

2018 年普通高等学校招生全国统一考试
理科数学答案

一、选择题

1. C 【解析】由 A 得, $x \geq 1$, 所以 $A \cap B = \{1, 2\}$

2. D 【解析】原式 $= 2 - i + 2i - i^2 = 2 + i + 1 = 3 + i$, 故选 D.

3. A

4. B 【解析】 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

5. C 【解析】由 $T_{r+1} = C_5^r (x^2)^{5-r} \left(\frac{2}{x}\right)^r = C_5^r x^{10-2r} 2^r x^{-r} = C_5^r 2^r x^{10-3r}$, 令 $10-3r=4$, 则 $r=2$ 所以 $C_5^r 2^r = C_5^2 2^2 = 40$

6. A 【解析】① 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴, y 轴分别交于 A, B 两点. $\therefore A(-2, 0), B(0, -2)$,

$\therefore |AB| = 2\sqrt{2}$, ② 点 P 在圆 $(x-2)^2 + y^2 = 2$ 上, $\therefore$ 圆心为 $(2, 0)$, 设圆心到直线的距离为

d_1 , 则 $d_1 = \frac{|2+0+2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, 故点 P 到直线 $x+y+2=0$ 的距离 d_2 的范围是 $[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$,

则 $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}|AB|d_2 \in [2, 6]$.

7. D 【解析】当 $x=0$ 时, $y=2$, 排出 A, B; $y' = -4x^3 + 2x = -2x(2x^2 - 1)$, $x=0.1$ 时, $y' > 0$, 故选 D.

8. B 【解析】① $DX = np(1-p)$, $p=0.4$ 或者 $p=0.6$,

$P(X=4) = C_{10}^4 p^4 (1-p)^6 = C_{10}^6 p^6 (1-p)^4$, 可知 $p > 0.5$, 故选 B.

9. C 【解析】由三角形面积公式知: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4}$, 由余弦定理得:

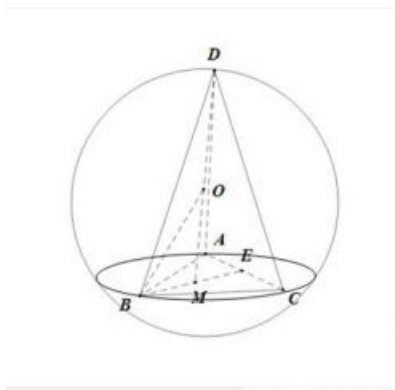
$a^2+b^2-c^2 = 2ab\cos C$, $\therefore \sin C = \cos C$, $\therefore C = \frac{\pi}{4}$.

10. B 【解析】如图所示, 点 M 为 $\triangle ABC$ 的重心, E 为 AC 中点, 当 $DM \perp$ 平面 ABC 时, 三棱锥

D-ABC 体积最大 (O 是球心), 此时 $OD=OB=R=4$, ① $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = 9\sqrt{3}$, $\therefore AB=6$,

$\therefore BM = \frac{2}{3}BE = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, $\therefore$ Rt $\triangle ABC$ 中, 有 $OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} = 2$,

$\therefore DM = OD + OM = 4 + 2 = 6$, $\therefore (V_{D-ABC})_{\max} = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times 6 = 18\sqrt{3}$, 故选 B 选项.



11. C 【解析】 $\Theta |PF_2| = b, |OF_2| = b; \therefore |PO| = a$, 在 $\text{Rt}\triangle POF_2$ 中, $\cos \theta = \frac{|PF_2|}{|OF_2|} = \frac{b}{c}$;

$$\textcircled{4} \text{ 在 Rt}\triangle PF_1F_2 \text{ 中, } \cos \theta = \frac{|PF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - |PF_1|^2}{2|PF_2||F_1F_2|} = \frac{b}{c}$$

$$\therefore \frac{b^2 + 4c^2 - (\sqrt{6}a)}{2b2c} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 + 4c^2 - 6a^2 = 4b^2 \Rightarrow 4c^2 - 6a^2 = 3c^2 - 3a^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 3a^2 \Rightarrow e = \sqrt{3}.$$

12. B 【解析】 $\ominus a = \log_{0.2} 0.3, b = \log_2 0.3 \therefore \frac{1}{a} = \log_{0.3} 0.2, \frac{1}{b} = \log_{0.3} 2$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_{0.3} 0.4 \therefore 0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1 \text{ 即 } 0 < \frac{a+b}{ab} < 1 \text{ 又 } \ominus a > 0, b < 0 \therefore ab < 0$$

即 $ab < a + b < 0$ ，故选 B.

二、填空题

13. $\frac{1}{2}$ 【解析】 $2\vec{a} + \vec{b} = 2(1, 2) + (2, -2) = (4, 2)$, 又 $\vec{OC} \parallel (2\vec{a} + \vec{b})$, 故有 $4 \times \lambda - 2 \times 1 = 0$,

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2}.$$

14. $a = -3$ 【解析】 $y' = ae^x + (ax+1)e^x$, 则 $f'(0) = a+1 = -2$, 所以 $a = -3$.

15.3 个【解析】 $\Theta 0 \leq x \leq \pi, \therefore 0 \leq 3x \leq 3\pi, \frac{\pi}{6} \leq 3x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{19\pi}{6}$ 由图可知 $3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$$\text{得 } x = \frac{\pi}{9}, 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \text{ 得 } x = \frac{4\pi}{9}, 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{2} \text{ 得 } x = \frac{7\pi}{9}.$$

16. $k=2$ 【解析】 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\begin{cases} y_1^2 = 4x_1 \\ y_2^2 = 4x_2 \end{cases}$, $\therefore y_1^2 - y_2^2 = 4(x_1 - x_2)$,

$$\therefore k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4}{y_1 + y_2}, \quad \Theta \angle AMB = 90^\circ, \quad \text{取 AB 中点 } M'(x_0, y_0), \quad \text{分别过点 A, B 作准线}$$

$x = -1$ 的垂线，垂足为 A', B' $\therefore |MM'| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}(|AF| + |BF|) = \frac{1}{2}(|AA'| + |BB'|)$ ，又 M' 为 AB 中点，则 MM' 平行于 x 轴， $y_0 = 1$ ， $\therefore y_1 + y_2 = 2 \therefore k = 2$ 。

三、解答题

(一) 必考题

17. (1) $a_n = 2^{n-1}$ 或 $a_n = (-2)^{n-1}$; (2) $m = 6$

【解析】(1) $\Theta a_1 = 1, a_5 = 4a_3 \therefore q^4 = 4q^2, q^2(q^2 - 4) = 0 \therefore q = \pm 2$

$\therefore a_n = 2^{n-1}$ 或 $a_n = (-2)^{n-1}$

(2) 1. 当 $q = 2$ 时， $S_m = \frac{1(1-2^m)}{1-2} = 63 \therefore 2^m = 64, \therefore m = 6$

2. 当 $q = -2$ 时， $S_m = \frac{1[1-(-2)^m]}{1-(-2)} = 63 \therefore (-2)^m = -188, \therefore m$ 无解

综上所述： $m = 6$

18. (1) 第二种生产方式的效率更高；

(2) $m = 80$

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式	15	5
第二种生产方式	5	15

(3) 有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异。

【解析】(1) 第二种生产方式的效率更高，因为第二组多数数据集中在 70min-80min 之间，第一组数据集中在 80min-90min 之间，所以第一组完成任务的平均时间大于第二组，

$$E_1 = \frac{\sum_{i=1}^{20} t_i}{20} = 84, E_2 = \frac{\sum_{i=1}^{20} t_i}{20} = 74.7 \therefore E_1 > \bar{t}_i, \text{ 则第二种生产方式的效率更高.}$$

(2) 中位数 $m = \frac{79+81}{2} = 80$

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式	15	5
第二种生产方式	5	15

$$(3) K^2 = \frac{40 \times (225 - 25)^2}{20 \times 20 \times 20 \times 20} = 10 > 6.635$$

$\therefore$ 有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异。

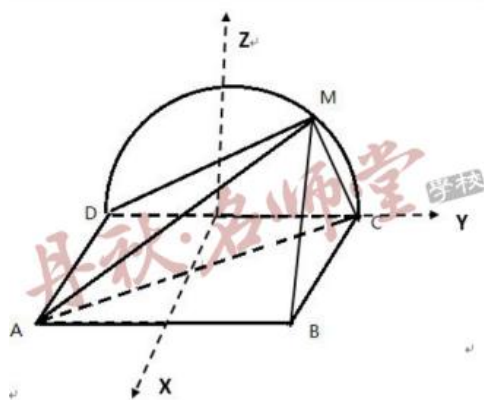
19. 【解析】

(1) Θ 正方形 $ABCD \perp$ 半圆面 CMD $\therefore AD \perp$ 半圆面 CMD , $\therefore AD \perp$ 平面 MCD

Θ CM 在平面 MCD 上, $\therefore AD \perp CM$, 又 Θ 半圆 CD , $\therefore CM \perp MD$ $\therefore CM \perp$ 平面 ADM ,

Θ CM 在平面 BCM 上, $\therefore$ 平面 $BCM \perp$ 平面 ADM

(2) 如图建立坐标系:



$\Theta S_{\triangle ABC}$ 面积恒定, $\therefore MO \perp CD$, V_{M-ABC} 最大 $MAB-MCD$ $M(0, 0, 1); A(2, -1, 0); B(2, 1, 0);$

$C(0, 1, 0); D(0, -1, 0)$ 设面 MAB 的法向量为 $\vec{m}(x_1, y_1, z_1)$, 设面 MCD 的法向量为 $\vec{n}(x_2, y_2, z_2)$

$\vec{MA} = (2, -1, -1), \vec{MB} = (2, 1, -1), \vec{MC} = (0, 1, -1), \vec{MD} = (0, -1, -1)$

$$\begin{cases} 2x_1 - y_1 - z_1 = 0 \\ 2x_1 + y_1 - z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{m} = (1, 0, 2) \text{ 同理 } \vec{n} = (1, 0, 0) \therefore \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \therefore \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

20. 【解析】(1) 法一: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 则 $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1$ ① 由①②得,

$$\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1 \quad ②$$

$$\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{4} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{3} = 0 \text{ 则 } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{3}{4} \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$$

其中 $x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 2m$ $\therefore k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{3}{4m}$ 又 Θ 点 $M(1, m)$ 为椭圆内的点, 且 $m > 0$

当 $x=1$ 时, 椭圆上的点的纵坐标 $y = \pm \frac{3}{2}$ $\therefore m \in (0, \frac{3}{2})$ $\therefore k = -\frac{3}{4m} \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ $\therefore k < -\frac{1}{2}$.

法二: 设直线 l 方程为 $y = kx + t$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ $\begin{cases} y = kx + t \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 联立消 y

$$\text{得 } (4k^2 + 3)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 12 = 0 \text{ 则 } \Delta = 64k^2t^2 - 4(4t^2 - 12)(3 + 4k^2) > 0$$

$$\text{得 } 4k^2 + 3 > t^2 \cdots \textcircled{1} \text{ 且 } x_1 + x_2 = \frac{-8kt}{3+4k^2} = 2, \quad y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2t = \frac{6t}{3+4k^2} = 2m$$

$$\Theta m > 0 \therefore t < 0 \text{ 且 } k < 0 \text{ 且 } t = \frac{3+4k^2}{-4k} \cdots \textcircled{2} \text{ 由 } \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 得 } (4k^2 + 3) > \frac{(3+4k^2)^2}{16k^2}$$

$$\therefore k > \frac{1}{2} \text{ 或 } k < -\frac{1}{2} \quad \Theta k < 0 \therefore k < -\frac{1}{2}$$

$$(2) \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} = \vec{0} \quad \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{FM} = \vec{0}$$

$$\Theta M(1, m) \therefore P \text{ 的坐标为 } (1, -2m) \text{ 由于 } P \text{ 在椭圆上 } \therefore \frac{1}{4} + \frac{4m^2}{3} = 1 \therefore m = \frac{3}{4}$$

$$\therefore k = \frac{3}{-4m} = -1 \text{ 直线 } l \text{ 方程为 } y - \frac{3}{4} = -(x-1) \text{ 即 } y = -x + \frac{7}{4}$$

$$\therefore \begin{cases} y = -x + \frac{7}{4} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \quad 28x^2 - 56x + 1 = 0, \quad x_1 + x_2 = 2, \quad x_1 x_2 = \frac{1}{28}$$

$$\therefore |\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| = 2|\overrightarrow{FP}| \quad \therefore |\overrightarrow{FA}|, |\overrightarrow{FP}|, |\overrightarrow{FB}| \text{ 为等差数列.}$$

$$2d = |\overrightarrow{FA}| - |\overrightarrow{FB}| = \left| a - \frac{c}{a}x_1 - a + \frac{c}{a}x_1 \right| = \pm \frac{c}{a}|x_1 - x_2| = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 - \frac{1}{7}} = \pm \frac{3\sqrt{21}}{28}$$

$$21. (1) \text{见解析}; (2) a = -\frac{1}{6}$$

$$\text{【解析】}(1) f'(x) = \ln(1+x) + \frac{2+x}{x+1} - 2 = \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} - 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

令 $f''(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \therefore x \geq 0$ 时 $f'(x)$ 递增, $-1 \leq x < 0$ 时, $f'(x)$ 递减. 又当 $x=0$ 时,

$f'(x)=0, \therefore f'(x) \geq 0$ 恒成立, 又 $f(x)=0$, 所以得证: 当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $f(x) < 0$,

当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$;

$$(2) f'(x) = (2ax+1)\ln(x+1) + \frac{1+ax^2}{x+1} - 1,$$

$$f''(x) = 2a\ln(x+1) + \frac{2ax+1}{x+1} + \frac{2ax(x+1)-ax^2}{(x+1)^2} \leq 0$$

$$2a(x+1)^2 \ln(x+1) + (2ax+1)(x+1) + ax^2 + 2ax - 1 \leq 0$$

$$2a(x+1)^2 \ln(x+1) + 3ax^2 + 4ax + x \leq 0$$

$$a(2x(x+1)^2 \ln(x+1) + 3x^2 + 4x) \leq -x$$

$$\text{设 } h(x) = 2(x+1)^2 \ln(1+x) + 3x^2 + 4x \quad \therefore h'(x) = 4(x+1)\ln(1+x) + 2(x+1) + 6x + 4;$$

$$h'(0) = 0; \therefore \text{在 } x=0 \text{ 领域内, } x>0 \text{ 时, } h(x)>0. \quad x<0 \text{ 时, } h(x)<0.$$

$$x>0 \text{ 时, } a \leq \frac{-x}{2(x+1)^2 \ln(1+x) + 3x^2 + 4x} \text{ 由洛必达法则得 } a \leq -\frac{1}{6},$$

$$x<0 \text{ 时, } a \geq \frac{-x}{2(x+1)^2 \ln(1+x) + 3x^2 + 4x} \text{ 由洛必达法则得 } a \geq -\frac{1}{6}.$$

$$\text{综上所述: } a = -\frac{1}{6}$$

(二) 选考题

22. [选修4—4: 坐标系与参数方程]

$$(1) \alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right); (2) \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2} \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{1 + \tan^2 \alpha} \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数, } \alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right))$$

$$\text{【解析】(1) 解: 设直线 } l \text{ 为 } y = kx - \sqrt{2}. \text{ 由题意得直线 } l \text{ 与圆相交时 } d = \frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{1+k^2}} < 1$$

$$\therefore k \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \text{ 又 } \Theta k = \tan \alpha \quad \therefore \alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right).$$

$$(2) \text{ 设 A、B 两点坐标分别为 } (x_1, y_1), (x_2, y_2), \text{ P 点坐标为 } (x_0, y_0)$$

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = \tan \alpha x - \sqrt{2} \end{cases}, \text{ 化解得: } (1 + \tan^2 \alpha)x^2 - 2\sqrt{2} \tan \alpha x + 2 = 0, \text{ 由韦达定理得:}$$

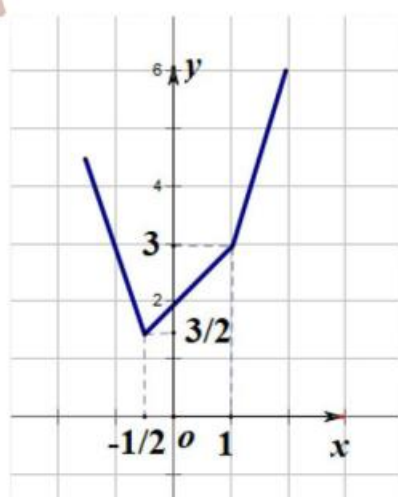
$$x_1 + x_2 = \frac{2\sqrt{2} \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \therefore y_1 + y_2 = \frac{2\sqrt{2}}{1 + \tan^2 \alpha},$$

$$\therefore x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\sqrt{2} \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\therefore \text{点 P 的轨迹的参数方程为} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2} \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{1 + \tan^2 \alpha} \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数, } \alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}))$$

23. (1) 见解析 (2) 5

$$\text{【解析】(1) } f(x) = \begin{cases} -3x, & x < -\frac{1}{2} \\ x+2, & -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 3x, & x > 1 \end{cases} \text{ 如下图}$$



(2) 由(1)可得: $a \geq 3, b \geq 2$, 当 $a = 3, b = 2$ 时, $a + b$ 取最小值,

$\therefore a + b$ 的最小值为 5.