2018年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数 学·参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算。每小题4分，满分40分。

1.C 2.B 3.C 4.B 5.D 6.A 7.D 8.D 9.A 10.B

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。多空题每题6分，单空题每题4分，满分36分。

11. 8；11　　12. −2；8　　13. $\frac{\sqrt{21}}{7}$;3

14. 7

15. $(1,4);(1,3]\cup(4,+\infty)$　　16. 1260　　17. 5

三、解答题：本大题共5小题，共74分。

18. 本题主要考查三角函数及其恒等变换等基础知识，同时考查运算求解能力。满分14分。

（Ⅰ）由角α的终边过点$P(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$得$\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，

所以$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

（Ⅱ）由角α的终边过点$P(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$得$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

由$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$得$\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{12}{13}$.

由$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$得$\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$，

所以$\cos\beta=-\frac{56}{65}$或$\cos\beta=-\frac{16}{65}$.

19. 本题主要考查空间点、线、面位置关系，直线与平面所成的角等基础知识，同时考查空间想象能力和运算求解能力。满分15分。

方法一：

（Ⅰ）由$AB=2,AA_1=4,BB_1=2,AA_1\perp AB,BB_1\perp AB$得$AB_1=A_1B_1=2\sqrt{2}$，所以$A_1B_1^2+AB_1^2=AA_1^2$.

故 $AB_1 \perp A_1B_1$.

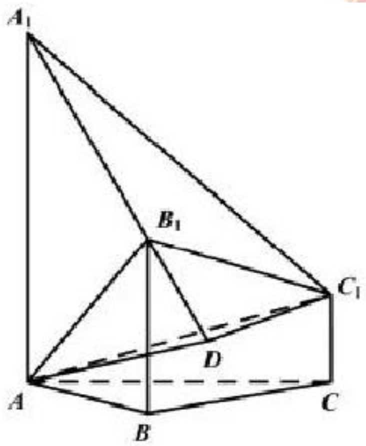
由 $BC=2$， $BB_1=2, CC_1=1, BB_1 \perp BC, CC_1 \perp BC$ 得 $B_1C_1=\sqrt{5}$，

由 $AB=BC=2, \angle ABC=120°$ 得 $AC=2\sqrt{3}$，

由 $CC_1 \perp AC$，得 $AC_1=\sqrt{13}$，所以 $AB_1^2+B_1C_1^2=AC_1^2$，故 $AB_1 \perp B_1C_1$.

因此 $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

（Ⅱ）如图，过点 C_1 作 $C_1D \perp A_1B_1$，交直线 A_1B_1 于点 D，连结 AD.



由 $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ 得平面 $A_1B_1C_1 \perp$ 平面 ABB_1，

由 $C_1D \perp A_1B_1$ 得 $C_1D \perp$ 平面 ABB_1，

所以 $\angle C_1AD$ 是 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角.

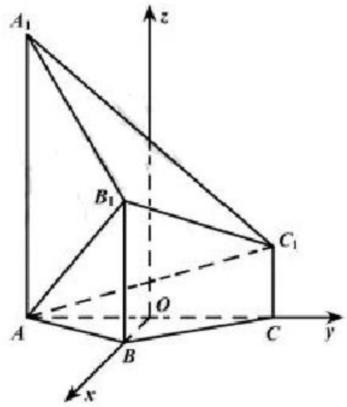
由 $B_1C_1=\sqrt{5}, A_1B_1=2\sqrt{2}, A_1C_1=\sqrt{21}$ 得 $\cos\angle C_1A_1B_1=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}, \sin\angle C_1A_1B_1=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，

所以 $C_1D=\sqrt{3}$，故 $\sin\angle C_1AD=\dfrac{C_1D}{AC_1}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

因此，直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值是 $\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

方法二：

（Ⅰ）如图，以 AC 的中点 O 为原点，分别以射线 OB，OC 为 x，y 轴的正半轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$.



由题意知各点坐标如下：

$A(0,-\sqrt{3},0), B(1,0,0), A_1(0,-\sqrt{3},4), B_1(1,0,2), C_1(0,\sqrt{3},1)$,

因此 $\overrightarrow{AB_1}=(1,\sqrt{3},2), \overrightarrow{A_1B_1}=(1,\sqrt{3},-2), \overrightarrow{A_1C_1}=(0,2\sqrt{3},-3)$,

由 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0$ 得 $AB_1\perp A_1B_1$.

由 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=0$ 得 $AB_1\perp A_1C_1$.

所以 $AB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

（II）设直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角为 θ.

由（I）可知 $\overrightarrow{AC_1}=(0,2\sqrt{3},1), \overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0), \overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$,

设平面 ABB_1 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\ 2z=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,0)$.

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

因此，直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值是 $\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

20．本题主要考查等差数列、等比数列、数列求和等基础知识，同时考查运算求解能力和综合应用能力。满分 15 分。

（I）由 a_4+2 是 a_3,a_5 的等差中项得 $a_3+a_5=2a_4+4$，

所以 $a_3+a_4+a_5=3a_4+4=28$，

解得 $a_4=8$.

由 $a_3+a_5=20$ 得 $8(q+\frac{1}{q})=20$，

因为 $q>1$，所以 $q=2$.

（Ⅱ）设 $c_n=(b_{n+1}-b_n)a_n$， 数列 $\{c_n\}$ 前 n 项和为 S_n.

由 $c_n=\begin{cases}S_1, n=1,\\ S_n-S_{n-1}, n\geq 2.\end{cases}$ 解得 $c_n=4n-1$.

由（Ⅰ）可知 $a_n=2^{n-1}$，

所以 $b_{n+1}-b_n=(4n-1)\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$，

故 $b_n-b_{n-1}=(4n-5)\cdot(\frac{1}{2})^{n-2}, n\geq 2$，

$b_n-b_1=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_3-b_2)+(b_2-b_1)$

$=(4n-5)\cdot(\frac{1}{2})^{n-2}+(4n-9)\cdot(\frac{1}{2})^{n-3}+\cdots+7\cdot\frac{1}{2}+3$.

设 $T_n=3+7\cdot\frac{1}{2}+11\cdot(\frac{1}{2})^2+\cdots+(4n-5)\cdot(\frac{1}{2})^{n-2}, n\geq 2$，

$\frac{1}{2}T_n=3\cdot\frac{1}{2}+7\cdot(\frac{1}{2})^2+\cdots+(4n-9)\cdot(\frac{1}{2})^{n-2}+(4n-5)\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$

所以 $\frac{1}{2}T_n=3+4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot(\frac{1}{2})^2+\cdots+4\cdot(\frac{1}{2})^{n-2}-(4n-5)\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$，

因此 $T_n=14-(4n+3)\cdot(\frac{1}{2})^{n-2}, n\geq 2$，

又 $b_1=1$，所以 $b_n=15-(4n+3)\cdot(\frac{1}{2})^{n-2}$.

21．本题主要考查椭圆、抛物线的几何性质，直线与抛物线的位置关系等基础知识，同时考查运算求解能力和综合应用能力。满分 15 分。学科#网

（Ⅰ）设 $P(x_0,y_0)$， $A(\frac{1}{4}y_1^2,y_1)$， $B(\frac{1}{4}y_2^2,y_2)$.

因为 PA， PB 的中点在抛物线上，

所以 y_1，y_2 为方程 $(\frac{y+y_0}{2})^2=4\cdot\frac{\frac{1}{4}y^2+x_0}{2}$ 即 $y^2-2y_0y+8x_0-y_0^2=0$ 的两个不同的实数根.

所以 $y_1+y_2=2y_0$.

因此，PM 垂直于 y 轴.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $\begin{cases}y_1+y_2=2y_0,\\ y_1y_2=8x_0-y_0^2,\end{cases}$

所以 $|PM|=\frac{1}{8}(y_1^2+y_2^2)-x_0=\frac{3}{4}y_0^2-3x_0$，$|y_1-y_2|=2\sqrt{2(y_0^2-4x_0)}$.

因此，$\triangle PAB$ 的面积 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|PM|\cdot|y_1-y_2|=\frac{3\sqrt{2}}{4}(y_0^2-4x_0)^{\frac{3}{2}}$.

因为 $x_0^2+\frac{y_0^2}{4}=1(x_0<0)$，所以 $y_0^2-4x_0=-4x_0^2-4x_0+4\in[4,5]$.

因此，$\triangle PAB$ 面积的取值范围是 $[6\sqrt{2},\frac{15\sqrt{10}}{4}]$.

22．本题主要考查函数的单调性，导数的运算及其应用，同时考查逻辑思维能力和综合应用能力。满分 15 分。

（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$，

由 $f'(x_1)=f'(x_2)$ 得 $\frac{1}{2\sqrt{x_1}}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{2\sqrt{x_2}}-\frac{1}{x_2}$，

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}=\frac{1}{2}$.

由基本不等式得 $\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geq 2\sqrt[4]{x_1x_2}$.

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $x_1x_2>256$.

由题意得 $f(x_1)+f(x_2)=\sqrt{x_1}-\ln x_1+\sqrt{x_2}-\ln x_2=\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}-\ln(x_1x_2)$.

设 $g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}-\ln x$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{4x}(\sqrt{x}-4)$，

所以

x	（0，16）	16	（16，+∞）
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	2−4ln2	↗

所以 $g(x)$ 在[256，+∞）上单调递增，

故 $g(x_1x_2)>g(256)=8-8\ln 2$，

即 $f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$．

（Ⅱ）令 $m=e^{-(|a|+k)}$，$n=(\dfrac{|a|+1}{k})^2+1$，则

$f(m)-km-a>|a|+k-k-a\geqslant 0$，

$f(n)-kn-a<n(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{a}{n}-k)\leqslant n(\dfrac{|a|+1}{\sqrt{n}}-k)<0$，

所以，存在 $x_0\in(m,n)$ 使 $f(x_0)=kx_0+a$，

所以，对于任意的 $a\in\mathbb{R}$ 及 $k\in(0,+\infty)$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有公共点．

由 $f(x)=kx+a$ 得 $k=\dfrac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$．

设 $h(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$，

则 $h'(x)=\dfrac{\ln x-\dfrac{\sqrt{x}}{2}-1+a}{x^2}=\dfrac{-g(x)-1+a}{x^2}$，

其中 $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\ln x$．

由（Ⅰ）可知 $g(x)\geqslant g(16)$，又 $a\leqslant 3-4\ln 2$，

故 $-g(x)-1+a\leqslant -g(16)-1+a=-3+4\ln 2+a\leqslant 0$，

所以 $h'(x)\leqslant 0$，即函数 $h(x)$ 在（0，+∞）上单调递减，因此方程 $f(x)-kx-a=0$ 至多 1 个实根．

综上，当 $a\leqslant 3-4\ln 2$ 时，对于任意 $k>0$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有唯一公共点．