



西城区高三模拟测试

# 数学(文科)

2018.5

## 第I卷(选择题 共40分)

一、选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 若集合  $A = \{x | 0 < x < 1\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 2x < 0\}$ , 则下列结论中正确的是

- (A)  $A \cap B = \emptyset$  (B)  $A \cup B = \mathbf{R}$   
(C)  $A \subseteq B$  (D)  $B \subseteq A$

2. 复数  $\frac{1}{1-i} =$

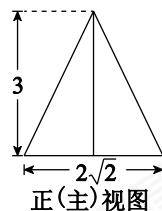
- (A)  $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$  (B)  $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$  (C)  $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$  (D)  $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

3. 下列函数中,既是偶函数又在区间  $(0, +\infty)$  上单调递减的是

- (A)  $y = \frac{1}{x}$  (B)  $y = x^2$  (C)  $y = \cos x$  (D)  $y = -\ln|x|$

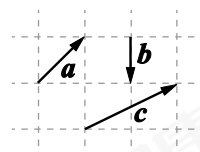
4. 某正四棱锥的正(主)视图和俯视图如图所示,该正四棱锥的侧棱长是

- (A)  $\sqrt{10}$   
(B)  $\sqrt{11}$   
(C)  $4\sqrt{10}$   
(D)  $4\sqrt{11}$



5. 向量  $a, b, c$  在正方形网格中的位置如图所示. 若向量  $\lambda a + b$  与  $c$  共线, 则实数  $\lambda =$

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2



6. 设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $ab \neq 0$ . 则“ $ab > 1$ ”是“ $a > \frac{1}{b}$ ”的

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件  
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件



7. 设不等式组  $\begin{cases} x \geq 1, \\ x + y \geq 3, \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$  表示的平面区域为  $D$ . 若直线  $ax - y = 0$  上存在区域  $D$  上的点,

则实数  $a$  的取值范围是

- (A)  $[\frac{1}{2}, 2]$  (B)  $[\frac{1}{2}, 3]$   
(C)  $[1, 2]$  (D)  $[2, 3]$

8. 地铁某换乘站设有编号为 A, B, C, D, E 的五个安全出口. 若同时开放其中的两个安全出口, 疏散 1000 名乘客所需的时间如下:

安全出口编号	A, B	B, C	C, D	D, E	A, E
疏散乘客时间 (s)	120	220	160	140	200

则疏散乘客最快的一个安全出口的编号是

- (A) A (B) B (C) D (D) E

## 第 II 卷 (非选择题 共 110 分)

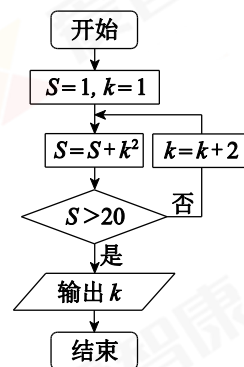
二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. 函数  $y = \frac{1}{|x| + 2}$  的最大值是\_\_\_\_\_.

10. 执行如右图所示的程序框图, 输出的  $k$  值为\_\_\_\_\_.

11. 在  $\triangle ABC$  中,  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $\cos B = \frac{4}{5}$ , 则  $\sin A =$ \_\_\_\_\_.

12. 双曲线  $C: \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$  的焦距是\_\_\_\_\_; 若圆  $(x-1)^2 + y^2 = r^2$  ( $r > 0$ ) 与双曲线  $C$  的渐近线相切, 则  $r =$ \_\_\_\_\_.





13. 为绿化生活环境,某市开展植树活动.今年全年植树 6.4 万棵,计划 3 年后全年植树 12.5 万棵.若植树的棵数每年的增长率均为  $a$ ,则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} a + 2^x, & x \leq 1, \\ \frac{1}{2}x + a, & x > 1, \end{cases}$  其中  $a \in \mathbf{R}$ . 如果函数  $f(x)$  恰有两个零点,那么  $a$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

三、解答题:本大题共 6 小题,共 80 分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

在等差数列  $\{a_n\}$  和等比数列  $\{b_n\}$  中,  $a_1 = b_1 = 1$ ,  $a_2 = b_2$ ,  $2 + a_4 = b_3$ .

(I) 求  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的通项公式;

(II) 求数列  $\{a_n + b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

16. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$ .

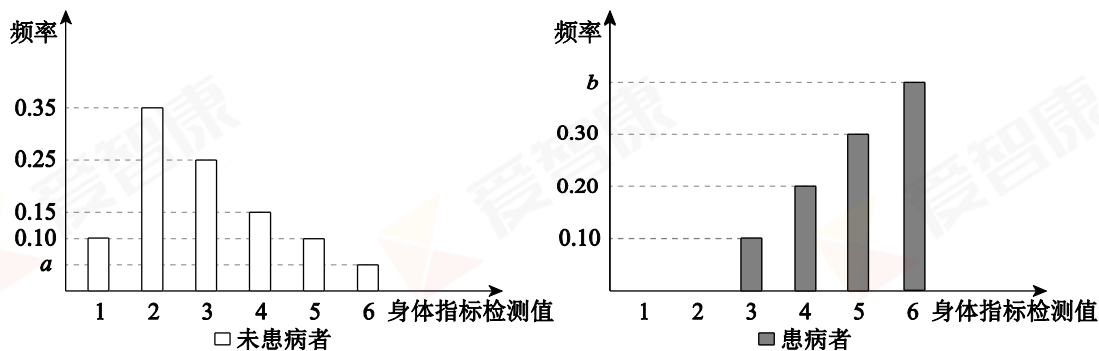
(I) 求  $f(x)$  的定义域;

(II) 求  $f(x)$  的取值范围.



17. (本小题满分 13 分)

在某地区,某项职业的从业者共约 8.5 万人,其中约 3.4 万人患有某种职业病.为了解这种职业病与某项身体指标(检测值为不超过 6 的正整数)间的关系,依据是否患有职业病,使用分层抽样的方法随机抽取了 100 名从业者,记录他们该项身体指标的检测值,整理得到如下统计图:

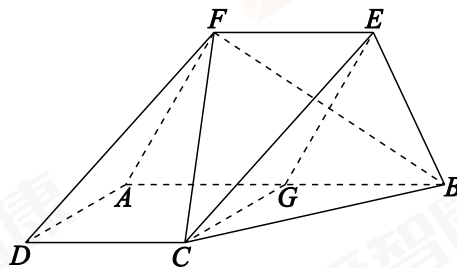


- (I) 求样本中患病者的人数和图中  $a, b$  的值;
- (II) 试估计此地区该项身体指标检测值不低于 5 的从业者的人数;
- (III) 某研究机构提出,可以选取常数  $X_0 = 4.5$ ,若一名从业者该项身体指标检测值大于  $X_0$ ,则判断其患有这种职业病;若检测值小于  $X_0$ ,则判断其未患有这种职业病.从样本中随机选择一名从业者,按照这种方式判断其是否患病,求判断错误的概率.

18. (本小题满分 14 分)

如图,梯形  $ABCD$  所在的平面与等腰梯形  $ABEF$  所在的平面互相垂直,  $AB \parallel CD \parallel EF$ ,  $AB \perp AD$ ,  $G$  为  $AB$  的中点.  $CD = DA = AF = FE = 2$ ,  $AB = 4$ .

- (I) 求证:  $DF \parallel$  平面  $BCE$ ;
- (II) 求证: 平面  $BCF \perp$  平面  $GCE$ ;
- (III) 求多面体  $AFEBCD$  的体积.





19. (本小题满分 13 分)

已知函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x} - ax$ , 曲线  $y = f(x)$  在  $x = 1$  处的切线经过点  $(2, -1)$ .

(I) 求实数  $a$  的值;

(II) 设  $b > 1$ , 求  $f(x)$  在区间  $[\frac{1}{b}, b]$  上的最大值和最小值.

20. (本小题满分 14 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 经过点  $(0, 1)$ .

(I) 求椭圆  $C$  的方程;

(II) 设直线  $y = x$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点, 斜率为  $k$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $M, N$  两点, 与直线  $y = x$  交于点  $P$  (点  $P$  与点  $A, B, M, N$  不重合).

(i) 当  $k = -1$  时, 证明:  $|PA| \cdot |PB| = |PM| \cdot |PN|$ ;

(ii) 写出  $\frac{|PA| \cdot |PB|}{|PM| \cdot |PN|}$  以  $k$  为自变量的函数式 (只需写出结论).



西城区高三模拟测试

数学（文科）参考答案及评分标准

2018.5

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

- |      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| 1. C | 2. A | 3. D | 4. B |
| 5. D | 6. D | 7. B | 8. C |

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

- |                       |         |                          |
|-----------------------|---------|--------------------------|
| 9. $\frac{1}{2}$      | 10. 5   | 11. $\frac{9}{10}$       |
| 12. $10, \frac{3}{5}$ | 13. 25% | 14. $[-2, -\frac{1}{2})$ |

注：第 12 题第一空 3 分，第二空 2 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

15. (本小题满分 13 分)

解：(I) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ，等比数列  $\{b_n\}$  的公比为  $q$ .

$$\text{依题意，得 } \begin{cases} 1+d=q, \\ 2+(1+3d)=q^2. \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} d=2, \\ q=3, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} d=-1, \\ q=0. \end{cases} \text{ (舍去)} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } a_n = 2n-1, \quad b_n = 3^{n-1}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{(II) 因为 } a_n + b_n = 2n-1+3^{n-1}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S_n = [1+3+5+\cdots+(2n-1)] + (1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}) \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$= \frac{n[1+(2n-1)]}{2} + \frac{1-3^n}{1-3} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$= n^2 + \frac{3^n-1}{2}. \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$



16. (本小题满分 13 分)

解: (I) 由  $\sin x + \cos x \neq 0$ , ..... 2 分

得  $\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \neq 0$ , ..... 3 分

所以  $x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi$ , 其中  $k \in \mathbf{Z}$ . ..... 4 分

所以  $f(x)$  的定义域为  $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}\}$ . ..... 5 分

(II) 因为  $f(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x}$  ..... 7 分

$= \cos x - \sin x$  ..... 9 分

$= \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$ . ..... 11 分

由 (I) 得  $x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi$ , 其中  $k \in \mathbf{Z}$ ,

所以  $-1 < \cos(x + \frac{\pi}{4}) < 1$ , ..... 12 分

所以  $f(x)$  的取值范围是  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . ..... 13 分

17. (本小题满分 13 分)

解: (I) 根据分层抽样原则, 容量为 100 的样本中, 患病者的人数为

$100 \times \frac{3.4}{8.5} = 40$  人. .... 2 分

$a = 1 - 0.10 - 0.35 - 0.25 - 0.15 - 0.10 = 0.05$ ,

$b = 1 - 0.10 - 0.20 - 0.30 = 0.40$ . .... 4 分

(II) 指标检测值不低于 5 的样本中,

有患病者  $40 \times (0.30 + 0.40) = 28$  人, 未患病者  $60 \times (0.10 + 0.05) = 9$  人, 共 37 人.

..... 6 分

此地区该项身体指标检测值不低于 5 的从业者的人数约为  $\frac{37}{100} \times 85000 = 31450$  人.

..... 8 分

(III) 当  $X_0 = 4.5$  时, 在 100 个样本数据中,

有  $40 \times (0.10 + 0.20) = 12$  名患病者被误判为未患病, ..... 10 分

有  $60 \times (0.10 + 0.05) = 9$  名未患病者被误判为患病者, ..... 12 分

因此判断错误的概率为  $\frac{21}{100}$ . ..... 13 分



18. (本小题满分 14 分)

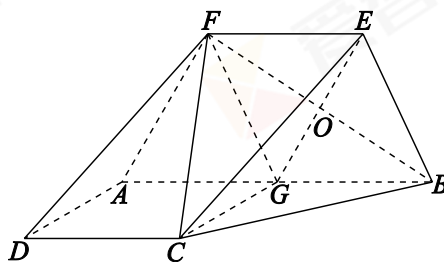
解: (I) 因为  $CD \parallel EF$ , 且  $CD = EF$ ,

所以 四边形  $CDFE$  为平行四边形,

所以  $DF \parallel CE$ . ..... 2 分

因为  $DF \not\subset$  平面  $BCE$ , ..... 3 分

所以  $DF \parallel$  平面  $BCE$ . ..... 4 分



(II) 连接  $FG$ .

因为 平面  $ABCD \perp$  平面  $ABEF$ , 平面  $ABCD \cap$  平面  $ABEF = AB$ ,  $AD \perp AB$ ,

所以  $AD \perp$  平面  $ABEF$ ,

所以  $BF \perp AD$ . ..... 6 分

因为  $G$  为  $AB$  的中点,

所以  $AG \parallel CD$ , 且  $AG = CD$ ;  $EF \parallel BG$ , 且  $EF = BG$ ,

所以 四边形  $AGCD$  和 四边形  $BEFG$  均为平行四边形.

所以  $AD \parallel CG$ , 所以  $BF \perp CG$ . ..... 7 分

因为  $EF = EB$ ,

所以 四边形  $BEFG$  为菱形,

所以  $BF \perp EG$ . ..... 8 分

所以  $BF \perp$  平面  $GCE$ . ..... 9 分

所以 平面  $BCF \perp$  平面  $GCE$ . ..... 10 分

(III) 设  $BF \cap GE = O$ .

由 (I) 得  $DF \parallel CE$ , 所以  $DF \parallel$  平面  $GCE$ ,

由 (II) 得  $AD \parallel CG$ , 所以  $AD \parallel$  平面  $GCE$ ,

所以 平面  $ADF \parallel$  平面  $GCE$ ,

所以 几何体  $ADF-GCE$  是三棱柱. ..... 11 分

由 (II) 得  $BF \perp$  平面  $GCE$ .

所以 多面体  $AFEBCD$  的体积  $V = V_{ADF-GCE} + V_{B-GCE}$  ..... 12 分

$$= S_{\triangle GCE} \cdot FO + \frac{1}{3} S_{\triangle GCE} \cdot BO$$

$$= \frac{4}{3} S_{\triangle GCE} \cdot FO = \frac{8\sqrt{3}}{3}. \quad \text{..... 14 分}$$



19. (本小题满分 13 分)

解: (I)  $f(x)$  的导函数为  $f'(x) = \frac{1 - \ln x - ax^2}{x^2}$ , ..... 2 分

所以  $f'(1) = 1 - a$ .

依题意, 有  $\frac{f(1) - (-1)}{1 - 2} = 1 - a$ ,

即  $\frac{-a + 1}{1 - 2} = 1 - a$ , ..... 4 分

解得  $a = 1$ . ..... 5 分

(II) 由 (I) 得  $f'(x) = \frac{1 - x^2 - \ln x}{x^2}$ .

当  $0 < x < 1$  时,  $1 - x^2 > 0$ ,  $-\ln x > 0$ , 所以  $f'(x) > 0$ , 故  $f(x)$  单调递增;

当  $x > 1$  时,  $1 - x^2 < 0$ ,  $-\ln x < 0$ , 所以  $f'(x) < 0$ , 故  $f(x)$  单调递减.

所以  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  上单调递增, 在区间  $(1, +\infty)$  上单调递减. .... 8 分

因为  $0 < \frac{1}{b} < 1 < b$ , 所以  $f(x)$  最大值为  $f(1) = -1$ . .... 9 分

设  $h(b) = f(b) - f(\frac{1}{b}) = (b + \frac{1}{b})\ln b - b + \frac{1}{b}$ , 其中  $b > 1$ . .... 10 分

则  $h'(b) = (1 - \frac{1}{b^2})\ln b > 0$ ,

故  $h(b)$  在区间  $(1, +\infty)$  上单调递增. .... 11 分

所以  $h(b) > h(1) = 0$ , 即  $f(b) > f(\frac{1}{b})$ , .... 12 分

故  $f(x)$  最小值为  $f(\frac{1}{b}) = -b\ln b - \frac{1}{b}$ . .... 13 分

20. (本小题满分 14 分)

解: (I) 设椭圆  $C$  的半焦距为  $c$ . 依题意, 得

$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ,  $b = 1$ , 且  $a^2 = b^2 + c^2$ . ..... 2 分

解得  $a = \sqrt{3}$ . ..... 3 分

所以 椭圆  $C$  的方程是  $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ . .... 4 分

(II) (i) 由  $\begin{cases} y = x, \\ x^2 + 3y^2 = 3, \end{cases}$  得  $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ . .... 5 分

$k = -1$  时, 设直线  $l$  的方程为  $y = -x + t$ .



$$\text{由 } \begin{cases} y = -x + t, \\ x^2 + 3y^2 = 3, \end{cases} \quad \text{得 } 4x^2 - 6tx + 3t^2 - 3 = 0. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{令 } \Delta = 36t^2 - 48(t^2 - 1) > 0, \text{ 解得 } t^2 < 4.$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{3t}{2}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{3t^2 - 3}{4}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = -x + t, \\ y = x, \end{cases} \quad \text{得 } P\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right). \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } |PA| \parallel |PB| = \sqrt{2} \left| \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \cdot \sqrt{2} \left| \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \left| \frac{t^2 - 3}{2} \right|. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } |PM| = \sqrt{\left(\frac{t}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{t}{2} - y_1\right)^2} = \sqrt{2} \left| \frac{t}{2} - x_1 \right|, \text{ 同理 } |PN| = \sqrt{2} \left| \frac{t}{2} - x_2 \right|.$$

$$\text{所以 } |PM| \parallel |PN| = 2 \left| \frac{t}{2} - x_1 \right| \cdot \left| \frac{t}{2} - x_2 \right|$$

$$= 2 \left| \frac{t^2}{4} - \frac{t}{2} \cdot \frac{3t}{2} + \frac{3t^2 - 3}{4} \right|$$

$$= \left| \frac{t^2 - 3}{2} \right|.$$

$$\text{所以 } |PA| \parallel |PB| = |PM| \parallel |PN|. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$(ii) \quad \frac{|PA| \parallel |PB|}{|PM| \parallel |PN|} = \frac{1 + 3k^2}{2(1 + k^2)}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$