

2018 年江苏高考数学试卷及答案

数学 I 试题

参考公式：

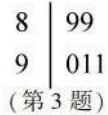
锥体的体积 $V = \frac{1}{3}Sh$ ，其中 S 是锥体的底面积， h 是锥体的高.

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分. 请把答案填写在答题卡相应位置上.

1. 已知集合 $A = \{0, 1, 2, 8\}$, $B = \{-1, 1, 6, 8\}$, 那么 $A \cap B = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

2. 若复数 z 满足 $i \cdot z = 1 + 2i$, 其中 i 是虚数单位, 则 z 的实部为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

3. 已知 5 位裁判给某运动员打出的分数的茎叶图如图所示, 那么这 5 位裁判打出的分数的平均数为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.



(第 3 题)

4. 一个算法的伪代码如图所示, 执行此算法, 最后输出的 S 的值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

```

I ← 1
S ← 1
While I < 6
    I ← I + 2
    S ← 2S
End While
Print S
    
```

(第 4 题)

5. 函数 $f(x) = \sqrt{\log_2 x - 1}$ 的定义域为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

6. 某兴趣小组有 2 名男生和 3 名女生, 现从中任选 2 名学生去参加活动, 则恰好选中 2 名女生的概率为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

7. 已知函数 $y = \sin(2x + \varphi)$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称, 则 φ 的值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

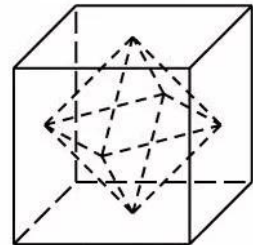
8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的

右焦点 $F(c, 0)$ 到一条渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$, 则其离心率的值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

9. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4) = f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$), 且在区间 $(-2, 2]$ 上, $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ |x + \frac{1}{2}|, & -2 < x \leq 0, \end{cases}$

则 $f(f(15))$ 的值为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

10. 如图所示, 正方体的棱长为 2, 以其所有面的中心为顶点的多面体的体积为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.



(第 10 题)

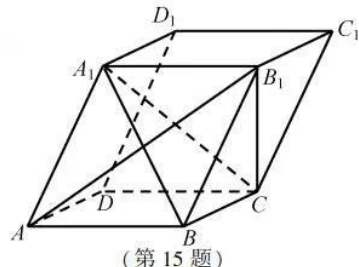
11. 若函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 1$ ($a \in \mathbf{R}$) 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点, 则 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值与最小值的和为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, A 为直线 $l: y = 2x$ 上在第一象限内的点, $B(5, 0)$, 以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 交于另一点 D .

若 $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$, 则点 A 的横坐标为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

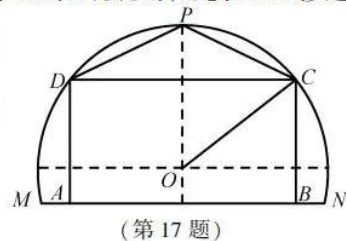
13. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle ABC$ 的平分线交 AC 于点 D , 且 $BD = 1$, 则 $4a + c$ 的最小值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.
14. 已知集合 $A = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbf{N}^*\}$, $B = \{x | x = 2^n, n \in \mathbf{N}^*\}$. 将 $A \cup B$ 的所有元素从小到大依次排列构成一个数列 $\{a_n\}$. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则使得 $S_n > 12a_{n+1}$ 成立的 n 的最小值为 $\underline{\hspace{1cm}}$.
- 二、解答题: 本大题共6小题, 共计90分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分14分)
在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = AB$, $AB_1 \perp B_1C_1$.
求证: (1) $AB \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$;
(2) 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.



16. (本小题满分14分)
已知 α, β 为锐角, $\tan \alpha = \frac{4}{3}$, $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.
(1) 求 $\cos 2\alpha$ 的值;
(2) 求 $\tan(\alpha - \beta)$ 的值.

17. (本小题满分14分)
某农场有一块农田, 如图所示, 它的边界由圆 O 的一段圆弧 MPN (P 为此圆弧的中点) 和线段 MN 构成. 已知圆 O 的半径为40米, 点 P 到 MN 的距离为50米. 现规划在此农田上修建两个温室大棚, 大棚I内的地块形状为矩形 $ABCD$, 大棚II内的地块形状为 $\triangle CDP$, 要求 A, B 均在线段 MN 上, C, D 均在圆弧上. 设 OC 与 MN 所成的角为 θ .

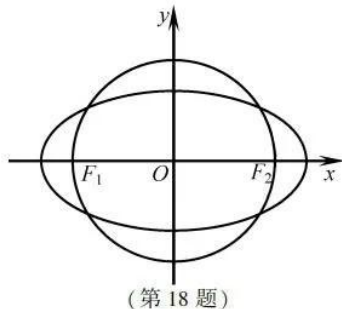


- (1) 用 θ 分别表示矩形 $ABCD$ 和 $\triangle CDP$ 的面积, 并确定 $\sin \theta$ 的取值范围;
(2) 若大棚I内种植甲种蔬菜, 大棚II内种植乙种蔬菜, 且甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为4:3. 求当 θ 为何值时, 能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大.
18. (本小题满分16分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 C 过点 $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$,

焦点为 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$, 圆 O 的直径为 F_1F_2 .

- (1) 求椭圆 C 及圆 O 的方程;
(2) 设直线 l 与圆 O 相切于第一象限内的点 P .
① 若直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点, 求点 P 的坐标;
② 直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{6}}{7}$, 求直线 l 的方程.



19. (本小题满分16分)
记 $f'(x)$, $g'(x)$ 分别为函数 $f(x)$, $g(x)$ 的导函数. 若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, 满足 $f(x_0) = g(x_0)$ 且 $f'(x_0) = g'(x_0)$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个“S点”.
(1) 证明: 函数 $f(x) = x$ 与 $g(x) = x^2 + 2x - 2$ 不存在“S点”;
(2) 若函数 $f(x) = ax^2 - 1$ 与 $g(x) = \ln x$ 存在“S点”, 求实数 a 的值;
(3) 已知函数 $f(x) = -x^2 + a$, $g(x) = \frac{be^x}{x}$. 对任意 $a > 0$, 判断是否存在 $b > 0$, 使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内存在“S点”, 并说明理由.

20. (本小题满分16分)
设 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是首项为 b_1 , 公比为 q 的等比数列.
(1) 设 $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, $q = 2$, 若 $|a_n - b_n| \leq b_1$ 对 $n = 1, 2, 3, 4$ 均成立, 求 d 的取值范围;
(2) 若 $a_1 = b_1 > 0$, $m \in \mathbf{N}^*$, $q \in (1, \sqrt[m]{2}]$, 证明: 存在 $d \in \mathbf{R}$, 使得 $|a_n - b_n| \leq b_1$ 对 $n = 2, 3, \dots, m+1$ 均成立, 并求 d 的取值范围(用 b_1, m, q 表示).

数学 I 试题参考答案

一、填空题：本题考查基础知识、基本运算和基本思想方法。每小题 5 分，共计 70 分。

- | | | | |
|-------------------------|-------------------|---------------------|-------|
| 1. $\{1, 8\}$ | 2. 2 | 3. 90 | 4. 8 |
| 5. $[2, +\infty)$ | 6. $\frac{3}{10}$ | 7. $-\frac{\pi}{6}$ | 8. 2 |
| 9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 10. $\frac{4}{3}$ | 11. -3 | 12. 3 |
| 13. 9 | 14. 27 | | |

二、解答题

15. 本小题主要考查直线与直线、直线与平面以及平面与平面的位置关系，考查空间想象能力和推理论证能力。满分 14 分。

证明：(1) 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB \parallel A_1B_1$ 。

因为 $AB \not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$ ， $A_1B_1 \subset$ 平面 $A_1B_1C_1$ ，

所以 $AB \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$ 。

(2) 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 ABB_1A_1 为平行四边形。

又因为 $AA_1 = AB$ ，所以四边形 ABB_1A_1 为菱形，

因此 $AB_1 \perp A_1B$ 。

又因为 $AB_1 \perp B_1C_1$ ， $BC \parallel B_1C_1$ ，

所以 $AB_1 \perp BC$ 。

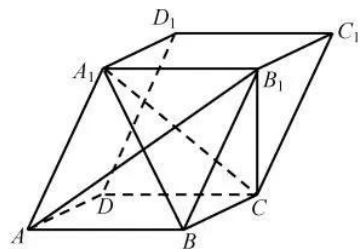
又因为 $A_1B \cap BC = B$ ， $A_1B \subset$ 平面 A_1BC ， BC

\subset 平面 A_1BC ，

所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BC 。

因为 $AB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 ，

所以平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 A_1BC 。



(第 15 题)

16. 本小题主要考查同角三角函数关系、两角和 (差) 及二倍角的三角函数，考查运算求解能力。满分 14 分。

解：(1) 因为 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ， $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ，所以 $\sin \alpha = \frac{4}{3} \cos \alpha$ 。

因为 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ，所以 $\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$ ，

因此， $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{7}{25}$ 。

(2) 因为 α, β 为锐角，所以 $\alpha + \beta \in (0, \pi)$ 。

又因为 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，所以 $\sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

因此 $\tan(\alpha + \beta) = -2$ 。

因为 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ，所以 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\frac{24}{7}$ ，

因此， $\tan(\alpha - \beta) = \tan[2\alpha - (\alpha + \beta)] = \frac{\tan 2\alpha - \tan(\alpha + \beta)}{1 + \tan 2\alpha \tan(\alpha + \beta)} = -\frac{2}{11}$ 。

17. 本小题主要考查三角函数的应用、用导数求最值等基础知识，考查直观想象和数学建模及运用数学知识分析和解决实际问题的能力。满分 14 分。

解：(1) 连结 PO 并延长交 MN 于 H ，则 $PH \perp MN$ ，所以 $OH = 10$ 。

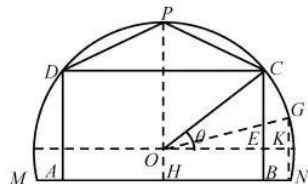
过 O 作 $OE \perp BC$ 于 E ，则 $OE \parallel MN$ ，所以 $\angle COE = \theta$ ，

故 $OE = 40\cos \theta$ ， $EC = 40\sin \theta$ ，

则矩形 $ABCD$ 的面积为 $2 \times 40\cos \theta(40\sin \theta + 10)$
 $= 800(4\sin \theta \cos \theta + \cos \theta)$ ，

$\triangle CDP$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 2 \times 40\cos \theta(40 - 40\sin \theta)$

$= 1600(\cos \theta - \sin \theta \cos \theta)$ 。



(第 17 题)

过 N 作 $GN \perp MN$, 分别交圆弧和 OE 的延长线于 G 和 K , 则 $GK = KN = 10$.
 令 $\angle GOK = \theta_0$, 则 $\sin \theta_0 = \frac{1}{4}$, $\theta_0 \in (0, \frac{\pi}{6})$.

当 $\theta \in [\theta_0, \frac{\pi}{2})$ 时, 才能作出满足条件的矩形 $ABCD$,

所以 $\sin \theta$ 的取值范围是 $[\frac{1}{4}, 1)$.

答: 矩形 $ABCD$ 的面积为 $800(4\sin \theta \cos \theta + \cos \theta)$ 平方米, $\triangle CDP$ 的面积为 $1600(\cos \theta - \sin \theta \cos \theta)$ 平方米, $\sin \theta$ 的取值范围是 $[\frac{1}{4}, 1)$.

(2) 因为甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为 $4:3$,
 设甲的单位面积的年产值为 $4k$, 乙的单位面积的年产值为 $3k(k > 0)$,
 则年总产值为 $4k \times 800(4\sin \theta \cos \theta + \cos \theta) + 3k \times 1600(\cos \theta - \sin \theta \cos \theta)$
 $= 8000k(\sin \theta \cos \theta + \cos \theta)$, $\theta \in [\theta_0, \frac{\pi}{2})$.

设 $f(\theta) = \sin \theta \cos \theta + \cos \theta$, $\theta \in [\theta_0, \frac{\pi}{2})$,

则 $f'(\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta = -(2\sin^2 \theta + \sin \theta - 1) = -(2\sin \theta - 1)(\sin \theta + 1)$.

令 $f'(\theta) = 0$, 得 $\theta = \frac{\pi}{6}$,

当 $\theta \in (\theta_0, \frac{\pi}{6})$ 时, $f'(\theta) > 0$, 所以 $f(\theta)$ 为增函数;

当 $\theta \in (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 时, $f'(\theta) < 0$, 所以 $f(\theta)$ 为减函数,

因此, 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, $f(\theta)$ 取到最大值.

答: 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, 能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大.

18. 本小题主要考查直线方程、圆的方程、圆的几何性质、椭圆方程、椭圆的几何性质、直线与圆及椭圆的位置关系等知识, 考查分析问题能力和运算求解能力. 满分 16 分.

解: (1) 因为椭圆 C 的焦点为 $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$,

可设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$. 又点 $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ 在椭圆 C 上,

所以 $\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1, \\ a^2 - b^2 = 3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 1. \end{cases}$

因此, 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

因为圆 O 的直径为 F_1F_2 , 所以其方程为 $x^2 + y^2 = 3$.

(2) ① 设直线 l 与圆 O 相切于 $P(x_0, y_0) (x_0 > 0, y_0 > 0)$, 则 $x_0^2 + y_0^2 = 3$,

所以直线 l 的方程为 $y = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0) + y_0$, 即 $y = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{3}{y_0}$.

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = -\frac{x_0}{y_0}x + \frac{3}{y_0}, \end{cases}$ 消去 y , 得

$(4x_0^2 + y_0^2)x^2 - 24x_0x + 36 - 4y_0^2 = 0$. (*)

因为直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点,

所以 $\Delta = (-24x_0)^2 - 4(4x_0^2 + y_0^2)(36 - 4y_0^2) = 48y_0^2(x_0^2 - 2) = 0$.

因为 $x_0, y_0 > 0$, 所以 $x_0 = \sqrt{2}$, $y_0 = 1$.

因此, 点 P 的坐标为 $(\sqrt{2}, 1)$.

②因为三角形 OAB 的面积为 $\frac{2\sqrt{6}}{7}$, 所以 $\frac{1}{2}AB \cdot OP = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, 从而 $AB = \frac{4\sqrt{2}}{7}$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

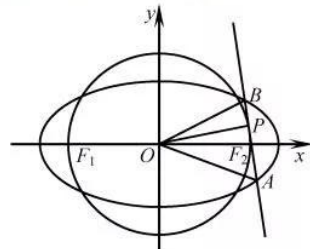
$$\text{由 (*) 得 } x_{1,2} = \frac{24x_0 \pm \sqrt{48y_0^2(x_0^2 - 2)}}{2(4x_0^2 + y_0^2)},$$

$$\text{所以 } AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ = \left(1 + \frac{x_0^2}{y_0^2}\right) \cdot \frac{48y_0^2(x_0^2 - 2)}{(4x_0^2 + y_0^2)^2}.$$

因为 $x_0^2 + y_0^2 = 3$,

$$\text{所以 } AB^2 = \frac{16(x_0^2 - 2)}{(x_0^2 + 1)^2} = \frac{32}{49}, \text{ 即 } 2x_0^4 - 45x_0^2 + 100 = 0, \quad (\text{第 18 题})$$

$$\text{解得 } x_0^2 = \frac{5}{2} (x_0^2 = 20 \text{ 舍去}), \text{ 则 } y_0^2 = \frac{1}{2}, \text{ 因此 } P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$



综上, 直线 l 的方程为 $y = -\sqrt{5}x + 3\sqrt{2}$.

19. 本小题主要考查利用导数研究初等函数的性质, 考查综合运用数学思想方法分析与解决问题以及逻辑推理能力. 满分 16 分.

解: (1) 函数 $f(x) = x, g(x) = x^2 + 2x - 2$, 则 $f'(x) = 1, g'(x) = 2x + 2$.

由 $f(x) = g(x)$ 且 $f'(x) = g'(x)$, 得

$$\begin{cases} x = x^2 + 2x - 2, \\ 1 = 2x + 2, \end{cases} \text{ 此方程组无解,}$$

因此, $f(x)$ 与 $g(x)$ 不存在“S点”.

(2) 函数 $f(x) = ax^2 - 1, g(x) = \ln x$,

$$\text{则 } f'(x) = 2ax, g'(x) = \frac{1}{x}.$$

设 x_0 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的“S点”, 由 $f(x_0) = g(x_0)$ 且 $f'(x_0) = g'(x_0)$, 得

$$\begin{cases} ax_0^2 - 1 = \ln x_0, \\ 2ax_0 = \frac{1}{x_0}, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} ax_0^2 - 1 = \ln x_0, \\ 2ax_0^2 = 1, \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{得 } \ln x_0 = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } x_0 = e^{-\frac{1}{2}}, \text{ 则 } a = \frac{1}{2(e^{-\frac{1}{2}})^2} = \frac{e}{2}.$$

当 $a = \frac{e}{2}$ 时, $x_0 = e^{-\frac{1}{2}}$ 满足方程组 (*), 即 x_0 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的“S点”.

因此, a 的值为 $\frac{e}{2}$.

(3) 对任意 $a > 0$, 设 $h(x) = x^3 - 3x^2 - ax + a$.

因为 $h(0) = a > 0, h(1) = 1 - 3 - a + a = -2 < 0$, 且 $h(x)$ 的图象是不间断的,

所以存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $h(x_0) = 0$. 令 $b = \frac{2x_0^3}{e^{x_0}(1-x_0)}$, 则 $b > 0$.

$$\text{函数 } f(x) = -x^2 + a, g(x) = \frac{be^x}{x},$$

$$\text{则 } f'(x) = -2x, g'(x) = \frac{be^x(x-1)}{x^2}.$$

由 $f(x) = g(x)$ 且 $f'(x) = g'(x)$, 得

$$\begin{cases} -x^2 + a = \frac{be^x}{x}, \\ -2x = \frac{be^x(x-1)}{x^2}, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -x^2 + a = \frac{2x_0^3}{e^{x_0}(1-x_0)} \cdot \frac{e^x}{x}, \\ -2x = \frac{2x_0^3}{e^{x_0}(1-x_0)} \cdot \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \end{cases} \quad (**)$$

此时, x_0 满足方程组 (**), 即 x_0 是函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内的一个“S点”.

因此, 对任意 $a > 0$, 存在 $b > 0$, 使函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内存在“S点”.

20. 本小题主要考查等差和等比数列的定义、通项公式、性质等基础知识, 考查代数推理、转化与化归及综合运用数学知识探究与解决问题的能力. 满分 16 分.

解: (1) 由条件知: $a_n = (n-1)d$, $b_n = 2^{n-1}$.

因为 $|a_n - b_n| \leq b_1$ 对 $n = 1, 2, 3, 4$ 均成立,

即 $|(n-1)d - 2^{n-1}| \leq 1$ 对 $n = 1, 2, 3, 4$ 均成立,

即 $1 \leq 1, 1 \leq d \leq 3, 3 \leq 2d \leq 5, 7 \leq 3d \leq 9$, 得 $\frac{7}{3} \leq d \leq \frac{5}{2}$.

因此, d 的取值范围为 $[\frac{7}{3}, \frac{5}{2}]$.

(2) 由条件知: $a_n = b_1 + (n-1)d$, $b_n = b_1 q^{n-1}$.

若存在 d , 使得 $|a_n - b_n| \leq b_1$ ($n = 2, 3, \dots, m+1$) 成立,

即 $|b_1 + (n-1)d - b_1 q^{n-1}| \leq b_1$ ($n = 2, 3, \dots, m+1$),

即当 $n = 2, 3, \dots, m+1$ 时, d 满足 $\frac{q^{n-1}-2}{n-1} b_1 \leq d \leq \frac{q^{n-1}}{n-1} b_1$.

因为 $q \in (1, \sqrt[m]{2}]$, 则 $1 < q^{n-1} \leq q^m \leq 2$,

从而 $\frac{q^{n-1}-2}{n-1} b_1 \leq 0$, $\frac{q^{n-1}}{n-1} b_1 > 0$, 对 $n = 2, 3, \dots, m+1$ 均成立.

因此, 取 $d = 0$ 时, $|a_n - b_n| \leq b_1$ 对 $n = 2, 3, \dots, m+1$ 均成立.

下面讨论数列 $\{\frac{q^{n-1}-2}{n-1}\}$ 的最大值和数列 $\{\frac{q^{n-1}}{n-1}\}$ 的最小值 ($n = 2, 3, \dots, m+1$).

① 当 $2 \leq n \leq m$ 时, $\frac{q^n-2}{n} - \frac{q^{n-1}-2}{n-1} = \frac{nq^n - q^n - nq^{n-1} + 2}{n(n-1)} = \frac{n(q^n - q^{n-1}) - q^n + 2}{n(n-1)}$,

当 $1 < q \leq 2^{\frac{1}{m}}$ 时, 有 $q^n \leq q^m \leq 2$, 从而 $n(q^n - q^{n-1}) - q^n + 2 > 0$.

因此, 当 $2 \leq n \leq m+1$ 时, 数列 $\{\frac{q^{n-1}-2}{n-1}\}$ 单调递增,

故数列 $\{\frac{q^{n-1}-2}{n-1}\}$ 的最大值为 $\frac{q^m-2}{m}$.

② 设 $f(x) = 2^x(1-x)$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = (\ln 2 - 1 - x \ln 2)2^x < 0$, 所以 $f(x)$ 单调递减, 从而 $f(x) < f(0) = 1$.

当 $2 \leq n \leq m$ 时, $\frac{\frac{q^n}{n}}{\frac{q^{n-1}}{n-1}} = \frac{q(n-1)}{n} \leq 2^{\frac{1}{n}}(1 - \frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n}) < 1$,

因此, 当 $2 \leq n \leq m+1$ 时, 数列 $\{\frac{q^{n-1}}{n-1}\}$ 单调递减,

故数列 $\{\frac{q^{n-1}}{n-1}\}$ 的最小值为 $\frac{q^m}{m}$.

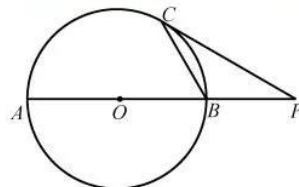
因此, d 的取值范围为 $[\frac{b_1(q^m-2)}{m}, \frac{b_1 q^m}{m}]$.

数学 II (附加题)

21. 【选做题】本题包括 A、B、C、D 四小题, 请选定其中两小题, 并在相应的答题区域内作答. 若多做, 则按作答的前两小题评分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

A. [选修 4-1: 几何证明选讲] (本小题满分 10 分)

如图, 圆 O 的半径为 2, AB 为圆 O 的直径, P 为 AB 延长线上一点, 过 P 作圆 O 的切线, 切点为 C . 若 $PC = 2\sqrt{3}$, 求 BC 的长.



(第 21-A 题)

B. [选修4-2:矩阵与变换] (本小题满分10分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(1) 求 A 的逆矩阵 A^{-1} ;

(2) 若点 P 在矩阵 A 对应的变换作用下得到点 $P'(3, 1)$, 求点 P 的坐标.

C. [选修4-4:坐标系与参数方程] (本小题满分10分)

在极坐标系中, 直线 l 的方程为 $\rho \sin(\frac{\pi}{6} - \theta) = 2$, 曲线 C 的方程为 $\rho = 4 \cos \theta$, 求直线 l 被曲线 C 截得的弦长.

D. [选修4-5:不等式选讲] (本小题满分10分)

若 x, y, z 为实数, 且 $x + 2y + 2z = 6$, 求 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值.

【必做题】第22题、第23题, 每题10分, 共计20分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

22. (本小题满分10分)

如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = AA_1 = 2$, 点 P, Q 分别为 A_1B_1, BC 的中点.

(1) 求异面直线 BP 与 AC_1 所成角的余弦值;

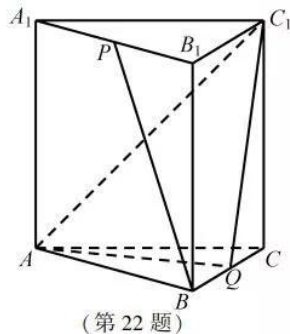
(2) 求直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角的正弦值.

23. (本小题满分10分)

设 $n \in \mathbf{N}^+$, 对 $1, 2, \dots, n$ 的一个排列 $i_1 i_2 \dots i_n$, 如果当 $s < t$ 时, 有 $i_s > i_t$, 则称 (i_s, i_t) 是排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 的一个逆序, 排列 $i_1 i_2 \dots i_n$ 的所有逆序的总个数称为其逆序数. 例如: 对 $1, 2, 3$ 的一个排列 231 , 只有两个逆序 $(2, 1), (3, 1)$, 则排列 231 的逆序数为 2 . 记 $f_n(k)$ 为 $1, 2, \dots, n$ 的所有排列中逆序数为 k 的全部排列的个数.

(1) 求 $f_3(2), f_4(2)$ 的值;

(2) 求 $f_n(2) (n \geq 5)$ 的表达式 (用 n 表示).



(第22题)

数学 II (附加题) 参考答案

21. 【选做题】

A. [选修4-1:几何证明选讲]

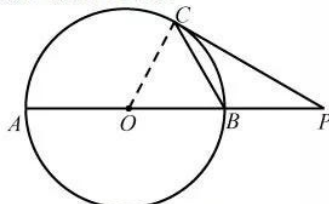
本小题主要考查圆与三角形等基础知识, 考查推理论证能力. 满分10分.

证明: 连结 OC . 因为 PC 与圆 O 相切, 所以 $OC \perp PC$.

又因为 $PC = 2\sqrt{3}, OC = 2$,

所以 $OP = \sqrt{PC^2 + OC^2} = 4$.

又因为 $OB = 2$, 从而 B 为 $\text{Rt}\triangle OCP$ 斜边的中点, 所以 $BC = 2$.



(第21-A题)

B. [选修4-2:矩阵与变换]

本小题主要考查矩阵的运算、线性变换等基础知识, 考查运算求解能力. 满分10分.

解: (1) 因为 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 2 \times 2 - 1 \times 3 = 1 \neq 0$, 所以 A 可逆,

从而 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(2) 设 $P(x, y)$, 则 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, 所以 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$,

因此, 点 P 的坐标为 $(3, -1)$.

C. [选修4-4:坐标系与参数方程]

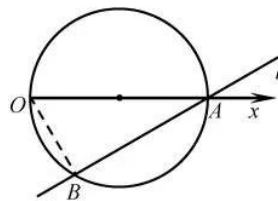
本小题主要考查曲线的极坐标方程等基础知识, 考查运算求解能力. 满分10分.

解: 因为曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$,

所以曲线 C 是圆心为 $(2, 0)$, 直径为 4 的圆.

因为直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin(\frac{\pi}{6} - \theta) = 2$,

则直线 l 过 $A(4,0)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$,
 所以 A 为直线 l 与圆 C 的一个交点.
 设另一个交点为 B , 则 $\angle OAB = \frac{\pi}{6}$.



(第 21-C 题)

连结 OB . 因为 OA 为直径, 从而 $\angle OBA = \frac{\pi}{2}$,
 所以 $AB = 4 \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$.

因此, 直线 l 被曲线 C 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$.

D. [选修 4-5: 不等式选讲]

本小题主要考查柯西不等式等基础知识, 考查推理论证能力. 满分 10 分.

证明: 由柯西不等式, 得 $(x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 2^2 + 2^2) \geq (x + 2y + 2z)^2$.

因为 $x + 2y + 2z = 6$, 所以 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 4$,

当且仅当 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ 时, 不等式取等号, 此时 $x = \frac{2}{3}, y = \frac{4}{3}, z = \frac{4}{3}$,

所以 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值为 4.

22. 【必做题】 本小题主要考查空间向量、异面直线所成角和线面角等基础知识, 考查运用空间向量解决问题的能力. 满分 10 分.

解: 如图, 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 设 AC, A_1C_1 的中点分别为 O, O_1 , 则 $OB \perp OC, OO_1 \perp OC, OO_1 \perp OB$, 以 $\{\vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OO}_1\}$ 为基底, 建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

因为 $AB = AA_1 = 2$, 所以 $A(0, -1, 0), B(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 1, 0), A_1(0, -1, 2), B_1(\sqrt{3}, 0, 2), C_1(0, 1, 2)$.

(1) 因为 P 为 A_1B_1 的中点, 所以 $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 2)$,

从而 $\vec{BP} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 2), \vec{AC}_1 = (0, 2, 2)$,

$$\begin{aligned} \text{故 } |\cos \langle \vec{BP}, \vec{AC}_1 \rangle| &= \frac{|\vec{BP} \cdot \vec{AC}_1|}{|\vec{BP}| \cdot |\vec{AC}_1|} = \frac{|-1 + 4|}{\sqrt{5} \times 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{10}}{20}. \end{aligned}$$

因此, 异面直线 BP 与 AC_1 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

(2) 因为 Q 为 BC 的中点, 所以 $Q(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$,

因此 $\vec{AQ} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0), \vec{AC}_1 = (0, 2, 2), \vec{CC}_1 = (0, 0, 2)$.

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 为平面 AQC_1 的一个法向量,

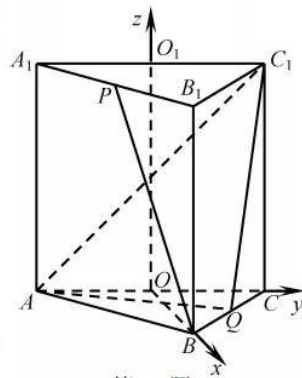
$$\text{则 } \begin{cases} \vec{AQ} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \vec{AC}_1 \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y = 0, \\ 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

不妨取 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, -1, 1)$,

设直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{CC}_1, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\vec{CC}_1 \cdot \mathbf{n}|}{|\vec{CC}_1| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{5} \times 2} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

所以直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.



(第 22 题)

23. 【必做题】本小题主要考查计数原理、排列等基础知识，考查运算求解能力和推理论证能力. 满分 10 分.

解：(1) 记 $\tau(abc)$ 为排列 abc 的逆序数，对 1, 2, 3 的所有排列，有

$$\tau(123) = 0, \tau(132) = 1, \tau(213) = 1, \tau(231) = 2, \tau(312) = 2, \tau(321) = 3,$$

所以 $f_3(0) = 1, f_3(1) = f_3(2) = 2$.

对 1, 2, 3, 4 的排列，利用已有的 1, 2, 3 的排列，将数字 4 添加进去，4 在新排列中的位置只能是最后三个位置.

因此， $f_4(2) = f_3(2) + f_3(1) + f_3(0) = 5$.

(2) 对一般的 $n(n \geq 4)$ 的情形，逆序数为 0 的排列只有一个：12... n ，所以 $f_n(0) = 1$.

逆序数为 1 的排列只能是将排列 12... n 中的任意相邻两个数字调换位置得到的排列，所以 $f_n(1) = n - 1$.

为计算 $f_{n+1}(2)$ ，当 1, 2, ..., n 的排列及其逆序数确定后，将 $n + 1$ 添加进原排列， $n + 1$ 在新排列中的位置只能是最后三个位置.

因此， $f_{n+1}(2) = f_n(2) + f_n(1) + f_n(0) = f_n(2) + n$.

当 $n \geq 5$ 时，

$$\begin{aligned} f_n(2) &= [f_n(2) - f_{n-1}(2)] + [f_{n-1}(2) - f_{n-2}(2)] + \cdots + [f_5(2) - f_4(2)] + f_4(2) \\ &= (n - 1) + (n - 2) + \cdots + 4 + f_4(2) = \frac{n^2 - n - 2}{2}, \end{aligned}$$

因此，当 $n \geq 5$ 时， $f_n(2) = \frac{n^2 - n - 2}{2}$.