}$，

$f(\ln(-2a))=a\ln^2(-2a)<0$，$f(0)=0$，

所以当 $a\in(-\dfrac{1}{e},-\dfrac{1}{2e})$ 时，此时 $f(-1)=-a-\dfrac{1}{e}<0$，函数 $f(x)$ 有一个零点；

当 $a=-\dfrac{1}{e}$ 时，此时 $f(-1)=0$，函数 $f(x)$ 有两个零点；

当 $a\in(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{e})$ 时，此时 $f(-1)=-a-\dfrac{1}{e}>0$，函数 $f(x)$ 有三个零点.

④当 $\ln(-2a)=0$，即 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，显然函数 $f(x)$ 有两个零点.

综上所述，(1) 当 $a\in(-\dfrac{1}{e},0)$ 时，函数 $f(x)$ 有一个零点；

(2) 当 $a\in\{-\dfrac{1}{e},-\dfrac{1}{2}\}$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点；

（3）当 $a\in(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\mathrm{e}})$ 时，函数 $f(x)$ 有三个零点． ……13 分

另外的解法提示：$f(x)=x(e^x+ax+2)$，易知 $f(0)=$ ．即可考虑 $g(x)=e^x+ax+2$ 的零点.

19．(本小题满分 14 分)

解：（Ⅰ）由题意可知，抛物线的准线方程为 $x=-\frac{1}{2}$．

抛物线 C 的焦点到准线的距离为 1． ……4 分

（Ⅱ）由已知设直线 $l:y=k(x-2)$，显然 $k\neq 0$；$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$x_1\neq x_2$．

由 $\begin{cases} y^2=2x, \\ y=k(x-2), \end{cases}$ 得 $ky^2-2y-4k=0$．

所以 $y_1+y_2=\frac{2}{k}$，$y_1y_2=-4$．

（ⅰ）因为点 B,D 关于 x 轴对称，所以 $D(x_2,-y_2)$．

所以直线 AD 的方程为 $y-y_1=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$．

令 $y=0$，得 $x=\frac{x_1(y_1+y_2)-y_1(x_1-x_2)}{y_1+y_2}=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}$

$$=\frac{y_1^2y_2+y_2^2y_1}{2(y_1+y_2)}=\frac{1}{2}y_1y_2=-2.$$

所以 $M(-2,0)$． ……10 分

（ⅱ）记 ΔOAM 与 ΔOAB 面积分别为 $S_{\Delta OAM}$，$S_{\Delta OAB}$，设 $P(2,0)$

则 $S_{\Delta OAM}+S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|OM|\times|y_1|+\frac{1}{2}|OP|\times(|y_1|+|y_2|)$

$$=2|y_1|+|y_2|\geq 2\sqrt{2|y_1|\times|y_2|}=2\sqrt{2|y_1y_2|}=4\sqrt{2}.$$

当且仅当 $|y_2|=2|y_1|$，即 $y_1=\pm\sqrt{2},y_2=\mp 2\sqrt{2}$ 时，

ΔOAM 与 ΔOAB 面积之和的最小值是 $4\sqrt{2}$． ……14 分

20． (本小题满分 13 分)

解：（Ⅰ）因为 $\{a_n\}$ 具有性质 T，且 $t=3$，$a_5=a_2=5$，

所以 $a_6=3a_3,\ a_7=3a_4=3,\ a_8=3a_5=15,\ a_9=3a_6=9a_3$,

由 $a_7+a_8+a_9=36$，得 $3+15+9a_3=36$, 所以 $a_3=2$，经检验符合题意. ……3 分

（II）证明：因为无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 和为 S_n，且 $S_n=2^n+b$，

所以 $a_1=2+b$，当 $n\geq 2$ 时，$a_n=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$. 若存在 $a_p=a_q\left(p>q\right)$，则 $q=1$.

取 $b=2^{p-1}-2(p\in\mathbf{N}$, 且 $p\geq 2$， p 为常数),

则 $a_p=2^{p-1}=a_1$， 对 $t=2^{p-1}$， 有 $a_{p+i}=2^{p+i-1}=2^{p-1}a_{1+i}=ta_{1+i}(i=1,2,3,\cdots)$，

所以 $\{a_n\}$ 具有性质 T，且 b 的不同取值有无穷多个. ……8 分

（III）证明：当 $\{b_n\}$ 为常数列时，有 $b_n=m$（常数），$a_{n+1}=m\cos a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，

对任意的正整数 a_1，因为存在 $a_p=a_q$，则由 $m\cos a_p=m\cos a_q$，必有 $a_{p+1}=a_{q+1}$，进而

有 $a_{p+i}=a_{q+i}(i=1,2,3,\cdots)$，这时 $t=1$，$a_{p+i}=ta_{q+i}(i=1,2,3,\cdots)$，

所以 $\{a_n\}$ 都具有性质 T .

所以，“$\{b_n\}$ 为常数列”是“对任意正整数 $a_1,\{a_n\}$ 都具有性质 T”的充分条件.

取 $b_n=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2},n=2k-1,\\ 0,n=2k,\end{cases}$（$k\in\mathbf{N}^*$），对任意正整数 a_1，由 $a_n=b_{n-1}\cos a_{n-1}(n\geq 2,n\in\mathbf{N})$

得，$a_2=b_1\cos a_1=\dfrac{\pi}{2}\cos a_1$，因为 a_1 为正整数，所以 $a_2\neq 0$，且 $a_1\neq a_2$.

$a_3=b_2\cos a_2=0$，$a_4=b_3\cos a_3=\dfrac{\pi}{2}$，…，

即，当 $n\geq 3$ 时，$a_n=\begin{cases}0,n=2k+1,\\ \dfrac{\pi}{2},n=2k+2,\end{cases}$（$k\in\mathbf{N}^*$）.

对任意 p,q，则 p,q 同为奇数或同为偶数.

① 若 p,q 同为偶数，则 $a_{p+i}=a_{q+i}(i=1,2,3,\cdots)$ 成立；

② 若 p,q 同为奇数，则 $a_{p+i}=a_{q+i}(i=1,2,3,\cdots)$ 成立.

所以对于任意 p,q 满足 $a_p=a_q$，则取 $t=1$，$a_{p+i}=1\times a_{q+i}$.

故 $\{a_n\}$ 具有性质 T，但 $\{b_n\}$ 不为常数列，

所以“$\{b_n\}$ 为常数列”是“对任意正整数 $a_1,\{a_n\}$ 都具有性质 T”的不必要条件.

证毕 ……13 分