

2016年全国卷III理科高考真题数学试卷

选择

1. 设集合 $S = \{x | (x-2)(x-3) \geq 0\}$, $T = \{x | x > 0\}$, 则 $S \cap T = ()$.

- A. $[2, 3]$ B. $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$ C. $[3, +\infty)$ D. $(0, 2] \cup [3, +\infty)$

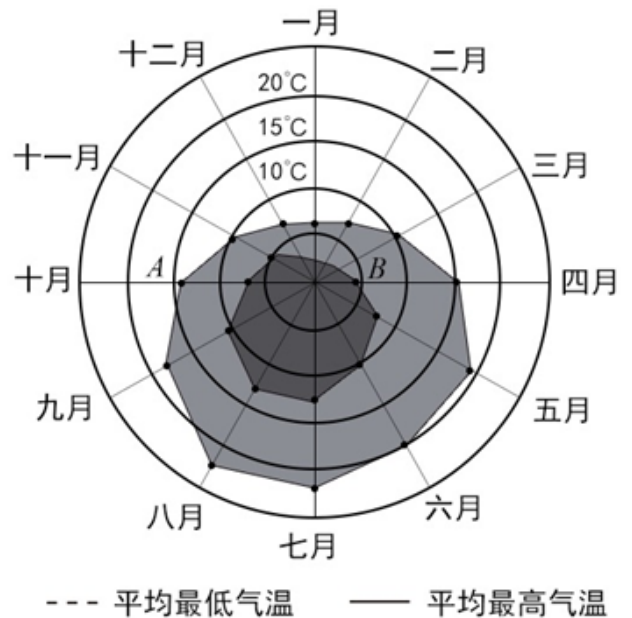
2. 若 $z = 1 + 2i$, 则 $\frac{4i}{z\bar{z} - 1} = ()$.

- A. 1 B. -1 C. i D. -i

3. 已知向量 $\vec{BA} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{BC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 则 $\angle ABC = ()$.

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 120°

4. 某旅游城市为向游客介绍本地的气温情况, 绘制了一年中月平均最高气温和平均最低气温的雷达图. 图中A点表示十月的平均最高气温约为 15°C , B点表示四月的平均最低气温约为 5°C . 下面叙述不正确的是 ().



- A. 各月的平均最低气温都在 0°C 以上 B. 七月的平均温差比一月的平均温差大
C. 三月和十一月的平均最高气温基本相同 D. 平均气温高于 20°C 的月份有 5 个

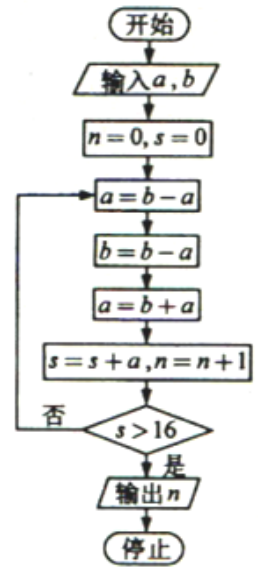
5. 若 $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, 则 $\cos^2 \alpha + 2 \sin 2\alpha = ()$.

- A. $\frac{64}{25}$ B. $\frac{48}{25}$ C. 1 D. $\frac{16}{25}$

6. 已知 $a = 2^{\frac{4}{3}}$, $b = 4^{\frac{2}{5}}$, $c = 25^{\frac{1}{3}}$, 则 () .

- A. $b < a < c$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

7. 执行下图的程序框图, 如果输入的 $a = 4$, $b = 6$, 那么输出的 $n = ()$.

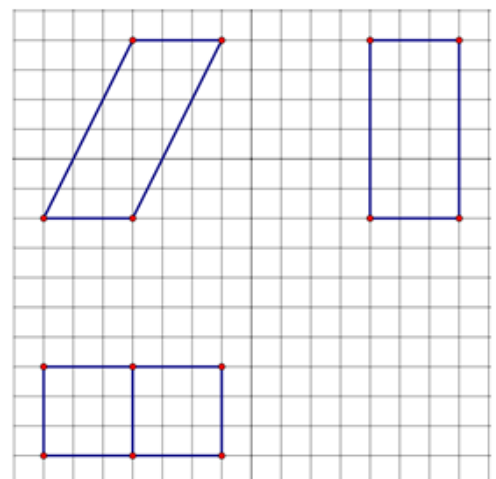


- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{4}$, BC 边上的高等于 $\frac{1}{3}BC$, 则 $\cos A = ()$.

- A. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ C. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

9. 如图, 网格纸上小正方形的边长为1, 粗实线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的表面积为 () .



- A. $18 + 36\sqrt{5}$ B. $54 + 18\sqrt{5}$ C. 90 D. 81

10. 在封闭的直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 内有一个体积为 V 的球. 若 $AB \perp BC$, $AB = 6$, $BC = 8$, $AA_1 = 3$, 则 V 的最大值是

() .

- A. 4π B. $\frac{9\pi}{2}$ C. 6π D. $\frac{32\pi}{3}$

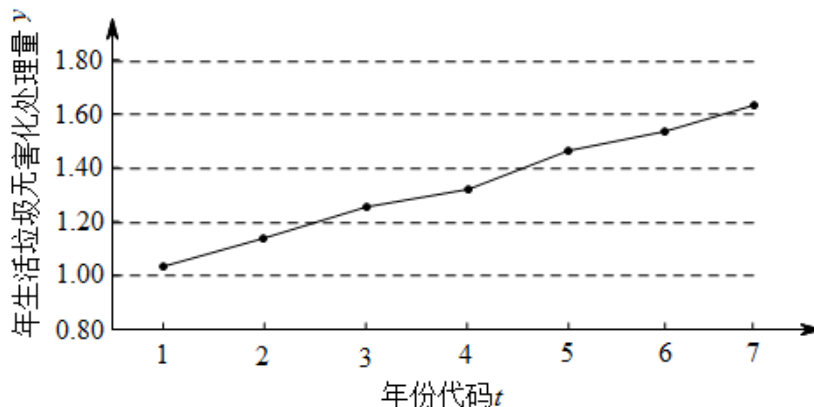
11. 已知 O 为坐标原点, F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点, A, B 分别为 C 的左, 右顶点. P 为 C 上一点, 且 $PF \perp x$ 轴. 过点 A 的直线 l 与线段 PF 交于点 M , 与 y 轴交于点 E . 若直线 BM 经过 OE 的中点, 则 C 的离心率为().
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$
12. 定义“规范01数列” $\{a_n\}$ 如下: $\{a_n\}$ 共有 $2m$ 项, 其中 m 项为0, m 项为1, 且对任意 $k \leq 2m$, a_1, a_2, \dots, a_k 中0的个数不少于1的个数. 若 $m = 4$, 则不同的“规范01数列”共有().
- A. 18个 B. 16个 C. 14个 D. 12个

填空

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + 2y - 2 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = x + y$ 的最大值为_____.
14. 函数 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的图象可由函数 $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ 的图象至少向右平移_____个单位长度得到.
15. 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = \ln(-x) + 3x$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, -3)$ 处的切线方程是_____.
16. 已知直线 $l: mx + y + 3m - \sqrt{3} = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 12$ 交于 A, B 两点, 过 A, B 分别做 l 的垂线与 x 轴交于 C, D 两点, 若 $|AB| = 2\sqrt{3}$, 则 $|CD| =$ _____.

解答

17. 已知数列 a_n 的前 n 项和 $S_n = 1 + \lambda a_n$, 其中 $\lambda \neq 0$;
- (1) 证明 $\{a_n\}$ 是等比数列, 并求其通项公式
- (2) 若 $S_5 = \frac{31}{32}$, 求 λ .
18. 下图是我国2008年至2014年生活垃圾无害化处理量(单位: 亿吨)的折线图



注: 年份代码1-7分别对应年份2008-2014

参考数据： $\sum_{i=1}^7 y_i = 9.32$ ， $\sum_{i=1}^7 t_i y_i = 40.17$ ， $\sqrt{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} = 0.55$ ， $\sqrt{7} = 2.646$ 。

参考公式：相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2 \sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2}}$ ，

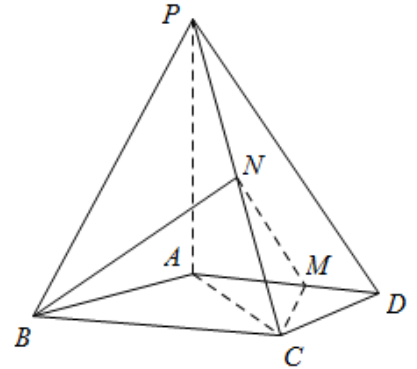
回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}t$ 中斜率和截距最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t}.$$

(1) 由折线图看出，可用线性回归模型拟合 y 与 t 的关系，请用相关系数加以说明

(2) 建立 y 关于 t 的回归方程（系数精确到 0.01），预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量。

19. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $AB = AD = AC = 3$ ， $PA = BC = 4$ ， M 为线段 AD 上一点， $AM = 2MD$ ， N 为 PC 的中点。



- (1) 证明 $MN \parallel$ 平面 PAB ；
 (2) 求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值。

20. 已知抛物线 $C: y^2 = 2x$ 的焦点为 F ，平行于 x 轴的两条直线 l_1, l_2 分别交 C 于 A, B 两点，交 C 的准线于 P, Q 两点。

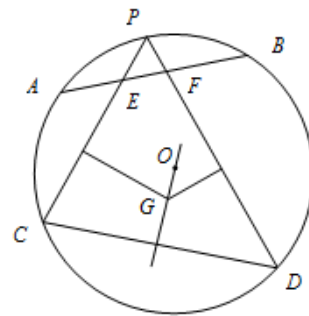
- (1) 若 F 在线段 AB 上， R 是 PQ 的中点，证明 $AR \parallel FQ$ ；
 (2) 若 $\triangle PQF$ 的面积是 $\triangle ABF$ 的面积的两倍，求 AB 中点的轨迹方程。

21. 设函数 $f(x) = a \cos 2x + (a-1)(\cos x + 1)$ ，其中 $a > 0$ ， $|f(x)|$ 的最大值为 A 。

- (1) 求 $f'(x)$ ；
 (2) 求 A ；
 (3) 证明 $|f'(x)| \leq 2A$ 。

选做题

22. 如图， $\odot O$ 中 \widehat{AB} 的中点为 P ，弦 PC, PD 分别交 AB 于 E, F 两点。



- (1) 若 $\angle PFB = 2\angle PCD$, 求 $\angle PCD$ 的大小;
- (2) 若 EC 的垂直平分线与 FD 的垂直平分线交于点 G , 证明 $OG \perp CD$.

23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 以坐标原点为极点, 以 x 轴的正半轴为极轴, 建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$.

- (1) 写出 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程;
- (2) 设点 P 在 C_1 上, 点 Q 在 C_2 上, 求 $|PQ|$ 的最小值及此时 P 的直角坐标.

24. 已知函数 $f(x) = |2x - a| + a$

- (1) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 6$ 的解集;
- (2) 设函数 $g(x) = |2x - 1|$, 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, $f(x) + g(x) \geq 3$, 求 a 的取值范围.