高中数学第一章-集合

考试内容：

集合、子集、补集、交集、并集.

逻辑联结词．四种命题．充分条件和必要条件.

考试要求：（1）理解集合、子集、补集、交集、并集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义；掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合.

（2）理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义理解四种命题及其相互关系；掌握充分条件、必要条件及充要条件的意义.

§01. 集合与简易逻辑　知识要点

一、知识结构：

本章知识主要分为集合、简单不等式的解法（集合化简）、简易逻辑三部分：

集合
1．集合的有关概念；
2．集合间的包含关系；
3．集合间的运算.

集合知识简单应用
1．简单绝对值不等式的解法；
2．一元二次不等式的解法.

简易逻辑
1．简单命题与复合命题；
2．假言命题的四种形式；
3．充要条件.

二、知识回顾：

（一） 集合

1. 基本概念：集合、元素；有限集、无限集；空集、全集；符号的使用.
2. 集合的表示法：列举法、描述法、图形表示法.

集合元素的特征：确定性、互异性、无序性.

集合的性质：

①任何一个集合是它本身的子集，记为 $A\subseteq A$；

②空集是任何集合的子集，记为 $\phi\subseteq A$；

③空集是任何非空集合的真子集；

如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么 $A=B$.

如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

[注]：①Z= {整数}（√）　　Z ={全体整数}　（×）

②已知集合 S 中 A 的补集是一个有限集，则集合 A 也是有限集.（×）（例：S=N； A= N^{+}，则 $\complement_S A$= {0}）

③空集的补集是全集.

④若集合 A=集合 B，则 $C_BA=\varnothing$，$C_AB=\varnothing$　C_S（C_AB）=D　（注：$C_AB=\varnothing$）.

3. ①{（x，y）|xy=0，$x\in R$，$y\in R$}坐标轴上的点集.

②{（x，y）|xy<0，$x\in R$，$y\in R$ }二、四象限的点集.

③{（x，y）|xy>0，$x\in R$，$y\in R$} 一、三象限的点集.

[注]：①对方程组解的集合应是点集.

例：$\begin{cases}x+y=3\\2x-3y=1\end{cases}$ 解的集合{(2，1)}.

②点集与数集的交集是ϕ.（例：A ={(x，y)| y =x+1}　B={y|y =x^2+1}　则 $A\cap B=\varnothing$）

4. ①n 个元素的子集有 2^n 个．②n 个元素的真子集有 2^n −1 个．　③n 个元素的非空真子集有 2^n−2 个.

5. ⑴①一个命题的否命题为真，它的逆命题一定为真．否命题$\Leftrightarrow$逆命题.

②一个命题为真，则它的逆否命题一定为真．原命题$\Leftrightarrow$逆否命题.

例：①若$a+b\neq 5$，则$a\neq 2$或$b\neq 3$应是真命题.

解：逆否：$a=2$ 且 $b=3$，则 $a+b=5$，成立，所以此命题为真.

②$x\neq 1$且$y\neq 2$，$\not\Rightarrow$ $x+y\neq 3$.

解：逆否：$x+y=3\not\Rightarrow x=1$ 或 $y=2$.

$\therefore x\neq 1$且$y\neq 2\not\Rightarrow x+y\neq 3$，故$x+y\neq 3$是$x\neq 1$且$y\neq 2$的既不是充分，又不是必要条件.

⑵小范围推出大范围；大范围推不出小范围.

3. 例：若$x\succ 5$，$\Rightarrow x\succ 5$或$x\prec 2$.

4. 集合运算：交、并、补.

交：$A\bigcap B\Leftrightarrow\{x\,|\,x\in A,且x\in B\}$

并：$A\bigcup B\Leftrightarrow\{x\,|\,x\in A或x\in B\}$

补：$C_U A\Leftrightarrow\{x\in U,且x\notin A\}$

5. 主要性质和运算律

（1） 包含关系：

$$A\subseteq A,\Phi\subseteq A,A\subseteq U,C_UA\subseteq U,$$
$$A\subseteq B,B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C;A\bigcap B\subseteq A,A\bigcap B\subseteq B;A\bigcup B\supseteq A,A\bigcup B\supseteq B.$$

（2） 等价关系：$A\subseteq B\Leftrightarrow A\bigcap B=A\Leftrightarrow A\bigcup B=B\Leftrightarrow C_UA\bigcup B=U$

（3） 集合的运算律：

交换律：$A\bigcap B=B\bigcap A;A\bigcup B=B\bigcup A.$

结合律：$(A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C);(A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C)$

分配律：. $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C);A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

0-1 律：$\Phi\bigcap A=\Phi,\Phi\bigcup A=A,U\bigcap A=A,U\bigcup A=U$

等幂律：$A\cap A=A, A\cup A=A.$

求补律：$A\cap C_UA=\Phi$　$A\cup C_UA=U$　fi$C_UU=\Phi$　fi$C_U\Phi=U$

反演律：$C_U(A\cap B)=(C_UA)\cup(C_UB)$　$C_U(A\cup B)=(C_UA)\cap(C_UB)$

6. 有限集的元素个数

定义：有限集 A 的元素的个数叫做集合 A 的基数，记为 card(A)规定 card(Φ) =0.

基本公式：

$$(1)card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(A\cap B)$$

$$(2)card(A\cup B\cup C)=card(A)+card(B)+card(C)$$
$$-card(A\cap B)-card(B\cap C)-card(C\cap A)$$
$$+card(A\cap B\cap C)$$

(3) card(fi$_U$A)= card(U)- card(A)

(二)含绝对值不等式、一元二次不等式的解法及延伸

1.整式不等式的解法

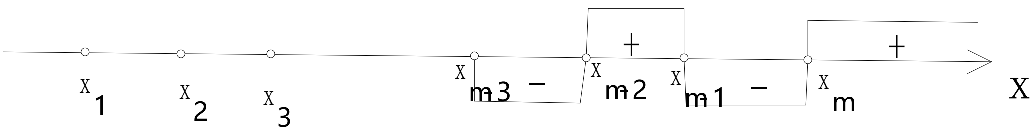
根轴法（零点分段法）

①将不等式化为 $a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_m)>0(<0)$形式，并将各因式 x 的系数化“+”；(为了统一方便)

②求根，并在数轴上表示出来；

③由右上方穿线，经过数轴上表示各根的点（为什么？）；

④若不等式（x 的系数化“+”后）是“>0”，则找“线”在 x 轴上方的区间；若不等式是“<0”，则找“线”在 x 轴下方的区间.

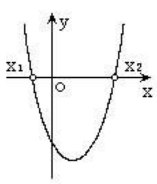
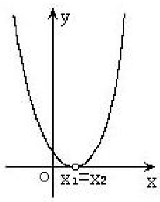
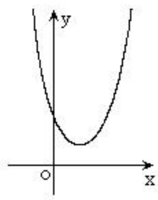


（自右向左正负相间）

则不等式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n>0(<0)(a_0>0)$ 的解可以根据各区间的符号确定.

特例① 一元一次不等式 ax>b 解的讨论；

②一元二次不等式 $ax^2+box>0(a>0)$解的讨论.

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ （$a>0$）的图象			

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$的根	有两相异实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$\{x\|x<x_1或x>x_2\}$	$\left\{x\|x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$	R
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	$\{x\|x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

2. 分式不等式的解法

（1）标准化：移项通分化为 $\frac{f(x)}{g(x)}$>0(或 $\frac{f(x)}{g(x)}$<0)；$\frac{f(x)}{g(x)}$ ≥0(或 $\frac{f(x)}{g(x)}$≤0)的形式，

(2)转化为整式不等式(组) $\frac{f(x)}{g(x)}>0 \Leftrightarrow f(x)g(x)>0; \frac{f(x)}{g(x)}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x)\geq 0 \\ g(x)\neq 0 \end{cases}$

3. 含绝对值不等式的解法

（1）公式法：$|ax+b|<c$，与 $|ax+b|>c(c>0)$ 型的不等式的解法.

（2）定义法：用“零点分区间法”分类讨论.

（3）几何法：根据绝对值的几何意义用数形结合思想方法解题.

4. 一元二次方程根的分布

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$

（1）根的“零分布”：根据判别式和韦达定理分析列式解之.

（2）根的“非零分布”：作二次函数图象，用数形结合思想分析列式解之.

（三）简易逻辑

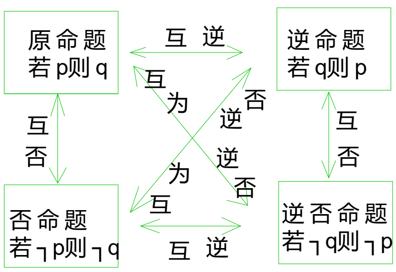
1、命题的定义：可以判断真假的语句叫做命题。

2、逻辑联结词、简单命题与复合命题：

“或”、“且”、“非”这些词叫做逻辑联结词；不含有逻辑联结词的命题是简单命题；由简单命题和逻辑联结词“或”、“且”、“非”构成的命题是复合命题。

构成复合命题的形式：p 或 q(记作“p∨q”)；p 且 q(记作“p∧q”)；非 p(记作“┓q”) 。

3、“或”、 “且”、 “非”的真值判断



（1）“非 p”形式复合命题的真假与 F 的真假相反；

（2）“p 且 q”形式复合命题当 P 与 q 同为真时为真，其他情况时为假；

（3）“p 或 q”形式复合命题当 p 与 q 同为假时为假，其他情况时为真.

4、四种命题的形式：

原命题：若 P 则 q；　逆命题：若 q 则 p；

否命题：若¬ P 则¬ q；逆否命题：若¬ q 则¬ p。

(1)交换原命题的条件和结论，所得的命题是逆命题；

(2)同时否定原命题的条件和结论，所得的命题是否命题；

(3)交换原命题的条件和结论，并且同时否定，所得的命题是逆否命题.

5、四种命题之间的相互关系：

一个命题的真假与其他三个命题的真假有如下三条关系：(原命题 $\Leftrightarrow$ 逆否命题)

①、原命题为真，它的逆命题不一定为真。

②、原命题为真，它的否命题不一定为真。

③、原命题为真，它的逆否命题一定为真。

6、如果已知 $p \Rightarrow q$ 那么我们说，p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件。

若 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$,则称 p 是 q 的充要条件，记为 $p \Leftrightarrow q$.

7、反证法：从命题结论的反面出发（假设），引出(与已知、公理、定理…)矛盾，从而否定假设证明原命题成立，这样的证明方法叫做反证法。

高中数学第二章-函数

考试内容：

映射、函数、函数的单调性、奇偶性.

反函数. 互为反函数的函数图像间的关系.

指数概念的扩充. 有理指数幂的运算性质. 指数函数.

对数. 对数的运算性质. 对数函数.

函数的应用.

考试要求：

（1）了解映射的概念，理解函数的概念.

（2）了解函数单调性、奇偶性的概念，掌握判断一些简单函数的单调性、奇偶性的方法.

（3）了解反函数的概念及互为反函数的函数图像间的关系，会求一些简单函数的反函数.

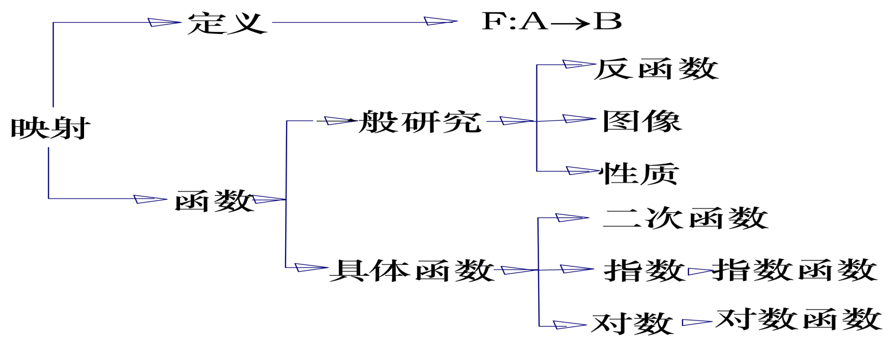
（4）理解分数指数幂的概念，掌握有理指数幂的运算性质，掌握指数函数的概念、图像　和性质.

（5）理解对数的概念，掌握对数的运算性质；掌握对数函数的概念、图像和性质.

（6）能够运用函数的性质、指数函数和对数函数的性质解决某些简单的实际问题.

§02. 函数　知识要点

一、本章知识网络结构：



二、知识回顾：

（一） 映射与函数

1. 映射与一一映射

2.函数

函数三要素是定义域，对应法则和值域，而定义域和对应法则是起决定作用的要素，因为这二者确定后，值域也就相应得到确定，因此只有定义域和对应法则二者完全相同的函数才是同一函数.

3.反函数

反函数的定义

设函数 $y=f(x)(x\in A)$ 的值域是 C，根据这个函数中 x,y 的关系，用 y 把 x 表示出，得到 x=φ(y). 若对于 y 在 C 中的任何一个值，通过 x=φ(y)，x 在 A 中都有唯一的值和它对应，那么，x=φ(y)就表示 y 是自变量，x 是自变量 y 的函数，这样的函数 x=φ(y) (y $\in$ C)叫做函数 $y=f(x)(x\in A)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，习惯上改写成 $y=f^{-1}(x)$

（二）函数的性质

1.函数的单调性

定义：对于函数 f(x)的定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1,x_2,

⑴若当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$,则说 f(x)在这个区间上是增函数；

⑵若当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$,则说 f(x) 在这个区间上是减函数.

若函数 y=f(x)在某个区间是增函数或减函数，则就说函数 y=f(x)在这一区间具有（严格的）单调性，这一区间叫做函数 y=f(x)的单调区间.此时也说函数是这一区间上的单调函数.

2.函数的奇偶性

偶函数的定义：如果对于函数f(x)的定义域内任意一个x,都有f(-x)=f(x),那么函数f(x)就叫做偶函数.

$$f(x)\text{是偶函数}\Leftrightarrow f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(-x)-f(x)=0\Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)}=1(f(x)\neq 0)$$

奇函数的定义：如果对于函数f(x)的定义域内任意一个x,都有f(-x)=-f(x),那么函数f(x)就叫做奇函数.

$$f(x)\text{是奇函数}\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(-x)+f(x)=0\Leftrightarrow \frac{f(-x)}{f(x)}=-1(f(x)\neq 0)$$

正确理解奇、偶函数的定义。必须把握好两个问题：
（1）定义域在数轴上关于原点对称是函数 $f(x)$ 为奇函数或偶函数的必要不充分条件；（2）$f(-x)=f(x)$ 或 $f(-x)=-f(x)$ 是定义域上的恒等式。
2．奇函数的图象关于原点成中心对称图形，偶函数的图象关于 y 轴成轴对称图形。反之亦真，因此，也可以利用函数图象的对称性去判断函数的奇偶性。
3.奇函数在对称区间同增同减；偶函数在对称区间增减性相反.
4．如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(x)=f(|x|)$，反之亦成立。若奇函数在 $x=0$ 时有意义，则 $f(0)=0$ 。

7. 奇函数，偶函数：
⑴偶函数：$f(-x)=f(x)$
设（a,b）为偶函数上一点，则（$-a,b$）也是图象上一点.
偶函数的判定：两个条件同时满足
①定义域一定要关于 y 轴对称，例如：$y=x^2+1$ 在 $[1,-1)$ 上不是偶函数.
②满足 $f(-x)=f(x)$，或 $f(-x)-f(x)=0$，若 $f(x)\neq 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{f(-x)}=1$.
⑵奇函数：$f(-x)=-f(x)$
设（a,b）为奇函数上一点，则（$-a,-b$）也是图象上一点.
奇函数的判定：两个条件同时满足
①定义域一定要关于原点对称，例如：$y=x^3$ 在 $[1,-1)$ 上不是奇函数.
②满足 $f(-x)=-f(x)$，或 $f(-x)+f(x)=0$，若 $f(x)\neq 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{f(-x)}=-1$.

8. 对称变换：①$y=f(x)\xrightarrow{y轴对称}y=f(-x)$

②$y=f(x)\xrightarrow{x轴对称}y=-f(x)$

③$y=f(x)\xrightarrow{原点对称}y=-f(-x)$

9. 判断函数单调性（定义）作差法：对带根号的一定要分子有理化，例如：
$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+b^2}-\sqrt{x_2^2+b^2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\sqrt{x_x^2+b^2}+\sqrt{x_1^2+b^2}}$$
在进行讨论.
10. 外层函数的定义域是内层函数的值域.
例如：已知函数 $f(x)=1+\dfrac{x}{1-x}$ 的定义域为 A，函数 $f[f(x)]$ 的定义域是 B，则集合 A 与集合 B 之间的关系是__________.
解：$f(x)$ 的值域是 $f(f(x))$ 的定义域 B，$f(x)$ 的值域 $\in R$，故 $B\in R$，而 $A=\{x\mid x\neq 1\}$，故 $B\supset A$.
11. 常用变换：
① $f(x+y)=f(x)f(y)\Leftrightarrow f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$.

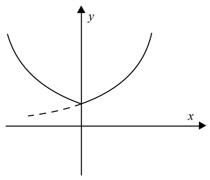
证：$f(x-y)=\dfrac{f(y)}{f(x)}\Leftrightarrow f(x)=f[(x-y)+y]=f(x-y)f(y)$

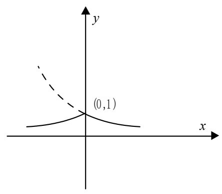
② $f(\dfrac{x}{y})=f(x)-f(y)\Leftrightarrow f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$

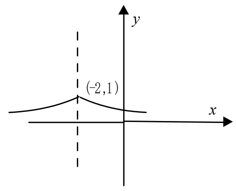
证：$f(x)=f(\dfrac{x}{y}\cdot y)=f(\dfrac{x}{y})+f(y)$

12. ⑴熟悉常用函数图象：

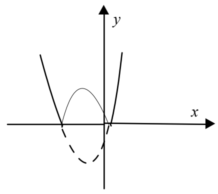
例：$y=2^{|x|}\to|x|$关于 y 轴对称.　　　　$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x+2|}\to y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}\to y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x+2|}$







$y=|2x^2+2x-1|\to|y|$关于 x 轴对称.

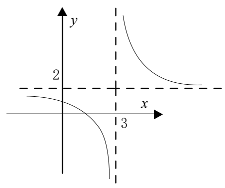


⑵熟悉分式图象：

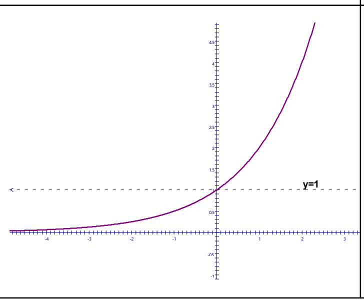
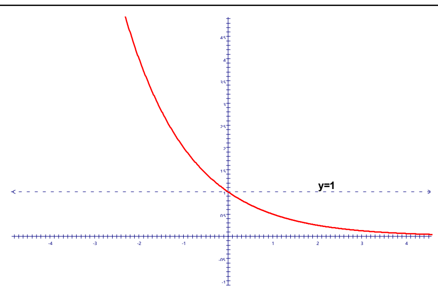
例：$y=\dfrac{2x+1}{x-3}=2+\dfrac{7}{x-3}\Rightarrow$定义域$\{x\,|\,x\neq3,x\in R\}$，

值域$\{y\,|\,y\neq2,y\in R\}\to$值域$\neq$ x 前的系数之比.

（三）指数函数与对数函数



指数函数 $y=a^x(a>0且a\neq1)$ 的图象和性质

	a>1	0<a<1
图象		
性质	(1)定义域：R	
	(2) 值域：(0，+∞)	
	(3) 过定点 (0，1)，即 x=0 时，y=1	
	(4) x>0 时，y>1;x<0 时，0<y<1	(4) x>0 时，0<y<1;x<0 时，y>1.
	(5) 在 R 上是增函数	(5) 在 R 上是减函数

	a>1	0<a<1

对数函数 $y=log_a x$ 的图象和性质:

对数运算:

$$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N^{(1)}$$

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

$$\log_a M^n=n\log_a(\pm M)^{12)}$$

$$\log_a \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$$

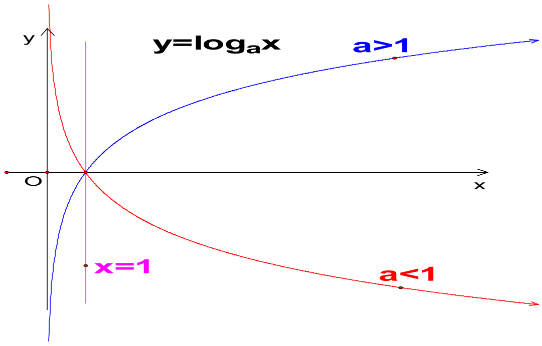
$$a^{\log_a N}=N$$

$$\text{换底公式:}\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$$

$$\text{推论:}\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$$

$$\Rightarrow \log_{a_1}a_2\cdot\log_{a_2}a_3\cdot\ldots\cdot\log_{a_{n-1}}a_n=\log_{a_1}a_n$$

(以上 $M\succ 0,N\succ 0,a\succ 0,a\neq 1,b\succ 0,b\neq 1,c\succ 0,c\neq 1,a_1,a_2\ldots a_n\succ 0$ 且 $\neq 1$)

<table>
<tr><td>图象</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td colspan="2">（1）定义域：（0，+∞）</td></tr>
<tr><td colspan="2">（2）值域：R</td></tr>
<tr><td colspan="2">（3）过点（1，0），即当 x=1 时，y=0</td></tr>
<tr><td>（4）$x\in(0,1)$ 时 $y<0$
$x\in(1,+\infty)$ 时 y>0</td><td>$x\in(0,1)$ 时 $y>0$
$x\in(1,+\infty)$ 时 $y<0$</td></tr>
<tr><td>（5）在（0，+∞）上是增函数</td><td>在（0，+∞）上是减函数</td></tr>
</table>

注(1)：当 $a,b\prec 0$ 时，$\log(a\cdot b)=\log(-a)+\log(-b)$.

(2)：当 $M\succ 0$ 时，取“+”，当 n 是偶数时且 $M\prec 0$ 时，$M^n\succ 0$，而 $M\prec 0$，故取“—”.

例如：$\log_a x^2\neq 2\log_a x$ ∵(2$\log_a x$ 中 $x>0$ 而 $\log_a x^2$ 中 $x\in$R）.

(2) $y=a^x$（$a\succ 0,a\neq 1$）与 $y=\log_a x$ 互为反函数.

当 $a\succ 1$ 时，$y=\log_a x$ 的 a 值越大，越靠近 x 轴；当 $0\prec a\prec 1$ 时，则相反.

（四）方法总结

(1).相同函数的判定方法：定义域相同且对应法则相同.

(1)对数运算：

$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$(1)

$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

$\log_a M^n=n\log_a(\pm M)$(2)

$\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$

$a^{\log_a N}=N$

换底公式:$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$

推论:$\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$

$\Rightarrow\log_{a_1}a_2\cdot\log_{a_2}a_3\cdot\ldots\cdot\log_{a_{n-1}}a_n=\log_{a_1}a_n$

（以上 $\mathrm{M}\succ0,\mathrm{N}\succ0,\mathrm{a}\succ0,\mathrm{a}\neq1,\mathrm{b}\succ0,\mathrm{b}\neq1,\mathrm{c}\succ0,\mathrm{c}\neq1,\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2\ldots\mathrm{a}_\mathrm{n}\succ0$且$\neq1$）

注(1)：当 $a,b\prec0$ 时，$\log(a\cdot b)=\log(-a)+\log(-b)$.

(2)：当 $M\succ0$ 时，取“+”，当 n 是偶数时且 $M\prec0$ 时，$M^n\succ0$，而 $M\prec0$，故取“—”.

例如：$\log_a x^2\neq2\log_a x\because(2\log_a x$ 中 $x>0$ 而 $\log_a x^2$ 中 $x\in$R）.

(2) $y=a^x$（$a\succ0,a\neq1$）与 $y=\log_a x$ 互为反函数.

当 $a\succ1$ 时，$y=\log_a x$ 的 a 值越大，越靠近 x 轴；当 $0\prec a\prec1$ 时，则相反.

(2).函数表达式的求法：①定义法；②换元法；③待定系数法.

(3).反函数的求法：先解 x,互换 x、y，注明反函数的定义域(即原函数的值域).

(4).函数的定义域的求法：布列使函数有意义的自变量的不等关系式，求解即可求得函数的定义域.常涉及到的依据为①分母不为 0；②偶次根式中被开方数不小于 0；③对数的真数大于 0，底数大于零且不等于 1；④零指数幂的底数不等于零；⑤实际问题要考虑实际意义等.

(5).函数值域的求法：①配方法(二次或四次)；②“判别式法”；③反函数法；④换元法；⑤不等式法；⑥函数的单调性法.

(6).单调性的判定法:①设 x_1,x_2 是所研究区间内任两个自变量,且 $x_1<x_2$;②判定 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小；③作差比较或作商比较.

(7).奇偶性的判定法：首先考察定义域是否关于原点对称，再计算 f(-x)与 f(x)之间的关系：①f(-x)=f(x)为偶函数；f(-x)=-f(x)为奇函数；②f(-x)-f(x)=0 为偶；f(x)+f(-x)=0 为奇；③f(-x)/f(x)=1 是偶；f(x)÷f(-x)=-1 为奇函数.

⑻. 图象的作法与平移：①据函数表达式，列表、描点、连光滑曲线；②利用熟知函数的图象的平移、翻转、伸缩变换；③利用反函数的图象与对称性描绘函数图象.

高中数学 第三章　数列

考试内容：

数列.

等差数列及其通项公式．等差数列前 n 项和公式.

等比数列及其通项公式．等比数列前 n 项和公式.

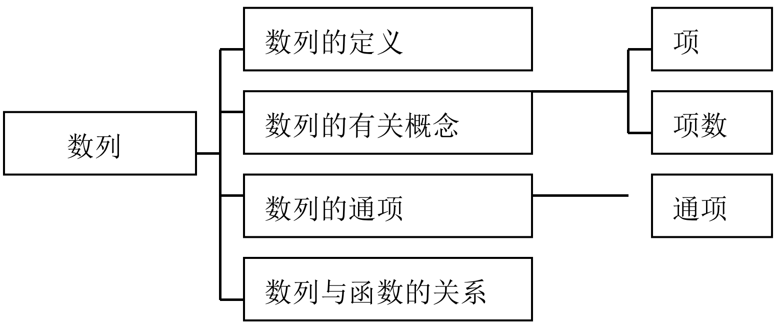
考试要求：

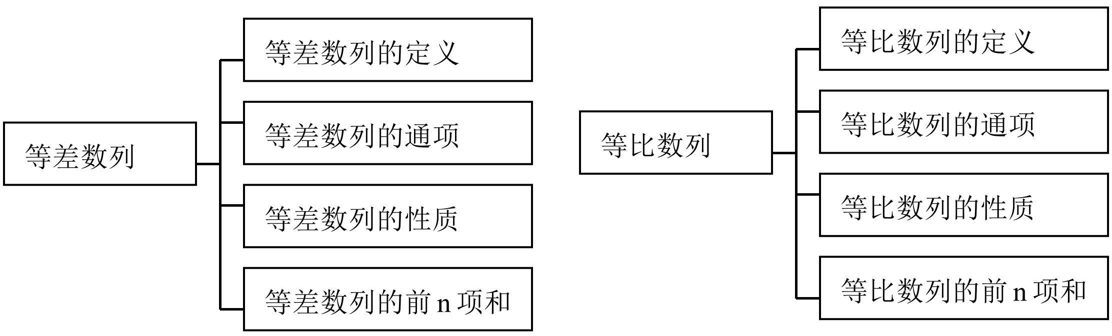
（1）理解数列的概念，了解数列通项公式的意义了解递推公式是给出数列的一种方法，并能根据递推公式写出数列的前几项.

（2）理解等差数列的概念，掌握等差数列的通项公式与前 n 项和公式，并能解决简单的实际问题.

（3）理解等比数列的概念，掌握等比数列的通项公式与前 n 项和公式，并能解决简单的实际问题.

§03. 数 列　知识要点





	等差数列	等比数列
定义	$a_{n+1}-a_n=d$	$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(q\neq 0)$
递推公式	$a_n=a_{n-1}+d$；$a_n=a_{m-n}+md$	$a_n=a_{n-1}q$；$a_n=a_mq^{n-m}$

通项公式	$a_n=a_1+(n-1)d$	$a_n=a_1q^{n-1}$ （$a_1,q\neq 0$）
中项	$A=\dfrac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$ （$n,k\in N^*,n\succ k\succ 0$）	$G=\pm\sqrt{a_{n-k}a_{n+k}}\,(a_{n-k}a_{n+k}\succ 0)$ （$n,k\in N^*,n\succ k\succ 0$）
前 n 项和	$S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$ $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$	$S_n=\begin{cases}na_1(q=1)\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}(q\geq 2)\end{cases}$
重要性质	$a_m+a_n=a_p+a_q(m,n,p,q\in N^*,$ $m+n=p+q)$	$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q(m,n,p,q\in N^*,m+n=p+q)$

1. (1)等差、等比数列：

		等差数列	等比数列
定义		$\{a_n\}为A\cdot P\Leftrightarrow a_{n+1}-a_n=d(常数)$	$\{a_n\}为G\cdot P\Leftrightarrow\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q(常数)$
通项公式		$a_n=a_1+(n-1)d=a_k+(n-k)d=dn+a_1-d$	$a_n=a_1q^{n-1}=a_kq^{n-k}$
求和公式		$s_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$ $=\dfrac{d}{2}n^2+(a_1-\dfrac{d}{2})n$	$s_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q} & (q\neq 1\end{cases}$
中项公式		A=$\dfrac{a+b}{2}$ 推广：$2a_n=a_{n-m}+a_{n+m}$	$G^2=ab$。推广：$a_n{}^2=a_{n-m}\times a_{n+m}$
性质	1	若 m+n=p+q 则 $a_m+a_n=a_p+a_q$	若 m+n=p+q，则 $a_ma_n=a_pa_q$。
	2	若 $\{k_n\}$ 成 A.P（其中 $k_n\in N$）则 $\{a_{k_n}\}$ 也为 A.P。	若 $\{k_n\}$ 成等比数列（其中 $k_n\in N$），则 $\{a_{k_n}\}$ 成等比数列。
	3	. $s_n,s_{2n}-s_n,s_{3n}-s_{2n}$ 成等差数列。	$s_n,s_{2n}-s_n,s_{3n}-s_{2n}$ 成等比数列。
	4	$d=\dfrac{a_n-a_1}{n-1}=\dfrac{a_m-a_n}{m-n}(m\neq n)$	$q^{n-1}=\dfrac{a_n}{a_1}$ ， $q^{n-m}=\dfrac{a_n}{a_m}$ $(m\neq n)$
	5		

⑵看数列是不是等差数列有以下三种方法：

① $a_n - a_{n-1} = d(n \geq 2, d\text{为常数})$

②$2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$ ($n \geq 2$)
③ $a_n = kn + b$ (n, k 为常数).
⑶看数列是不是等比数列有以下四种方法：

① $a_n = a_{n-1}q(n \geq 2, q\text{为常数}, \text{且} \neq 0)$

② $a_n^2 = a_{n+1} \cdot a_{n-1}$ ($n \geq 2$， $a_n a_{n+1} a_{n-1} \neq 0$)[①]

注①：i. $b = \sqrt{ac}$ ，是 a、b、c 成等比的双非条件，即 $b = \sqrt{ac} \not\rightleftarrows a$、$b$、$c$ 等比数列.

ii. $b = \sqrt{ac}$ （ac>0）→为 a、b、c 等比数列的充分不必要.

iii. $b = \pm\sqrt{ac}$ →为 a、b、c 等比数列的必要不充分.

iv. $b = \pm\sqrt{ac}$ 且 $ac \succ 0$ →为 a、b、c 等比数列的充要.

注意：任意两数 a、c 不一定有等比中项，除非有 ac>0，则等比中项一定有两个.

③ $a_n = cq^n$ (c, q 为非零常数).

④正数列{ a_n }成等比的充要条件是数列{ $\log_x a_n$ }（ $x \succ 1$ ）成等比数列.

⑷数列{ a_n }的前 n 项和 S_n 与通项 a_n 的关系： $a_n = \begin{cases} s_1 = a_1 (n = 1) \\ s_n - s_{n-1} (n \geq 2) \end{cases}$

[注]： ① $a_n = a_1 + (n-1)d = nd + (a_1 - d)$（ d 可为零也可不为零→为等差数列充要条件（即常数列也是等差数列）→若 d 不为 0，则是等差数列充分条件）.
②等差{ a_n }前 n 项和 $S_n = An^2 + Bn = \left(\frac{d}{2}\right)n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$ → $\frac{d}{2}$ 可以为零也可不为零→为等差的充要条件→若 d 为零，则是等差数列的充分条件；若 d 不为零，则是等差数列的充分条件.
③非零常数列既可为等比数列，也可为等差数列.（不是非零，即不可能有等比数列）
2. ① 等差数列依次每 k 项的和仍成等差数列，其公差为原公差的 k^2 倍 $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k} \ldots$；

②若等差数列的项数为 $2n(n \in N^+)$，则 $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd$，$\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$；

③若等差数列的项数为 $2n-1(n \in N^+)$，则 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$，且 $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_n$，$\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n}{n-1}$

$\Rightarrow$ 代入 n 到 $2n-1$ 得到所求项数.

3. 常用公式：① $1+2+3 \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

② $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

③$1^3+2^3+3^3\cdots n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

[注]：熟悉常用通项：9，99，999，…$\Rightarrow a_n=10^n-1$； 5，55，555，…$\Rightarrow a_n=\frac{5}{9}\left(10^n-1\right)$.

4. 等比数列的前 n 项和公式的常见应用题：

⑴生产部门中有增长率的总产量问题. 例如，第一年产量为 a，年增长率为 r，则每年的产量成等比数列，公比为 $1+r$. 其中第 n 年产量为 $a(1+r)^{n-1}$，且过 n 年后总产量为：

$$a+a(1+r)+a(1+r)^2+\ldots+a(1+r)^{n-1}=\frac{a[a-(1+r)^n]}{1-(1+r)}.$$

⑵银行部门中按复利计算问题. 例如：一年中每月初到银行存 a 元，利息为 r，每月利息按复利计算，则每月的 a 元过 n 个月后便成为 $a(1+r)^n$ 元. 因此，第二年年初可存款：

$$a(1+r)^{12}+a(1+r)^{11}+a(1+r)^{10}+\ldots+a(1+r)=\frac{a(1+r)[1-(1+r)^{12}]}{1-(1+r)}.$$

⑶分期付款应用题：a 为分期付款方式贷款为 a 元；m 为 m 个月将款全部付清；r 为年利率.

$$a(1+r)^m=x(1+r)^{m-1}+x(1+r)^{m-2}+\ldots\ldots x(1+r)+x\Rightarrow a(1+r)^m=\frac{x(1+r)^m-1}{r}\Rightarrow x=\frac{ar(1+r)^m}{(1+r)^m-1}$$

5. 数列常见的几种形式：

⑴ $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$（p、q 为二阶常数）$\rightarrow$ 用特证根方法求解.

具体步骤：①写出特征方程 $x^2=Px+q$（x^2 对应 a_{n+2}，x 对应 a_{n+1}），并设二根 x_1,x_2 ②若 $x_1\neq x_2$ 可设 $a_{n.}=c_1x_1^n+c_2x_2^n$，若 $x_1=x_2$ 可设 $a_n=(c_1+c_2n)x_1^n$；③由初始值 a_1,a_2 确定 c_1,c_2.

⑵ $a_n=Pa_{n-1}+r$（P、r 为常数）$\rightarrow$ 用①转化等差，等比数列；②逐项选代；③消去常数 n 转化为 $a_{n+2}=Pa_{n+1}+qa_n$ 的形式，再用特征根方法求 a_n；④ $a_n=c_1+c_2P^{n-1}$（公式法），c_1,c_2 由 a_1,a_2 确定.

①转化等差，等比：$a_{n+1}+x=P(a_n+x)\Rightarrow a_{n+1}=Pa_n+Px-x\Rightarrow x=\frac{r}{P-1}$.

②选代法：$a_n=Pa_{n-1}+r=P(Pa_{n-2}+r)+r=\cdots\Rightarrow a_n=(a_1+\frac{r}{P-1})P^{n-1}-\frac{r}{P-1}=(a_1+x)P^{n-1}-x$

$=P^{n-1}a_1+P^{n-2}\cdot r+\cdots+\mathrm{Pr}+r$.

③用特征方程求解：$\left.\begin{matrix}a_{n+1}=Pa_n+r\\a_n=Pa_{n-1}+r\end{matrix}\right\}$相减，$\Rightarrow a_{n+1}-a_n=Pa_n-Pa_{n-1}\Rightarrow a_{n+1}=(P+1)\ a_n-Pa_{n-1}$.

④由选代法推导结果：$c_1=\frac{r}{1-P}$，$c_2=a_1+\frac{r}{P-1}$，$a_n=c_2P^{n-1}+c_1=(a_1+\frac{r}{P-1})\ P^{n-1}+\frac{r}{1-P}$.

6. 几种常见的数列的思想方法：

⑴等差数列的前 n 项和为 S_n，在 $d \prec 0$ 时，有最大值. 如何确定使 S_n 取最大值时的 n 值，有两种方法：

一是求使 $a_n \ge 0, a_{n+1} \prec 0$，成立的 n 值；二是由 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$ 利用二次函数的性质求 n 的值.

⑵如果数列可以看作是一个等差数列与一个等比数列的对应项乘积，求此数列前 n 项和可依照等比数列前 n 项和的推倒导方法：错位相减求和. 例如：$1\cdot\frac{1}{2},3\frac{1}{4},...(2n-1)\frac{1}{2^n},...$

⑶两个等差数列的相同项亦组成一个新的等差数列，此等差数列的首项就是原两个数列的第一个相同项，公差是两个数列公差 d_1，d_2 的最小公倍数.

2. 判断和证明数列是等差（等比）数列常有三种方法：(1)定义法:对于 n≥2 的任意自然数,验证 $a_n - a_{n-1}(\frac{a_n}{a_{n-1}})$ 为同一常数。(2)通项公式法。(3)中项公式法:验证 $2a_{n+1} = a_n + a_{n-2}\ (a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2})n \in N$ 都成立。

3. 在等差数列｛a_n｝中,有关 S_n 的最值问题：(1)当 a_1>0,d<0 时，满足 $\begin{cases} a_m \ge 0 \\ a_{m+1} \le 0 \end{cases}$ 的项数 m 使得 s_m 取最大值. (2)当 a_1<0,d>0 时，满足 $\begin{cases} a_m \le 0 \\ a_{m+1} \ge 0 \end{cases}$ 的项数 m 使得 s_m 取最小值。在解含绝对值的数列最值问题时,注意转化思想的应用。

（三）、数列求和的常用方法

1. 公式法:适用于等差、等比数列或可转化为等差、等比数列的数列。

2.裂项相消法:适用于 $\left\{\frac{c}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 其中{ a_n }是各项不为 0 的等差数列，c 为常数；部分无理数列、含阶乘的数列等。

3.错位相减法:适用于 $\{a_n b_n\}$ 其中{ a_n }是等差数列，$\{b_n\}$ 是各项不为 0 的等比数列。

4.倒序相加法: 类似于等差数列前 n 项和公式的推导方法.

5.常用结论

1）: 1+2+3+...+n = $\frac{n(n+1)}{2}$

2） 1+3+5+...+(2n-1) $= n^2$

3）$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$

4） $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

5） $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ $\quad \dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2})$

6） $\dfrac{1}{pq}=\dfrac{1}{q-p}(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q})\quad (p<q)$

高中数学第四章-三角函数

考试内容：

角的概念的推广．弧度制．

任意角的三角函数．单位圆中的三角函数线．同角三角函数的基本关系式.正弦、余弦的诱导公式．

两角和与差的正弦、余弦、正切．二倍角的正弦、余弦、正切．

正弦函数、余弦函数的图像和性质．周期函数．函数 y=Asin(ωx+φ)的图像．正切函数的图像和性质．已知三角函数值求角．

正弦定理．余弦定理．斜三角形解法．

考试要求：

（1）理解任意角的概念、弧度的意义能正确地进行弧度与角度的换算．

（2）掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义；了解余切、正割、余割的定义；掌握同角三角函数的基本关系式；掌握正弦、余弦的诱导公式；了解周期函数与最小正周期的意义．

（3）掌握两角和与两角差的正弦、余弦、正切公式；掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式．

（4）能正确运用三角公式，进行简单三角函数式的化简、求值和恒等式证明．

（5）理解正弦函数、余弦函数、正切函数的图像和性质，会用“五点法”画正弦函数、余弦函数和函数 y=Asin(ωx+φ)的简图，理解 A.ω、φ的物理意义．

（6）会由已知三角函数值求角，并会用符号 arcsinx\arc-cosx\arctanx 表示．

（7）掌握正弦定理、余弦定理，并能初步运用它们解斜三角形．

（8）“同角三角函数基本关系式：sin2α+cos2α=1，sinα/cosα=tanα,tanα•cosα=1”．

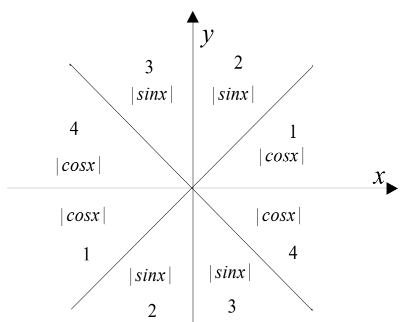
§04. 三角函数　知识要点

1. ①与 α （0°≤ α ＜360°）终边相同的角的集合（角 α 与角 β 的终边重合）：$\{\beta\mid\beta=k\times360^\circ+\alpha,k\in Z\}$

②终边在 x 轴上的角的集合：$\{\beta\mid\beta=k\times180^\circ,k\in Z\}$

③终边在 y 轴上的角的集合：$\{\beta\mid\beta=k\times180^\circ+90^\circ,k\in Z\}$

④终边在坐标轴上的角的集合：$\{\beta\mid\beta=k\times90^\circ,k\in Z\}$



SIN\COS三角函数值大小关系图

1、2、3、4表示第一、二、三、四象限一半所在区域

⑤终边在 $y=x$ 轴上的角的集合：$\{\beta \mid \beta = k\times 180^\circ + 45^\circ, k\in Z\}$

⑥终边在 $y=-x$ 轴上的角的集合：$\{\beta \mid \beta = k\times 180^\circ - 45^\circ, k\in Z\}$

⑦若角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称，则角 α 与角 β 的关系：$\alpha = 360^\circ k - \beta$

⑧若角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称，则角 α 与角 β 的关系：$\alpha = 360^\circ k + 180^\circ - \beta$

⑨若角 α 与角 β 的终边在一条直线上，则角 α 与角 β 的关系：$\alpha = 180^\circ k + \beta$

⑩角 α 与角 β 的终边互相垂直，则角 α 与角 β 的关系：$\alpha = 360^\circ k + \beta \pm 90^\circ$

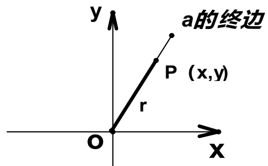
2. 角度与弧度的互换关系：360°=2π　180°=π　1°=0.01745　1=57.30°=57°18′
注意：正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为零.

、弧度与角度互换公式：　$1\text{rad} = \frac{180}{\pi}^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ\ 18'$.　　$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0.01745$（rad）

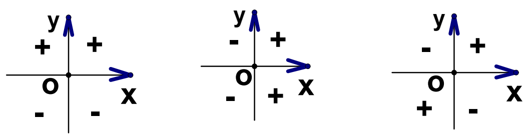
3、弧长公式：$l = |\alpha| \cdot r$.　　扇形面积公式：$s_{扇形} = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2}|\alpha| \cdot r^2$

4、三角函数：设 α 是一个任意角，在 α 的终边上任取（异于原点的）一点 P（x,y）P 与原点的距离为 r，则 $\sin\alpha = \frac{y}{r}$；

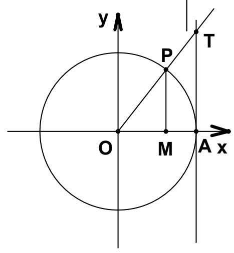
$\cos\alpha = \frac{x}{r}$；　$\tan\alpha = \frac{y}{x}$；　$\cot\alpha = \frac{x}{y}$；　$\sec\alpha = \frac{r}{x}$；．$\csc\alpha = \frac{r}{y}$.



5、三角函数在各象限的符号：（一全二正弦，三切四余弦）



正弦、余割　　余弦、正割　　正切、余切



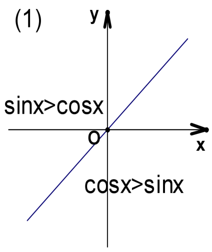
6、三角函数线

正弦线：MP；　余弦线：OM；　正切线：AT.

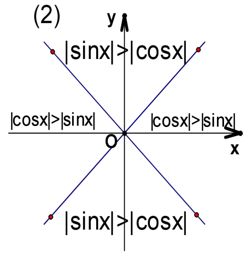
7. 三角函数的定义域：

16. 几个重要结论:

(1)



(2)



(3) 若 $0<x<\frac{\pi}{2}$，则sinx<x<tanx

三角函数	定义域
$f(x)=\sin x$	$\{x \mid x\in R\}$
$f(x)=\cos x$	$\{x \mid x\in R\}$

$f(x)=\tan x$	$\left\{x \mid x\in R且x\neq k\pi+\frac{1}{2}\pi, k\in Z\right\}$
$f(x)=\cot x$	$\{x \mid x\in R且x\neq k\pi, k\in Z\}$
$f(x)=\sec x$	$\left\{x \mid x\in R且x\neq k\pi+\frac{1}{2}\pi, k\in Z\right\}$
$f(x)=\csc x$	$\{x \mid x\in R且x\neq k\pi, k\in Z\}$

8、同角三角函数的基本关系式：$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$　$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$

$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$　$\csc\alpha\cdot\sin\alpha=1$　$\sec\alpha\cdot\cos\alpha=1$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$　$\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=1$　$\csc^2\alpha-\cot^2\alpha=1$

9、诱导公式：

把$\frac{k\pi}{2}\pm\alpha$的三角函数化为α的三角函数，概括为：

“奇变偶不变，符号看象限”

三角函数的公式：（一）基本关系

公式组一

$\sin x\cdot\csc x=1$　$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$　$\sin^2x+\cos^2x=1$

$\cos x\cdot\sec x=1$　$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$　$1+\tan^2x=\sec^2x$

$\tan x\cdot\cot x=1$　$1+\cot^2x=\csc^2x$

公式组二

$\sin(2k\pi+x)=\sin x$

$\cos(2k\pi+x)=\cos x$

$\tan(2k\pi+x)=\tan x$

$\cot(2k\pi+x)=\cot x$

公式组三

$\sin(-x)=-\sin x$

$\cos(-x)=\cos x$

$\tan(-x)=-\tan x$

$\cot(-x)=-\cot x$

公式组四

$\sin(\pi+x)=-\sin x$

$\cos(\pi+x)=-\cos x$

$\tan(\pi+x)=\tan x$

$\cot(\pi+x)=\cot x$

公式组五

$\sin(2\pi-x)=-\sin x$

$\cos(2\pi-x)=\cos x$

$\tan(2\pi-x)=-\tan x$

$\cot(2\pi-x)=-\cot x$

公式组六

$\sin(\pi-x)=\sin x$

$\cos(\pi-x)=-\cos x$

$\tan(\pi-x)=-\tan x$

$\cot(\pi-x)=-\cot x$

（二）角与角之间的互换

公式组一

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

公式组二

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

公式组三

公式组四

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

公式组五

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

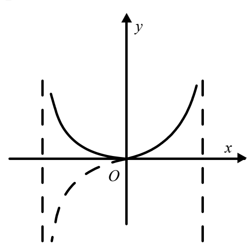
$$\cos(\frac{1}{2}\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\sin(\frac{1}{2}\pi-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(\frac{1}{2}\pi-\alpha)=\cot\alpha$$
$$\cos(\frac{1}{2}\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\tan(\frac{1}{2}\pi+\alpha)=-\cot\alpha$$
$$\sin(\frac{1}{2}\pi+\alpha)=\cos\alpha$$

$\sin15^\circ=\cos75^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\sin75^\circ=\cos15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\tan15^\circ=\cot75^\circ=2-\sqrt{3}$，$\tan75^\circ=\cot15^\circ=2+\sqrt{3}$.

10. 正弦、余弦、正切、余切函数的图象的性质：

	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$	$y=A\sin(\omega x+\varphi)$（A、$\omega>0$）
定义域	R	R	$\left\{x\mid x\in R且x\neq k\pi+\frac{1}{2}\pi,k\in Z\right\}$	$\{x\mid x\in R且x\neq k\pi,k\in Z\}$	R
值域	$[-1,+1]$	$[-1,+1]$	R	R	$[-A,A]$
周期性	2π	2π	π	π	$\frac{2\pi}{\omega}$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数	当$\varphi\neq0$, 非奇非偶 当$\varphi=0$, 奇函数
单调性	$[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$上为增函数；$[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi]$上为减函数（$k\in Z$）	$[(2k-1)\pi,2k\pi]$；上为增函数 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$上为减函数（$k\in Z$）	$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$上为增函数（$k\in Z$）	$(k\pi,(k+1)\pi)$上为减函数（$k\in Z$）	$\left[\frac{2k\pi-\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}(A),\frac{2k\pi+\frac{1}{2}\pi-\varphi}{\omega}(-A)\right]$上为增函数；$\left[\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}(A),\frac{2k\pi+\frac{3}{2}\pi-\varphi}{\omega}(-A)\right]$上为减函数（$k\in Z$）

注意：① $y=-\sin x$ 与 $y=\sin x$ 的单调性正好相反； $y=-\cos x$ 与 $y=\cos x$ 的单调性也同样相反.一般地，若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增（减），则 $y=-f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递减（增）.



②$y=|\sin x|$与$y=|\cos x|$的周期是π.

③$y=\sin(\omega x+\varphi)$或$y=\cos(\omega x+\varphi)$（$\omega\neq 0$）的周期$T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

$y=\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$的周期为$2\pi$（$T=\dfrac{\pi}{|\omega|}\Rightarrow T=2\pi$，如图，翻折无效）.

④$y=\sin(\omega x+\varphi)$的对称轴方程是$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$（$k\in Z$），对称中心（$k\pi,0$）；$y=\cos(\omega x+\varphi)$的对称轴方程是$x=k\pi$（$k\in Z$），对称中心（$k\pi+\frac{1}{2}\pi,0$）；$y=\tan(\omega x+\varphi)$的对称中心（$\dfrac{k\pi}{2},0$）.

$y=\cos 2x\xrightarrow{\text{原点对称}}y=-\cos(-2x)=-\cos 2x$

⑤当$\tan\alpha\cdot\tan\beta=1,\ \alpha+\beta=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$；$\tan\alpha\cdot\tan\beta=-1,\ \alpha-\beta=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$.

⑥$y=\cos x$与$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$是同一函数,而$y=(\omega x+\varphi)$是偶函数，则

$y=(\omega x+\varphi)=\sin(\omega x+k\pi+\frac{1}{2}\pi)=\pm\cos(\omega x)$·

⑦函数$y=\tan x$在R上为增函数.（×） [只能在某个单调区间单调递增. 若在整个定义域，$y=\tan x$为增函数，同样也是错误的].

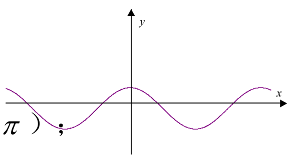
⑧定义域关于原点对称是$f(x)$具有奇偶性的<u>必要不充分条件.</u>（奇偶性的两个条件：一是定义域关于原点对称（奇偶都要），二是满足奇偶性条件，偶函数：$f(-x)=f(x)$，奇函数：$f(-x)=-f(x)$）

奇偶性的单调性：奇同偶反. 例如：$y=\tan x$是奇函数，$y=\tan(x+\frac{1}{3}\pi)$是非奇非偶.（定义域不关于原点对称）

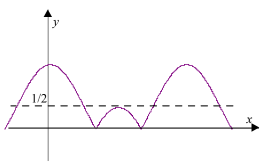
奇函数特有性质：若$0\in x$的定义域，则$f(x)$一定有$f(0)=0$.（$0\notin x$的定义域，则无此性质）

⑨$y=\sin|x|$不是周期函数；$y=|\sin x|$为周期函数（$T=\pi$）；

$y=\cos|x|$是周期函数（如图）；$y=|\cos x|$为周期函数（$T=\pi$）；



y=cos|x|图象



y=|cos2x+1/2|图象

$y=\left|\cos 2x+\dfrac{1}{2}\right|$的周期为$\pi$（如图），并非所有周期函数都有最小正周期，例如：

$y=f(x)=5=f(x+k),k\in R$.

⑩$y=a\cos\alpha+b\sin\beta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)+\cos\varphi=\dfrac{b}{a}$ 有$\sqrt{a^2+b^2}\geq|y|$.

11、三角函数图象的作法：

1）、几何法：

2）、描点法及其特例——五点作图法（正、余弦曲线），三点二线作图法（正、余切曲线）.

3）、利用图象变换作三角函数图象.

三角函数的图象变换有振幅变换、周期变换和相位变换等.

函数 y＝Asin（ωx＋φ）的振幅|A|，周期$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，频率$f=\frac{1}{T}=\frac{|\omega|}{2\pi}$，相位$\omega x+\varphi$;初相$\varphi$（即当 x＝0 时的相位）．（当 A＞0，ω＞0 时以上公式可去绝对值符号），

由 y＝sinx 的图象上的点的横坐标保持不变，纵坐标伸长（当|A|＞1）或缩短（当 0＜|A|＜1）到原来的|A|倍，得到 y＝Asinx 的图象，叫做**振幅变换**或叫沿 y 轴的伸缩变换．（用 y/A 替换 y）

由 y＝sinx 的图象上的点的纵坐标保持不变，横坐标伸长（0＜|ω|＜1）或缩短（|ω|＞1）到原来的$|\frac{1}{\omega}|$倍，得到 y＝sinω x 的图象，叫做**周期变换**或叫做沿 x 轴的伸缩变换．(用ωx 替换 x)

由 y＝sinx 的图象上所有的点向左（当φ＞0）或向右（当φ＜0）平行移动｜φ｜个单位，得到 y＝sin（x＋φ）的图象，叫做**相位变换**或叫做沿 x 轴方向的平移．(用 x＋φ替换 x)

由 y＝sinx 的图象上所有的点向上（当 b＞0）或向下（当 b＜0）平行移动｜b｜个单位，得到 y＝sinx＋b 的图象叫做沿 y 轴方向的平移．（用 y+(-b)替换 y）

由 y＝sinx 的图象利用图象变换作函数 y＝Asin（ωx＋φ）（A＞0，ω＞0）（x∈R）的图象，要特别注意：当周期变换和相位变换的先后顺序不同时，原图象延 x 轴量伸缩量的区别。

4、反三角函数：

函数 *y*＝sin*x*，$\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$的反函数叫做**反正弦函数**，记作 *y*＝arcsin*x*，它的定义域是［－1，1］，值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

函数 *y*＝cos*x*，（*x*∈［0，π］）的反应函数叫做**反余弦函数**，记作 *y*＝arccos*x*，它的定义域是［－1，1］，值域是［0，π］.

函数 *y*＝tan*x*，$\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$的反函数叫做**反正切函数**，记作 *y*＝arctan*x*，它的定义域是（－∞，＋∞），值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

函数 *y*＝ctg*x*，［*x*∈（0，π）］的反函数叫做**反余切函数**，记作 *y*＝arcctg*x*，它的定义域是（－∞，＋∞），值域是（0，π）.

II. 竞赛知识要点

一、反三角函数.

1. 反三角函数：⑴反正弦函数 $y=\arcsin x$ 是奇函数，故 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$，$x\in[-1,1]$（一定要注明定义域，若 $x\in(-\infty,+\infty)$，没有 x 与 y 一一对应，故 $y=\sin x$ 无反函数）

注：$\sin(\arcsin x)=x$，$x\in[-1,1]$，$\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

(2)反余弦函数 $y=\arccos x$ 非奇非偶，但有 $\arccos(-x)+\arccos(x)=\pi+2k\pi$，$x\in[-1,1]$.

注：①$\cos(\arccos x)=x$，$x\in[-1,1]$，$\arccos x\in[0,\pi]$.

② $y=\cos x$ 是偶函数，$y=\arccos x$ 非奇非偶，而 $y=\sin x$ 和 $y=\arcsin x$ 为奇函数.

(3)反正切函数：$y=\arctan x$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，值域（$-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$），$y=\arctan x$ 是奇函数，

$\arctan(-x)=-\arctan x$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

注：$\tan(\arctan x)=x$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(4)反余切函数：$y=arc\cot x$，定义域 $(-\infty,+\infty)$，值域（$-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$），$y=arc\cot x$ 是非奇非偶.

$arc\cot(-x)+arc\cot(x)=\pi+2k\pi$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

注：①$\cot(arc\cot x)=x$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

② $y=\arcsin x$ 与 $y=\arcsin(1-x)$ 互为奇函数，$y=\arctan x$ 同理为奇而 $y=\arccos x$ 与 $y=arc\cot x$ 非奇非偶但满足 $\arccos(-x)+\arccos x=\pi+2k\pi, x\in[-1,1] arc\cot x+arc\cot(-x)=\pi+2k\pi, x\in[-1,1]$.

(2) 正弦、余弦、正切、余切函数的解集：

a 的取值范围	解集	a 的取值范围	解集
①$\sin x=a$ 的解集		**②$\cos x=a$ 的解集**	
$\lvert a\rvert>1$	$\varnothing$	$\lvert a\rvert>1$	$\varnothing$
$\lvert a\rvert=1$	$\{x\mid x=2k\pi+\arcsin a, k\in Z\}$	$\lvert a\rvert=1$	$\{x\mid x=2k\pi+\arccos a, k\in Z\}$
$\lvert a\rvert<1$	$\{x\mid x=k\pi+(-1)^k\arcsin a, k\in Z\}$	$\lvert a\rvert<1$	$\{x\mid x=k\pi\pm\arccos a, k\in Z\}$

③ $\tan x=a$ **的解集：**$\{x\mid x=k\pi+\arctan a, k\in Z\}$

③ $\cot x=a$ **的解集：**$\{x\mid x=k\pi+arc\cot a, k\in Z\}$

二、三角恒等式.

组一

$$\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\ldots\cos2^n\alpha=\frac{\sin2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$$

$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$$

组二

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}=\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(x+kd)=\cos x+\cos(x+d)+\cdots+\cos(x+nd)=\frac{\sin((n+1)d)\cos(x+nd)}{\sin d}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(x+kd)=\sin x+\sin(x+d)+\cdots+\sin(x+nd)=\frac{\sin((n+1)d)\sin(x+nd)}{\sin d}$$

$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}$

组三 三角函数不等式

$\sin x < x < \tan x, x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$　　　　　$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上是减函数

若 $A+B+C=\pi$，则 $x^2+y^2+z^2\ge 2yz\cos A+2xz\cos B+2xy\cos C$

高中数学第五章-平面向量

考试内容：

向量．向量的加法与减法．实数与向量的积．平面向量的坐标表示．线段的定比分点．平面向量的数量积．平面两点间的距离、平移．

考试要求：

（1）理解向量的概念，掌握向量的几何表示，了解共线向量的概念．

（2）掌握向量的加法和减法．

（3）掌握实数与向量的积，理解两个向量共线的充要条件．

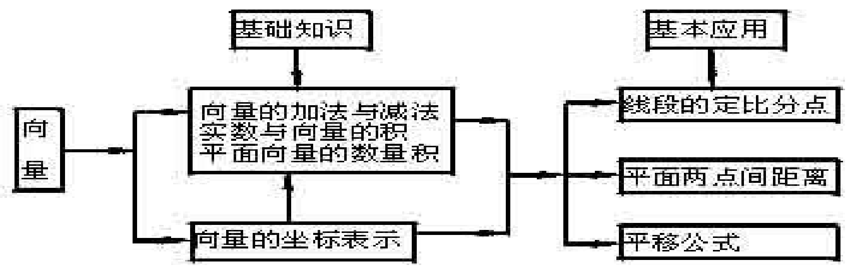
（4）了解平面向量的基本定理，理解平面向量的坐标的概念，掌握平面向量的坐标运算．

（5）掌握平面向量的数量积及其几何意义，了解用平面向量的数量积可以处理有关长度、角度和垂直的问题，掌握向量垂直的条件．

（6）掌握平面两点间的距离公式，以及线段的定比分点和中点坐标公式，并且能熟练运用掌握平移公式．

§05. 平面向量　知识要点

1. 本章知识网络结构



2. 向量的概念

(1)向量的基本要素：大小和方向．　(2)向量的表示：几何表示法 $\overrightarrow{AB}$；字母表示：$\boldsymbol{a}$；

　　坐标表示法 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=(x,\ y)$．

(3)向量的长度：即向量的大小，记作 $|\boldsymbol{a}|$．

(4)特殊的向量：零向量 $\boldsymbol{a}=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}|=0$.

　　单位向量 $\boldsymbol{a}_0$ 为单位向量 $\Leftrightarrow|\boldsymbol{a}_0|=1$.

(5)相等的向量：大小相等，方向相同　$(x_1,\ y_1)=(x_2,\ y_2)\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=y_2\end{cases}$

(6)　相反向量：$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

(7)平行向量(共线向量)：方向相同或相反的向量，称为平行向量. 记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 平行向量也称为共线向量.

3. 向量的运算

运算类型	几何方法	坐标方法	运算性质
向量的加法	1. 平行四边形法则 2. 三角形法则	$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
向量的减法	三角形法则	$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$	$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$
数乘向量	1. $\lambda\vec{a}$ 是一个向量，满足: $\|\lambda\vec{a}\|=\|\lambda\|\|\vec{a}\|$ 2. $\lambda>0$ 时， $\lambda\vec{a}与\vec{a}$ 同向； $\lambda<0$ 时， $\lambda\vec{a}与\vec{a}$ 异向； $\lambda=0$ 时， $\lambda\vec{a}=\vec{0}$.	$\lambda\vec{a}=(\lambda x,\lambda y)$	$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}$
向量的数量积	$\vec{a}\bullet\vec{b}$ 是一个数 1. $\vec{a}=\vec{0}或\vec{b}=\vec{0}$ 时， $\vec{a}\bullet\vec{b}=0$. 2. $\vec{a}\neq\vec{0}且\vec{b}\neq\vec{0}$时， $\vec{a}\bullet\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(a,b)$	$\vec{a}\bullet\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$	$\vec{a}\bullet\vec{b}=\vec{b}\bullet\vec{a}$ $(\lambda\vec{a})\bullet\vec{b}=\vec{a}\bullet(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\bullet\vec{b})$ $(\vec{a}+\vec{b})\bullet\vec{c}=\vec{a}\bullet\vec{c}+\vec{b}\bullet\vec{c}$ $\vec{a}^2=\|\vec{a}\|^2$ 即$\|\vec{a}\|=\sqrt{x^2+y^2}$ $\|\vec{a}\bullet\vec{b}\|\leq\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$

4. 重要定理、公式

(1) 平面向量基本定理

$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$是同一平面内两个不共线的向量，那么，对于这个平面内任一向量，有且仅有一对实数 λ_1，

λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

(2) 两个向量平行的充要条件

$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

(3) 两个向量垂直的充要条件

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

(4) 线段的定比分点公式

设点 P 分有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比为 λ，即 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_1}+\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_2}$$ （线段的定比分点的向量公式）

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases}$$ （线段定比分点的坐标公式）

当 $\lambda=1$ 时，得中点公式：

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}) \text{ 或 } \begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}. \end{cases}$$

(5)平移公式

设点 $P(x,y)$ 按向量 $\boldsymbol{a}=(h,k)$ 平移后得到点 $P'(x',y')$，

则 $\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\boldsymbol{a}$ 或 $\begin{cases} x'=x+h, \\ y'=y+k. \end{cases}$

曲线 $y=f(x)$ 按向量 $\boldsymbol{a}=(h,k)$ 平移后所得的曲线的函数解析式为：$y-k=f(x-h)$

(6)正、余弦定理

正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R.$

余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$,

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

（7）三角形面积计算公式：

设△ABC 的三边为 a，b，c，其高分别为 h_a，h_b，h_c，半周长为 P，外接圆、内切圆的半径为 R，r.

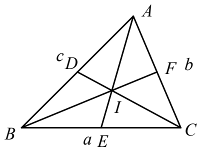
①$S_\triangle=1/2ah_a=1/2bh_b=1/2ch_c$　　②$S_\triangle=Pr$　　③$S_\triangle=abc/4R$

④$S_\triangle=1/2\sin C\cdot ab=1/2ac\cdot\sin B=1/2cb\cdot\sin A$　　⑤$S_\triangle=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$　*[海伦公式]*

⑥$S_\triangle=1/2(b+c-a)r_a$*[如下图]*$=1/2(b+a-c)r_c=1/2(a+c-b)r_b$

[注]：到三角形三边的距离相等的点有 4 个，一个是内心，其余 3 个是旁心.

如图：



I图

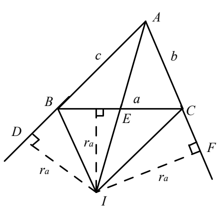


图2

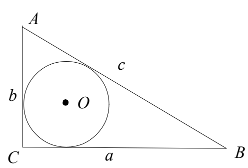


图3

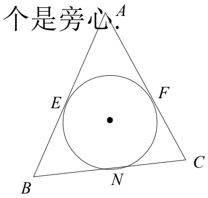


图4

图 1 中的 I 为 $S_{\triangle ABC}$ 的内心，　$S_\triangle=Pr$

图 2 中的 I 为 $S_{\triangle ABC}$ 的一个旁心，$S_{\triangle}=1/2（b+c-a）r_a$

附：三角形的五个“心”；
重心：三角形三条中线交点.
外心：三角形三边垂直平分线相交于一点.
内心：三角形三内角的平分线相交于一点.
垂心：三角形三边上的高相交于一点.
旁心：三角形一内角的平分线与另两条内角的外角平分线相交一点.

⑸已知⊙O 是△ABC 的内切圆，若 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$ [注：s 为△ABC 的半周长,即 $\frac{a+b+c}{2}$]

则：①$AE=s-a=1/2（b+c-a）$
②$BN=s-b=1/2（a+c-b）$
③$FC=s-c=1/2（a+b-c）$
综合上述：由已知得，一个角的邻边的切线长，等于半周长减去对边（如图 4）.

特例：已知在 $Rt\triangle ABC$，c 为斜边，则内切圆半径 $r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{ab}{a+b+c}$ （如图 3）.

⑹在△ABC 中，有下列等式成立 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$.

证明：因为 $A+B=\pi-C$,所以 $\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$，所以 $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$， ∴结论！

⑺在△ABC 中，D 是 BC 上任意一点，则 $AD^2=\frac{AC^2BD+AB^2BC}{BC}-BD\cdot DC$.

证明：在△$ABCD$ 中，由余弦定理，有 $AD^2=AB^2+BD^2-2\cdot AB\cdot BD\cos B\cdots$①

在△ABC 中，由余弦定理有 $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}\cdots$②，②代入①，化简

可得，$AD^2=\frac{AC^2BD+AB^2BC}{BC}-BD\cdot DC$（斯德瓦定理）

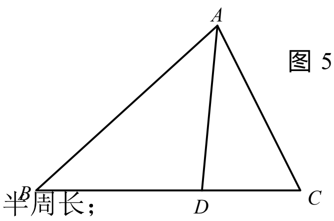


图 5

①若 AD 是 BC 上的中线，$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$；

②若 AD 是∠A 的平分线，$t_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc\cdot p(p-a)}$，其中 p 为半周长；

③若 AD 是 BC 上的高，$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中 p 为半周长.

⑻△ABC 的判定：

$c^2=a^2+b^2\Leftrightarrow\triangle ABC$ 为直角△ $\Leftrightarrow$ ∠A + ∠B $=\frac{\pi}{2}$

$c^2<a^2+b^2\Leftrightarrow\triangle ABC$ 为钝角△ $\Leftrightarrow$ ∠A + ∠B$<\frac{\pi}{2}$

$c^2>a^2+b^2\Leftrightarrow\triangle ABC$ 为锐角△ $\Leftrightarrow$ ∠A + ∠B$>\frac{\pi}{2}$

附：证明：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，得在钝角△$ABC$ 中，$\cos C\prec 0\Leftrightarrow a^2+b^2-c^2\prec 0,\Leftrightarrow a^2+b^2\prec c^2$

⑼平行四边形对角线定理：对角线的平方和等于四边的平方和.

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$$

空间向量

1．空间向量的概念：

具有大小和方向的量叫做向量

注：⑴空间的一个平移就是一个向量

⑵向量一般用有向线段表示同向等长的有向线段表示同一或相等的向量

⑶空间的两个向量可用同一平面内的两条有向线段来表示

2．空间向量的运算

定义：与平面向量运算一样，空间向量的加法、减法与数乘向量运算如下

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OP}=\lambda\vec{a}(\lambda\in R)$$

运算律：⑴加法交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

⑵加法结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

⑶数乘分配律：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

3 共线向量

表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，则这些向量叫做共线向量或平行向量．$\vec{a}$平行于$\vec{b}$记作$\vec{a}//\vec{b}$．

当我们说向量$\vec{a}$、$\vec{b}$共线（或$\vec{a}//\vec{b}$）时，表示$\vec{a}$、$\vec{b}$的有向线段所在的直线可能是同一直线，也可能是平行直线．

4．共线向量定理及其推论：

共线向量定理：空间任意两个向量$\vec{a}$、$\vec{b}$（$\vec{b}\neq\vec{0}$），$\vec{a}//\vec{b}$的充要条件是存在实数λ，使$\vec{a}=\lambda\vec{b}$．

推论：如果l为经过已知点 **A** 且平行于已知非零向量$\vec{a}$的直线，那么对于任意一点 **O**，点 **P** 在直线l上的充要条件是存在实数 ***t*** 满足等式

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\,\vec{a}.$$

其中向量$\vec{a}$叫做直线l的方向向量．

5．向量与平面平行：

已知平面α和向量$\vec{a}$，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，如果直线$OA$平行于$\alpha$或在$\alpha$内，那么我们说向量$\vec{a}$平行于平面$\alpha$，记作：$\vec{a}//\alpha$．

通常我们把平行于同一平面的向量，叫做共面向量

说明：空间任意的两向量都是共面的

6．共面向量定理：

如果两个向量 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，$\vec{p}$ 与向量 $\vec{a},\vec{b}$ 共面的充要条件是存在实数 x,y 使 $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$。

推论：空间一点 P 位于平面 MAB 内的充分必要条件是存在有序实数对 x,y，使 $\overrightarrow{MP}=x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$ 或对空间任一点 O，有 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}$　　①

①式叫做平面 MAB 的向量表达式。

7．空间向量基本定理：

如果三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，那么对空间任一向量 $\vec{p}$，存在一个唯一的有序实数组 x,y,z，使 $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$。

推论：设 O,A,B,C 是不共面的四点，则对空间任一点 P，都存在唯一的三个有序实数 x,y,z，使 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$。

8．空间向量的夹角及其表示：

已知两非零向量 $\vec{a},\vec{b}$，在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角，记作 $<\vec{a},\vec{b}>$；且规定 $0\le<\vec{a},\vec{b}>\le\pi$，显然有 $<\vec{a},\vec{b}>=<\vec{b},\vec{a}>$；若 $<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{2}$，则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 互相垂直，记作：$\vec{a}\perp\vec{b}$.

9．向量的模：

设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，则有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 的长度叫做向量 $\vec{a}$ 的长度或模，记作：$|\vec{a}|$.

10．向量的数量积：　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos<\vec{a},\vec{b}>$.

已知向量 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ 和轴 l，$\vec{e}$ 是 l 上与 l 同方向的单位向量，作点 A 在 l 上的射影 A'，作点 B 在 l 上的射影 B'，则 $\overrightarrow{A'B'}$ 叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 l 上或在 $\vec{e}$ 上的正射影.

可以证明 $\overrightarrow{A'B'}$ 的长度 $|\overrightarrow{A'B'}|=|\overrightarrow{AB}|\cos<\vec{a},\vec{e}>=|\vec{a}\cdot\vec{e}|$.

11．空间向量数量积的性质：

（1）$\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}|\cos<\vec{a},\vec{e}>$．（2）$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$．（3）$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$．

12．空间向量数量积运算律：

（1）$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$．（2）$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$（交换律）（3）$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$（分配律）．

空间向量的坐标运算

一．知识回顾：

（1）空间向量的坐标：空间直角坐标系的 x 轴是横轴（对应为横坐标），y 轴是纵轴（对应为纵轴），z 轴是竖轴（对应为竖坐标）．

①令 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$　　$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)(\lambda\in R)$　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3(\lambda\in R)\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$　　$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$（用到常用的向量模与向量之间的转化：$\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$）

$$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

②空间两点的距离公式：$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$．

（2）法向量：若向量 $\vec{a}$ 所在直线垂直于平面 α，则称这个向量垂直于平面 α，记作 $\vec{a}\perp\alpha$，如果 $\vec{a}\perp\alpha$ 那么向量 $\vec{a}$ 叫做平面 α 的法向量.

（3）用向量的常用方法：

①利用法向量求点到面的距离定理：如图，设 n 是平面 α 的法向量，AB 是平面 α 的一条射线，其中 $A\in\alpha$，则点 B 到平面 α 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$.

②利用法向量求二面角的平面角定理：设 $\vec{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 分别是二面角 $\alpha-l-\beta$ 中平面 α,β 的法向量，则 $\vec{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 所成的角就是所求二面角的平面角或其补角大小（$\vec{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 方向相同，则为补角，$\vec{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 反方，则为其夹角）.

③证直线和平面平行定理：已知直线 $a\neq\not\subset$ 平面 α，$A\cdot B\in a,C\cdot D\in\alpha$，且 CDE 三点不共线，则 a// α 的充要条件是存在有序实数对 $\lambda\cdot\mu$ 使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CE}$.（常设 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CE}$ 求解 λ,μ 若 λ,μ 存在即证毕，若 λ,μ 不存在，则直线 AB 与平面相交）.

高中数学第六章-不等式

考试内容：

不等式．不等式的基本性质．不等式的证明．不等式的解法．含绝对值的不等式．

考试要求：

（1）理解不等式的性质及其证明．

（2）掌握两个（不扩展到三个）正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理，并会简单的应用．

（3）掌握分析法、综合法、比较法证明简单的不等式．

（4）掌握简单不等式的解法．

（5）理解不等式│a│-│b│≤│a+b│≤│a│+│b│

§06. 不 等 式　知识要点

1.　不等式的基本概念

（1）　不等（等）号的定义：$a-b>0 \Leftrightarrow a>b; a-b=0 \Leftrightarrow a=b; a-b<0 \Leftrightarrow a<b.$

（2）　不等式的分类：绝对不等式；条件不等式；矛盾不等式.

（3）　同向不等式与异向不等式.

（4）　同解不等式与不等式的同解变形.

2. 不等式的基本性质

（1）$a>b \Leftrightarrow b<a$（对称性）

（2）$a>b, b>c \Rightarrow a>c$（传递性）

（3）$a>b \Rightarrow a+c>b+c$（加法单调性）

（4）$a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$（同向不等式相加）

（5）$a>b, c<d \Rightarrow a-c>b-d$（异向不等式相减）

（6）$a.>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$

（7）$a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$（乘法单调性）

（8）$a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$（同向不等式相乘）

(9) $a>b>0, 0<c<d \Rightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{d}$（异向不等式相除）

(10) $a>b, ab>0 \Rightarrow \frac{1}{a}<\frac{1}{b}$（倒数关系）

（11）$a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n (n\in Z, 且 n>1)$（平方法则）

（12）$a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b} (n\in Z, 且 n>1)$（开方法则）

3. 几个重要不等式

（1）$若 a\in R, 则 |a|\geq 0, a^2\geq 0$

（2）$若 a、b\in R^+, 则 a^2+b^2\geq 2ab (或 a^2+b^2\geq 2|ab|\geq 2ab)$（当仅当 a=b 时取等号）

（3）如果 a,b 都是正数，那么 $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}.$（当仅当 a=b 时取等号）

极值定理：若 $x,y\in R^+, x+y=S, xy=P,$ 则：

①如果 P 是定值, 那么当 $x=y$ 时，S 的值最小；

②如果 S 是定值, 那么当 $x=y$ 时，P 的值最大.

利用极值定理求最值的必要条件：一正、二定、三相等.

(4) $若 a、b、c\in R^+, 则 \frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$（当仅当 a=b=c 时取等号）

(5) 若$ab>0$,则$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$（当仅当 a=b 时取等号）

(6)$a>0$时，$|x|>a\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$;　　$|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a$

（7）若a、$b\in R$,则$||a|-|b||\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$

4.几个著名不等式

（1）平均不等式：　如果 a,b 都是正数，那么 $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.（当仅当 a=b 时取等号）即：平方平均≥算术平均≥几何平均≥调和平均（a、b 为正数）：

特别地，$ab\leq(\frac{a+b}{2})^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}$（当 $a=b$ 时，$(\frac{a+b}{2})^2=\frac{a^2+b^2}{2}=ab$）

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\left(\frac{a++b+c}{3}\right)^2(a,b,c\in R,a=b=c\text{时取等})$$

$\Rightarrow$幂平均不等式：$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\geq\frac{1}{n}(a_1+a_2+...+a_n)^2$

注：例如：$(ac+bd)^2\leq(a^2+b^2)(c^2+d^2)$.

常用不等式的放缩法：①$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\prec\frac{1}{n^2}\prec\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}(n\geq 2)$

②$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\prec\frac{1}{2\sqrt{n}}\prec\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}(n\geq 1)$

（2）柯西不等式：　若$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\in R,b_1,b_2,b_3\cdots,b_n\in R$;则
$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n)^2\leq(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots b_n^2)$
当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时取等号

（3）琴生不等式（特例）与凸函数、凹函数

若定义在某区间上的函数 f(x),对于定义域中任意两点$x_1,x_2(x_1\neq x_2)$,有

$f(\frac{x_1+x_2}{2})\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$或　$f(\frac{x_1+x_2}{2})\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

则称 f(x)为凸（或凹）函数.

5.不等式证明的几种常用方法

比较法、综合法、分析法、换元法、反证法、放缩法、构造法.

6.不等式的解法

（1）整式不等式的解法（根轴法）.

步骤：正化，求根，标轴，穿线（偶重根打结），定解.

特例① 一元一次不等式 $ax>b$ 解的讨论;

②一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0\ (a\neq 0)$解的讨论.

（2）分式不等式的解法：先移项通分标准化，则

$$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0;\quad\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\geq 0\\g(x)\neq 0\end{cases}$$

（3）无理不等式：转化为有理不等式求解

① $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{定义域} \\ f(x)>g(x) \end{cases}$

② $\sqrt{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \\ f(x)>[g(x)]^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)<0 \end{cases}$　　③ $\sqrt{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ g(x)\ge 0 \\ f(x)<[g(x)]^2 \end{cases}$

（4）. 指数不等式：转化为代数不等式

$$a^{f(x)}>a^{g(x)}(a>1) \Leftrightarrow f(x)>g(x);\quad a^{f(x)}>a^{g(x)}(0<a<1) \Leftrightarrow f(x)<g(x)$$

$$a^{f(x)}>b(a>0,b>0) \Leftrightarrow f(x)\cdot\lg a>\lg b$$

（5）对数不等式：转化为代数不等式

$$\log_a f(x)>\log_a g(x)(a>1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases};\quad \log_a f(x)>\log_a g(x)(0<a<1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$$

（6）含绝对值不等式

①应用分类讨论思想去绝对值；　　②应用数形思想；

③应用化归思想等价转化

$$|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0 \\ -g(x)<f(x)<g(x) \end{cases}$$

$$|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow g(x)\le 0(f(x),g(x)\text{不同时为}0)\text{或}\begin{cases} g(x)>0 \\ f(x)<-g(x)\text{或}f(x)>g(x) \end{cases}$$

注：常用不等式的解法举例（x 为正数）：

① $x(1-x)^2=\frac{1}{2}\cdot 2x(1-x)(1-x)\le\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^3=\frac{4}{27}$

② $y=x(1-x^2)\Rightarrow y^2=\frac{2x^2(1-x^2)(1-x^2)}{2}\le\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^3=\frac{4}{27}\Rightarrow y\le\frac{2\sqrt{3}}{9}$

类似于 $y=\sin x\cos^2 x=\sin x(1-\sin^2 x)$，③ $|x+\frac{1}{x}|=|x|+|\frac{1}{x}|(x\text{与}\frac{1}{x}\text{同号，故取等})\ge 2$

高中数学第七章-直线和圆的方程

考试内容：

直线的倾斜角和斜率，直线方程的点斜式和两点式．直线方程的一般式．

两条直线平行与垂直的条件．两条直线的交角．点到直线的距离．

用二元一次不等式表示平面区域．简单的线性规划问题．

曲线与方程的概念．由已知条件列出曲线方程．

圆的标准方程和一般方程．圆的参数方程．

考试要求：

（1）理解直线的倾斜角和斜率的概念，掌握过两点的直线的斜率公式，掌握直线方程的点斜式、两点式、一般式，并能根据条件熟练地求出直线方程．

（2）掌握两条直线平行与垂直的条件，两条直线所成的角和点到直线的距离公式能够根据直线的方程判断两条直线的位置关系．

（3）了解二元一次不等式表示平面区域．

（4）了解线性规划的意义，并会简单的应用．

（5）了解解析几何的基本思想，了解坐标法．

（6）掌握圆的标准方程和一般方程，了解参数方程的概念。理解圆的参数方程．

§07. 直线和圆的方程　知识要点

一、直线方程.

1. 直线的倾斜角：一条直线向上的方向与x轴正方向所成的最小正角叫做这条直线的倾斜角，其中直线与x轴平行或重合时，其倾斜角为0，故直线倾斜角的范围是$0^\circ \le \alpha \prec 180^\circ (0 \le \alpha \prec \pi)$.

注：①当$\alpha = 90^\circ$或$x_2 = x_1$时，直线l垂直于x轴，它的斜率不存在.

②每一条直线都存在惟一的倾斜角，除与x轴垂直的直线不存在斜率外，其余每一条直线都有惟一的斜率，并且当直线的斜率一定时，其倾斜角也对应确定.

2. 直线方程的几种形式：点斜式、截距式、两点式、斜切式.

特别地，当直线经过两点$(a,0),(0,b)$，即直线在x轴，y轴上的截距分别为$a,b(a \ne 0, b \ne 0)$时，直线方程是：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

注：若$y=-\frac{2}{3}x-2$是一直线的方程，则这条直线的方程是$y=-\frac{2}{3}x-2$，但若$y=-\frac{2}{3}x-2(x \ge 0)$则不是这条线.

附：直线系：对于直线的斜截式方程$y=kx+b$，当k,b均为确定的数值时，它表示一条确定的直线，如果k,b变化时，对应的直线也会变化.①当b为定植，k变化时，它们表示过定点（0，b）的直线束.②当k为定值，b变化时，它们表示一组平行直线.

3. ⑴两条直线平行：

$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$两条直线平行的条件是：①$l_1$和$l_2$是两条不重合的直线. ②在$l_1$和$l_2$的斜率都存在的前提下得到的. 因此，应特别注意，抽掉或忽视其中任一个“前提”都会导致结论的错误.

（一般的结论是：对于两条直线l_1, l_2，它们在y轴上的纵截距是b_1, b_2，则$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$，

且$b_1 \neq b_2$或l_1,l_2的斜率均不存在，即$A_1B_2=B_1A_2$是平行的必要不充分条件，且$C_1 \neq C_2$）

推论：如果两条直线l_1,l_2的倾斜角为α_1,α_2则$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2$.

⑵两条直线垂直：

两条直线垂直的条件：①设两条直线l_1和l_2的斜率分别为k_1和k_2，则有$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$这里的前提是$l_1,l_2$的斜率都存在. ②$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1=0$，且$l_2$的斜率不存在或$k_2=0$，且$l_1$的斜率不存在. （即$A_1B_2+A_2B_1=0$是垂直的充要条件）

4. 直线的交角：

⑴直线l_1到l_2的角（方向角）；直线l_1到l_2的角，是指直线l_1绕交点依逆时针方向旋转到与l_2重合时所转动的角θ，它的范围是$(0,\pi)$，当$\theta \neq 90^\circ$时$\tan\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$.

⑵两条相交直线l_1与l_2的夹角：两条相交直线l_1与l_2的夹角，是指由l_1与l_2相交所成的四个角中最小的正角θ，又称为l_1和l_2所成的角，它的取值范围是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，当$\theta \neq 90^\circ$，则有

$$\tan\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

5. 过两直线$\begin{cases} l_1:A_1x+B_1y+C_1=0 \\ l_2:A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$的交点的直线系方程$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$($\lambda$为参数，$A_2x+B_2y+C_2=0$不包括在内）

6. 点到直线的距离：

⑴点到直线的距离公式：设点$P(x_0,y_0)$，直线$l:Ax+By+C=0,P$到l的距离为d，则有

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

注：

1. 两点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$的距离公式：$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

   特例：点P(x,y)到原点O的距离：$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$

2. 定比分点坐标分式。若点P(x,y)分有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$所成的比为λ即$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，其中$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$.则$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

   特例，中点坐标公式；重要结论，三角形重心坐标公式。

3. 直线的倾斜角（0°≤α＜180°）、斜率:$k=\tan\alpha$

4. 过两点$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$的直线的斜率公式：$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.　　$(x_1 \neq x_2)$

   当$x_1=x_2,y_1\neq y_2$（即直线和x轴垂直）时，直线的倾斜角α＝90°，没有斜率。

⑵两条平行线间的距离公式：设两条平行直线$l_1:Ax+By+C_1=0,l_2:Ax+By+C_2=0(C_1\neq C_2)$，

它们之间的距离为d，则有$d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

注；直线系方程

1. 与直线：Ax+By+C= 0 平行的直线系方程是：Ax+By+m=0.(m∈R, C≠m).

2. 与直线：Ax+By+C= 0 垂直的直线系方程是：Bx-Ay+m=0.(m∈R)
3. 过定点（x_1,y_1）的直线系方程是： A(x-x_1)+B(y-y_1)=0 (A,B 不全为 0)
4. 过直线 l_1、l_2 交点的直线系方程：（$A_1x+B_1y+C_1$）+λ($A_2x+B_2y+C_2$）=0 (λ∈R) 注：该直线系不含 l_2.

7. 关于点对称和关于某直线对称：
⑴关于点对称的两条直线一定是平行直线，且这个点到两直线的距离相等.
⑵关于某直线对称的两条直线性质：若两条直线平行，则对称直线也平行，且两直线到对称直线距离相等.
若两条直线不平行，则对称直线必过两条直线的交点，且对称直线为两直线夹角的角平分线.
⑶点关于某一条直线对称，用中点表示两对称点，则中点在对称直线上（方程①），过两对称点的直线方程与对称直线方程垂直（方程②）①②可解得所求对称点.
注：①曲线、直线关于一直线（$y=\pm x+b$）对称的解法：y 换 x，x 换 y. 例：曲线 $f(x,y)=0$ 关于直线 $y=x-2$ 对称曲线方程是 $f(y+2,x-2)=0$.
②曲线 C: $f(x,y)=0$ 关于点(a ,b)的对称曲线方程是 $f(a-x, 2b-y)=0$.

二、圆的方程.

1. ⑴曲线与方程：在直角坐标系中，如果某曲线 C 上的 与一个二元方程 $f(x,y)=0$ 的实数建立了如下关系：
①曲线上的点的坐标都是这个方程的解.
②以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点.
那么这个方程叫做曲线方程；这条曲线叫做方程的曲线（图形）.
⑵曲线和方程的关系，实质上是曲线上任一点 $M(x,y)$ 其坐标与方程 $f(x,y)=0$ 的一种关系，曲线上任一点 (x,y) 是方程 $f(x,y)=0$ 的解；反过来，满足方程 $f(x,y)=0$ 的解所对应的点是曲线上的点.
注：如果曲线 C 的方程是 f(x ,y)=0，那么点 $P_0(x_0,y)$线 C 上的充要条件是 $f(x_0,y_0)=0$

2. 圆的标准方程：以点 $C(a,b)$ 为圆心，r 为半径的圆的标准方程是 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

特例：圆心在坐标原点，半径为 r 的圆的方程是：$x^2+y^2=r^2$.

注：特殊圆的方程：①与 x 轴相切的圆方程 $(x-a)^2+(y\pm b)^2=b^2$ $[r=|b|,圆心(a,b)或(a,-b)]$

②与 y 轴相切的圆方程 $(x\pm a)^2+(y-b)^2=a^2$ $[r=|a|,圆心(a,b)或(-a,b)]$

③与 x 轴 y 轴都相切的圆方程 $(x\pm a)^2+(y\pm a)^2=a^2$ $[r=|a|,圆心(\pm a,\pm a)]$

3. 圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

当 $D^2+E^2-4F\succ 0$ 时，方程表示一个圆，其中圆心 $C\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径 $r=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程表示一个点 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$.

当 $D^2+E^2-4F\prec 0$ 时，方程无图形（称虚圆）.

注：①圆的参数方程：$\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）.

②方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的充要条件是：$B=0$ 且 $A=C\neq 0$ 且 $D^2+E^2-4AF\succ 0$.

③圆的直径或方程：已知 $A(x_1,y_1)B(x_2,y_2)\Rightarrow(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$（用向量可征）.

4. 点和圆的位置关系：给定点 $M(x_0,y_0)$ 及圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

①M 在圆 C 内 $\Leftrightarrow(x_0-a)^2+(y_0-b)^2\prec r^2$

②M 在圆 C 上 $\Leftrightarrow(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$

③M 在圆 C 外 $\Leftrightarrow(x_0-a)^2+(y_0-b)^2\succ r^2$

5. 直线和圆的位置关系：

设圆圆 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r\succ 0)$；　　直线 l：$Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$；

圆心 $C(a,b)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

①$d=r$ 时，l 与 C 相切；

附：若两圆相切，则 $\begin{cases}x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0\\ x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0\end{cases}\Rightarrow$ 相减为公切线方程.

②$d\prec r$ 时，l 与 C 相交；

附：公共弦方程：设 $C_1:x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$

$C_2:x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$

有两个交点，则其公共弦方程为 $(D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$.

③$d\succ r$ 时，l 与 C 相离.

附：若两圆相离，则 $\begin{cases}x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0\\ x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0\end{cases}\Rightarrow$ 相减为圆心 O_1O_2 的连线的中与线方程.

由代数特征判断：方程组 $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\\ Ax+Bx+C=0\end{cases}$ 用代入法，得关于 x（或 y）的一元二次方程，其判别式为 Δ，则：

$\Delta=0\Leftrightarrow l$ 与 C 相切；

$\Delta\succ 0\Leftrightarrow l$ 与 C 相交；

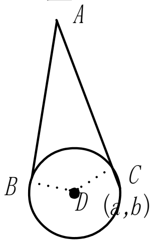
$\Delta \prec 0 \Leftrightarrow l$ 与 C 相离.

注：若两圆为同心圆则 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$， $x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 相减，不表示直线.

6. 圆的切线方程：圆 $x^2+y^2=r^2$ 的斜率为 k 的切线方程是 $y=kx\pm\sqrt{1+k^2}r$ 过圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为： $x_0x+y_0y+D\dfrac{x+x_0}{2}+E\dfrac{y+y_0}{2}+F=0$.

①一般方程若点(x_0,y_0)在圆上，则$(x-\mathrm{a})(x_0-\mathrm{a})+(y-\mathrm{b})(y_0-\mathrm{b})=R^2$. 特别地，过圆 $x^2+y^2=r^2$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.



②若点(x_0,y_0)不在圆上，圆心为(a,b)则 $\begin{cases} y_1-y_0=k(x_1-x_0) \\ R=\dfrac{|b-y_1-k(a-x_1)|}{\sqrt{R^2+1}} \end{cases}$，联立求出 $k \Rightarrow$ 切线方程.

7. 求切点弦方程：方法是构造图，则切点弦方程即转化为公共弦方程. 如图：ABCD 四类共圆. 已知 ΘO 的方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ …① 又以 ABCD 为圆为方程为

$(x-x_A)(x-a)+(y-y_A)(x-b)=k^2$ …②

$R^2=\dfrac{(x_A-a)^2+(y_A-b)^2}{4}$ …③，所以 BC 的方程即③代②，①②相切即为所求.

三、曲线和方程

1.曲线与方程：在直角坐标系中，如果曲线 C 和方程 f(x,y)=0 的实数解建立了如下的关系：

1） 曲线 C 上的点的坐标都是方程 f(x,y)=0 的解（纯粹性）；

2） 方程 f(x,y)=0 的解为坐标的点都在曲线 C 上（完备性）。则称方程 f(x,y)=0 为曲线 C 的方程，曲线 C 叫做方程 f(x,y)=0 的曲线。

2.求曲线方程的方法：.

1）直接法：建系设点，列式表标,简化检验; 2）参数法; 3）定义法， 4）待定系数法.

高中数学第八章-圆锥曲线方程

考试内容：

椭圆及其标准方程．椭圆的简单几何性质．椭圆的参数方程．

双曲线及其标准方程．双曲线的简单几何性质．

抛物线及其标准方程．抛物线的简单几何性质．

考试要求：

（1）掌握椭圆的定义、标准方程和椭圆的简单几何性质，了解椭圆的参数方程．

（2）掌握双曲线的定义、标准方程和双曲线的简单几何性质．

（3）掌握抛物线的定义、标准方程和抛物线的简单几何性质．

（4）了解圆锥曲线的初步应用．

§08. 圆锥曲线方程　知识要点

一、椭圆方程.

1. 椭圆方程的第一定义：

$|PF_1|+|PF_2|=2a\succ|F_1F_2|$方程为椭圆,

$|PF_1|+|PF_2|=2a\prec|F_1F_2|$无轨迹,

$|PF_1|+|PF_2|=2a=|F_1F_2|$以$F_1,F_2$为端点的线段

⑴①椭圆的标准方程：

i. 中心在原点，焦点在 x 轴上：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\succ b\succ 0)$. ii. 中心在原点，焦点在 y 轴上：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a\succ b\succ 0)$.

②一般方程：$Ax^2+By^2=1(A\succ 0,B\succ 0)$.③椭圆的标准参数方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$（一象限$\theta$应是属于$0\prec\theta\prec\frac{\pi}{2}$）.

⑵①顶点：$(\pm a,0)(0,\pm b)$或$(0,\pm a)(\pm b,0)$.②轴：对称轴：x轴，y轴；长轴长$2a$，短轴长$2b$.③焦点：$(-c,0)(c,0)$或$(0,-c)(0,c)$.④焦距：$|F_1F_2|=2c,c=\sqrt{a^2-b^2}$.⑤准线：$x=\pm\frac{a^2}{c}$或$y=\pm\frac{a^2}{c}$.⑥离心率：$e=\frac{c}{a}(0\prec e\prec 1)$.⑦焦点半径：

i. 设$P(x_0,y_0)$为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\succ b\succ 0)$上的一点，$F_1,F_2$为左、右焦点，则$|PF_1|=a+ex_0,|PF_2|=a-ex_0\Rightarrow$由椭圆方程的第二定义可以推出.

ii.设$P(x_0,y_0)$为椭圆$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a\succ b\succ 0)$上的一点，$F_1,F_2$为上、下焦点，则$|PF_1|=a+ey_0,|PF_2|=a-ey_0\Rightarrow$由椭圆方程的第二定义可以推出.

由椭圆第二定义可知：$|pF_1|=e(x_0+\frac{a^2}{c})=a+ex_0(x_0\prec 0),|pF_2|=e(\frac{a^2}{c}-x_0)=ex_0-a(x_0\succ 0)$归结起来为“左加右减”.

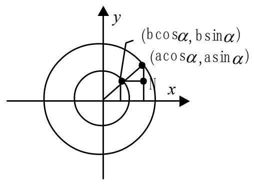
注意：椭圆参数方程的推导：得$N(a\cos\theta,b\sin\theta)\rightarrow$方程的轨迹为椭圆.

⑧通径：垂直于 x 轴且过焦点的弦叫做通经.坐标：$d=\frac{2b^2}{a^2}$ $(-c,\frac{b^2}{a})$和$(c,\frac{b^2}{a})$

⑶共离心率的椭圆系的方程：椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\succ b\succ 0)$ 的离心率是 $e=\frac{c}{a}(c=\sqrt{a^2-b^2})$，方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=t(t$ 是大于 0 的参数，$a\succ b\succ 0)$ 的离心率也是 $e=\frac{c}{a}$ 我们称此方程为共离心率的椭圆系方程.

⑸若 P 是椭圆：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的点. F_1,F_2 为焦点，若 $\angle F_1PF_2=\theta$，则 ΔPF_1F_2 的面积为 $b^2\tan\frac{\theta}{2}$（用余弦定理与 $|PF_1|+|PF_2|=2a$ 可得）. 若是双曲线，则面积为 $b^2\cdot\cot\frac{\theta}{2}$.

二、双曲线方程.



N 的轨迹是椭圆

1. 双曲线的第一定义：

$||PF_1|-|PF_2||=2a\prec|F_1F_2|$ 方程为双曲线

$||PF_1|-|PF_2||=2a\succ|F_1F_2|$ 无轨迹

$||PF_1|-|PF_2||=2a=|F_1F_2|$ 以 F_1,F_2 的一个端点的一条射线

⑴① 双曲线标准方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b\succ 0),\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a,b\succ 0)$. 一般方程：$Ax^2+Cy^2=1(AC\prec 0)$.

⑵①i. 焦点在 x 轴上：

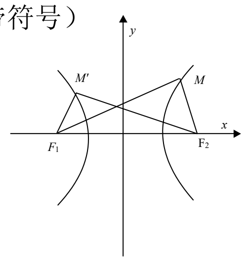
顶点：$(a,0),(-a,0)$　焦点：$(c,0),(-c,0)$　准线方程 $x=\pm\frac{a^2}{c}$　渐近线方程：$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0$ 或 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

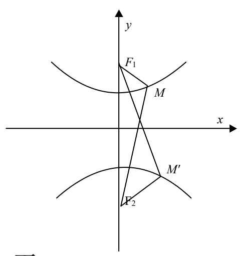
ii. 焦点在 y 轴上：顶点：$(0,-a),(0,a)$. 焦点：$(0,c),(0,-c)$. 准线方程：$y=\pm\frac{a^2}{c}$. 渐近线方程：$\frac{y}{a}\pm\frac{x}{b}=0$ 或 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=0$，参数方程：$\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\tan\theta\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=b\tan\theta\\y=a\sec\theta\end{cases}$.

②轴 x,y 为对称轴，实轴长为 $2a$，虚轴长为 $2b$，焦距 2c. ③离心率 $e=\frac{c}{a}$. ④准线距 $\frac{2a^2}{c}$（两准线的距离）；通径 $\frac{2b^2}{a}$. ⑤参数关系 $c^2=a^2+b^2,e=\frac{c}{a}$. ⑥焦点半径公式：对于双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$F_1,F_2$ 分别为双曲线的左、右焦点或分别为双曲线的上下焦点）

“长加短减”原则：

$\begin{matrix}|MF_1|=ex_0+a\\|MF_2|=ex_0-a\end{matrix}$ 构成满足 $|MF_1|-|MF_2|=2a$ $\begin{matrix}|M'F_1|=-ex_0-a\\|M'F_2|=-ex_0+a\end{matrix}$（与椭圆焦半径不同，椭圆焦半径要带符号计算，而双曲线不带符号）





$|MF_1| = ey_0 - a$

$|MF_2| = ey_0 + a$

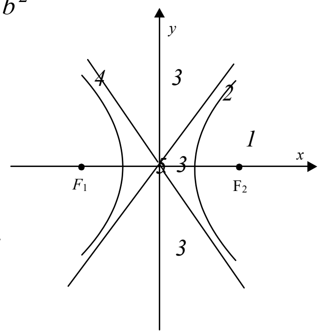
$|M'F_1| = -ey_0{}' + a$

$|M'F_2| = -ey_0{}' - a$

⑶等轴双曲线：双曲线 $x^2 - y^2 = \pm a^2$ 称为等轴双曲线，其渐近线方程为 $y = \pm x$，离心率 $e = \sqrt{2}$.

⑷共轭双曲线：以已知双曲线的虚轴为实轴，实轴为虚轴的双曲线，叫做已知双曲线的共轭双曲线. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda$ 与 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -\lambda$ 互为共轭双曲线，它们具有共同的渐近线：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$.

⑸共渐近线的双曲线系方程：$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda(\lambda \neq 0)$ 的渐近线方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ 如果双曲线的渐近线为 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ 时，它的双曲线方程可设为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda(\lambda \neq 0)$.



例如：若双曲线一条渐近线为 $y = \frac{1}{2}x$ 且过 $p(3, -\frac{1}{2})$，求双曲线的方程？

解：令双曲线的方程为：$\frac{x^2}{4} - y^2 = \lambda(\lambda \neq 0)$，代入 $(3, -\frac{1}{2})$ 得 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$.

⑹直线与双曲线的位置关系：
区域①：无切线，2 条与渐近线平行的直线，合计 2 条；
区域②：即定点在双曲线上，1 条切线，2 条与渐近线平行的直线，合计 3 条；
区域③：2 条切线，2 条与渐近线平行的直线，合计 4 条；
区域④：即定点在渐近线上且非原点，1 条切线，1 条与渐近线平行的直线，合计 2 条；
区域⑤：即过原点，无切线，无与渐近线平行的直线.
小结：过定点作直线与双曲线有且仅有一个交点，可以作出的直线数目可能有 0、2、3、4 条.
（2）若直线与双曲线一支有交点，交点为二个时，求确定直线的斜率可用代入“Δ”法与渐近线求交和两根之和与两根之积同号.

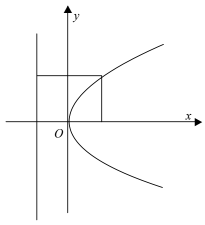
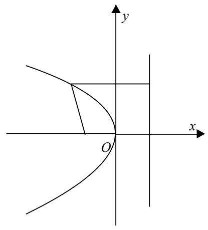
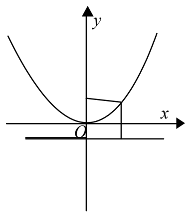
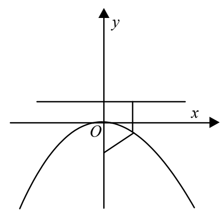
⑺若 P 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$，则常用结论 1：P 到焦点的距离为 m = n，则 P 到两准线的距离比为 m∶n.

简证：$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{|PF_1|}{e}}{\frac{|PF_2|}{e}} = \frac{m}{n}$.

常用结论 2：从双曲线一个焦点到另一条渐近线的距离等于 b.

三、抛物线方程.

3. 设 $p \succ 0$，抛物线的标准方程、类型及其几何性质：

	$y^2=2px$	$y^2=-2px$	$x^2=2py$	$x^2=-2py$
图形				
焦点	$F(\frac{p}{2},0)$	$F(-\frac{p}{2},0)$	$F(0,\frac{p}{2})$	$F(0,-\frac{p}{2})$
准线	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
范围	$x\ge 0, y\in R$	$x\le 0, y\in R$	$x\in R, y\ge 0$	$x\in R, y\le 0$
对称轴	x 轴		y 轴	
顶点	（0，0）			
离心率	$e=1$			
焦点	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}+x_1$	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}+\lvert x_1\rvert$	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}+y_1$	$\lvert PF\rvert=\frac{p}{2}+\lvert y_1\rvert$

注：① $ay^2+by+c=x$ 顶点 $(\frac{4ac-b^2}{4a}-\frac{b}{2a})$.

② $y^2=2px(p\ne 0)$ 则焦点半径 $\lvert PF\rvert=\left|x+\frac{P}{2}\right|$；$x^2=2py(p\ne 0)$ 则焦点半径为 $\lvert PF\rvert=\left|y+\frac{P}{2}\right|$.

③通径为 2p，这是过焦点的所有弦中最短的.

④ $y^2=2px$（或 $x^2=2py$）的参数方程为 $\begin{cases}x=2pt^2\\y=2pt\end{cases}$（或 $\begin{cases}x=2pt\\y=2pt^2\end{cases}$）（$t$ 为参数）.

四、圆锥曲线的统一定义..

4. 圆锥曲线的统一定义：平面内到定点 F 和定直线 l 的距离之比为常数 e 的点的轨迹.

当 $0\prec e\prec 1$ 时，轨迹为椭圆；

当 $e=1$ 时，轨迹为抛物线；

当 $e\succ 1$ 时，轨迹为双曲线；

当 $e=0$ 时，轨迹为圆（$e=\frac{c}{a}$，当 $c=0,a=b$ 时）.

5. 圆锥曲线方程具有对称性. 例如:椭圆的标准方程对原点的一条直线与双曲线的交点是关于原点对称的.

因为具有对称性，所以欲证 AB=CD, 即证 AD 与 BC 的中点重合即可.

注：椭圆、双曲线、抛物线的标准方程与几何性质

	椭圆	双曲线	抛物线

定义	1．到两定点 F_1,F_2 的距离之和为定值 $2a(2a>\|F_1F_2\|)$ 的点的轨迹	1．到两定点 F_1,F_2 的距离之差的绝对值为定值 $2a(0<2a<\|F_1F_2\|)$ 的点的轨迹	
	2．与定点和直线的距离之比为定值 e 的点的轨迹．（$0<e<1$）	2．与定点和直线的距离之比为定值 e 的点的轨迹．（$e>1$）	与定点和直线的距离相等的点的轨迹.
图形			
方程 标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>0,b>0)	$y^2=2px$
方程 参数方程	$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$ (参数θ为离心角）	$\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\tan\theta\end{cases}$ (参数θ为离心角）	$\begin{cases}x=2pt^2\\y=2pt\end{cases}$ (t 为参数)
范围	$-a\le x\le a$，$-b\le y\le b$	$\|x\|\ge a$，$y\in R$	$x\ge 0$
中心	原点 O（0，0）	原点 O（0，0）	
顶点	(a,0)，(−a,0)，(0,b)，(0,−b)	(a,0)，(−a,0)	(0,0)
对称轴	x 轴，y 轴；长轴长 2a,短轴长 2b	x 轴，y 轴;实轴长 2a，虚轴长 2b.	x 轴
焦点	$F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$	$F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$	$F(\frac{p}{2},0)$
焦距	2c （$c=\sqrt{a^2-b^2}$）	2c （$c=\sqrt{a^2+b^2}$）	
离心率	$e=\frac{c}{a}(0<e<1)$	$e=\frac{c}{a}(e>1)$	e=1
准线	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$x=\pm\frac{a^2}{c}$	$x=-\frac{p}{2}$
渐近线		$y=\pm\frac{b}{a}x$	
焦半径	$r=a\pm ex$	$r=\pm(ex\pm a)$	$r=x+\frac{p}{2}$
通径	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$	2p
焦参数	$\frac{a^2}{c}$	$\frac{a^2}{c}$	P

1. 椭圆、双曲线、抛物线的标准方程的其他形式及相应性质.
2. 等轴双曲线
3. 共轭双曲线

5. 方程 $y^2=ax$ 与 $x^2=ay$ 的焦点坐标及准线方程.

6.共渐近线的双曲线系方程.

高中数学第九章-立体几何

考试内容

平面及其基本性质．平面图形直观图的画法．

平行直线．对应边分别平行的角．异面直线所成的角．异面直线的公垂线．异面直线的距离．

直线和平面平行的判定与性质．直线和平面垂直的判定与性质．点到平面的距离．斜线在平面上的射影．直线和平面所成的角．三垂线定理及其逆定理．

平行平面的判定与性质．平行平面间的距离．二面角及其平面角．两个平面垂直的判定与性质．

多面体．正多面体．棱柱．棱锥．球．

考试要求

（1）掌握平面的基本性质，会用斜二测的画法画水平放置的平面图形的直观图;能够画出空间两条直线、直线和平面的各种位置关系的图形，能够根据图形想像它们的位置关系．

（2）掌握两条直线平行与垂直的判定定理和性质定理，掌握两条直线所成的角和距离的概念，对于异面直线的距离，只要求会计算已给出公垂线时的距离．

（3）掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理；掌握直线和平面垂直的判定定理和性质定理；掌握斜线在平面上的射影、直线和平面所成的角、直线和平面的距离的概念掌握三垂线定理及其逆定理．

（4）掌握两个平面平行的判定定理和性质定理，掌握二面角、二面角的平面角、两个平行平面间的距离的概念，掌握两个平面垂直的判定定理和性质定理．

（5）会用反证法证明简单的问题．

（6）了解多面体、凸多面体的概念，了解正多面体的概念．

（7）了解棱柱的概念，掌握棱柱的性质，会画直棱柱的直观图．

（8）了解棱锥的概念，掌握正棱锥的性质，会画正棱锥的直观图．

（9）了解球的概念，掌握球的性质，掌握球的表面积、体积公式．

9（B）．直线、平面、简单几何体

考试内容：

平面及其基本性质．平面图形直观图的画法．

平行直线．

直线和平面平行的判定与性质．直线和平面垂直的判定．三垂线定理及其逆定理．

两个平面的位置关系．

空间向量及其加法、减法与数乘．空间向量的坐标表示．空间向量的数量积．

直线的方向向量．异面直线所成的角．异面直线的公垂线．异面直线的距离．

直线和平面垂直的性质．平面的法向量．点到平面的距离．直线和平面所成的角．向量在平面内的射影．

平行平面的判定和性质．平行平面间的距离．二面角及其平面角．两个平面垂直的判定和性质．

多面体．正多面体．棱柱．棱锥．球．

考试要求：

（1）掌握平面的基本性质。会用斜二测的画法画水平放置的平面图形的直观图：能够画出

空间两条直线、直线和平面的各种位置关系的图形.能够根据图形想像它们的位置关系.
（2）掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理；理解直线和平面垂直的概念.掌握直线和平面垂直的判定定理；掌握三垂线定理及其逆定理.
（3）理解空间向量的概念，掌握空间向量的加法、减法和数乘.
（4）了解空间向量的基本定理；理解空间向量坐标的概念.掌握空间向量的坐标运算.
（5）掌握空间向量的数量积的定义及其性质：掌握用直角坐标计算空间向量数量积的公式；掌握空间两点间距离公式.
（6）理解直线的方向向量、平面的法向量、向量在平面内的射影等概念.
（7）掌握直线和直线、直线和平面、平面和平面所成的角、距离的概念.对于异面直线的距离，只要求会计算已给出公垂线或在坐标表示下的距离掌握直线和平面垂直的性质定理掌握两个平面平行、垂直的判定定理和性质定理.
（8）了解多面体、凸多面体的概念。了解正多面体的概念.
（9）了解棱柱的概念，掌握棱柱的性质，会画直棱柱的直观图.
（10）了解棱锥的概念，掌握正棱锥的性质。会画正棱锥的直观图.
（11）了解球的概念.掌握球的性质.掌握球的表面积、体积公式.
（考生可在 9（A）和 9（B）中任选其一）

§09. 立体几何　知识要点

一、　　平面.

1. 经过不在同一条直线上的三点确定一个面.

注：两两相交且不过同一点的四条直线必在同一平面内.

2. 两个平面可将平面分成 3 或 4 部分.（①两个平面平行，②两个平面相交）

3. 过三条互相平行的直线可以确定 1 或 3 个平面.（①三条直线在一个平面内平行，②三条直线不在一个平面内平行）

[注]：三条直线可以确定三个平面，三条直线的公共点有 0 或 1 个.

4. 三个平面最多可把空间分成 8 部分.（X、Y、Z 三个方向）

二、　　空间直线.

1. 空间直线位置分三种：相交、平行、异面. 相交直线—共面有反且有一个公共点；平行直线—共面没有公共点；异面直线—不同在任一平面内

[注]：①两条异面直线在同一平面内射影一定是相交的两条直线.（×）（可能两条直线平行，也可能是点和直线等）

②直线在平面外，指的位置关系：平行或相交

③若直线 a、b 异面，a 平行于平面 α，b 与 α 的关系是相交、平行、在平面 α 内.

④两条平行线在同一平面内的射影图形是一条直线或两条平行线或两点.

⑤在平面内射影是直线的图形一定是直线.（×）（射影不一定只有直线，也可以是其他图形）

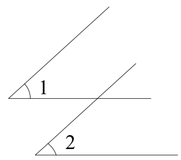
⑥在同一平面内的射影长相等，则斜线长相等.（×）（并非是从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段）

⑦ a,b 是夹在两平行平面间的线段，若 $a=b$，则 a,b 的位置关系为相交或平行或异面.

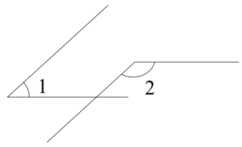
2. 异面直线判定定理：过平面外一点与平面内一点的直线和平面内不经过该点的直线是异面直线.（不在任何一个平面内的两条直线）

3. 平行公理：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

4. 等角定理：如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等（如下图）.



方向相同



方向不相同

（二面角的取值范围 $\theta \in [0^\circ,180^\circ)$）

（直线与直线所成角 $\theta \in (0^\circ,90^\circ]$）

（斜线与平面成角 $\theta \in (0^\circ,90^\circ)$）

（直线与平面所成角 $\theta \in [0^\circ,90^\circ]$）

（向量与向量所成角 $\theta \in [0^\circ,180^\circ]$）

推论：如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成锐角（或直角）相等.

5. 两异面直线的距离：公垂线的长度.

空间两条直线垂直的情况：相交（共面）垂直和异面垂直.

l_1,l_2 是异面直线，则过 l_1,l_2 外一点 P，过点 P 且与 l_1,l_2 都平行平面有一个或没有，但与 l_1,l_2 距离相等的点在同一平面内.（L_1 或 L_2 在这个做出的平面内不能叫 L_1 与 L_2 平行的平面）

三、　　直线与平面平行、直线与平面垂直.

1. 空间直线与平面位置分三种：相交、平行、在平面内.

2. 直线与平面平行判定定理：如果平面外一条直线和这个平面内一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.（“线线平行，线面平行”）

[注]：①直线 a 与平面 α 内一条直线平行，则 $a /\!/ \alpha$.（×）（平面外一条直线）

②直线 a 与平面 α 内一条直线相交，则 a 与平面 α 相交.（×）（平面外一条直线）

③若直线 a 与平面 α 平行，则 α 内必存在无数条直线与 a 平行.（√）（不是任意一条直线，可利用平行的传递性证之）

④两条平行线中一条平行于一个平面，那么另一条也平行于这个平面.（×）（可能在此平面内）

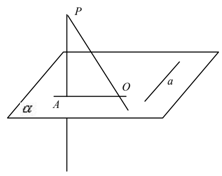
⑤平行于同一直线的两个平面平行.（×）（两个平面可能相交）

⑥平行于同一个平面的两直线平行.（×）（两直线可能相交或者异面）

⑦直线 l 与平面 α、β 所成角相等，则 $\alpha /\!/ \beta$.（×）（α、β 可能相交）

3. 直线和平面平行性质定理：如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线和交线平行.（“线面平行，线线平行”）

4. 直线与平面垂直是指直线与平面任何一条直线垂直，过一点有且只有一条直线和一个平面垂直，过一点有且只有一个平面和一条直线垂直.



- 若 $PA \perp \alpha$，$a \perp AO$，得 $a \perp PO$（三垂线定理），

得不出 $\alpha \perp PO$. 因为 $a \perp PO$，但 PO 不垂直 OA.

- 三垂线定理的逆定理亦成立.

直线与平面垂直的判定定理一：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这两条直线垂直于这个平面.（“线线垂直，线面垂直”）

直线与平面垂直的判定定理二：如果平行线中一条直线垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面.

推论：如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行.

[注]：①垂直于同一平面的两个平面平行.（×）（可能相交，垂直于同一条直线的两个平面平行）

②垂直于同一直线的两个平面平行.（√）（一条直线垂直于平行的一个平面，必垂直于另一个平面）

③垂直于同一平面的两条直线平行.（√）

5. ⑴垂线段和斜线段长定理：从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中，①射影相等的两条斜线段相等，射影较长的斜线段较长；②相等的斜线段的射影相等，较长的斜线

段射影较长；③垂线段比任何一条斜线段短.
[注]：垂线在平面的射影为一个点. [一条直线在平面内的射影是一条直线.（×）]
⑵射影定理推论：如果一个角所在平面外一点到角的两边的距离相等，那么这点在平面内的射影在这个角的平分线上

四、　　平面平行与平面垂直.

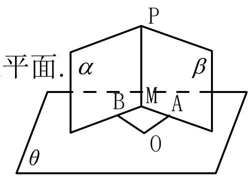
1. 空间两个平面的位置关系：相交、平行.
2. 平面平行判定定理：如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，哪么这两个平面平行.（“线面平行，面面平行”）

推论：垂直于同一条直线的两个平面互相平行；平行于同一平面的两个平面平行.
[注]：一平面间的任一直线平行于另一平面.

3. 两个平面平行的性质定理：如果两个平面平行同时和第三个平面相交，那么它们交线平行.（“面面平行，线线平行”）
4. 两个平面垂直性质判定一：两个平面所成的二面角是直二面角，则两个平面垂直.

两个平面垂直性质判定二：如果一个平面与一条直线垂直，那么经过这条直线的平面垂直于这个平面.（“线面垂直，面面垂直”）
注：如果两个二面角的平面对应平面互相垂直，则两个二面角没有什么关系.

5. 两个平面垂直性质定理：如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线也垂直于另一个平面.



推论：如果两个相交平面都垂直于第三平面，则它们交线垂直于第三平面.
证明：如图，找 O 作 OA、OB 分别垂直于 l_1, l_2，
因为 $PM \subset \beta, OA \perp \beta, PM \subset \alpha, OB \perp \alpha$ 则 $PM \perp OA, PM \perp OB$.

6. 两异面直线任意两点间的距离公式：$l = \sqrt{m^2 + n^2 + d^2 + 2mn\cos\theta}$（$\theta$ 为锐角取加，θ 为钝取减，综上，都取加则必有 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$）

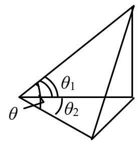


图1

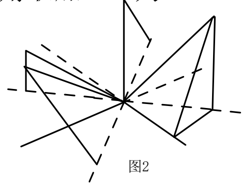


图2

7. ⑴最小角定理：$\cos\theta = \cos\theta_1 \cos\theta_2$（$\theta_1$ 为最小角，如图）

⑵最小角定理的应用（∠PBN 为最小角）
简记为：成角比交线夹角一半大，且又比交线夹角补角一半长，一定有 4 条.
成角比交线夹角一半大，又比交线夹角补角小，一定有 2 条.
成角比交线夹角一半大，又与交线夹角相等，一定有 3 条或者 2 条.
成角比交线夹角一半小，又与交线夹角一半小，一定有 1 条或者没有.

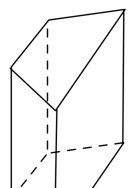
五、　　棱锥、棱柱.

1. 棱柱.

⑴①直棱柱侧面积：$S = Ch$（C 为底面周长，h 是高）该公式是利用直棱柱的侧面展开图为矩形得出的.
②斜棱住侧面积：$S = C_1 l$（C_1 是斜棱柱直截面周长，l 是斜棱柱的侧棱长）该公式是利用斜棱柱的侧面展开图为平行四边形得出的.
⑵{四棱柱}⊃{平行六面体}⊃{直平行六面体}⊃{长方体}⊃{正四棱柱}⊃{正方体}.
{直四棱柱}∩{平行六面体}={直平行六面体}.

四棱柱 $\xrightarrow[\text{平行四边形}]{\text{底面是}}$ 平行六面体 $\xrightarrow[\text{底面}]{\text{侧棱垂直}}$ 直平行六面体 $\xrightarrow[\text{矩形}]{\text{底面是}}$ 长方体 $\xrightarrow[\text{正方形}]{\text{底面是}}$ 正四棱柱 $\xrightarrow[\text{底面边长相等}]{\text{侧面与}}$ 正方体

⑶棱柱具有的性质：
①棱柱的各个侧面都是平行四边形，所有的侧棱都相等；直棱柱的各个侧面都是矩形；正棱



柱的各个侧面都是全等的矩形.

②棱柱的两个底面与平行于底面的截面是对应边互相平行的全等多边形.

③过棱柱不相邻的两条侧棱的截面都是平行四边形.

注：①棱柱有一个侧面和底面的一条边垂直可推测是直棱柱. （×）

（直棱柱不能保证底面是钜形可如图）

②（直棱柱定义）棱柱有一条侧棱和底面垂直.

⑷平行六面体：

定理一：平行六面体的对角线交于一点，并且在交点处互相平分.

[注]：四棱柱的对角线不一定相交于一点.

定理二：长方体的一条对角线长的平方等于一个顶点上三条棱长的平方和.

推论一：长方体一条对角线与同一个顶点的三条棱所成的角为 α,β,γ，则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

推论二：长方体一条对角线与同一个顶点的三各侧面所成的角为 α,β,γ，则 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$.

[注]：①有两个侧面是矩形的棱柱是直棱柱.（×）（斜四面体的两个平行的平面可以为矩形）

②各侧面都是正方形的棱柱一定是正棱柱.（×）（应是各侧面都是正方形的直棱柱才行）

③对角面都是全等的矩形的直四棱柱一定是长方体.（×）（只能推出对角线相等，推不出底面为矩形）

④棱柱成为直棱柱的一个必要不充分条件是<u>棱柱有一条侧棱与底面的两条边垂直</u>.（两条边可能相交，可能不相交，若两条边相交，则应是充要条件）

2. 棱锥：棱锥是一个面为多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形.

[注]：①一个棱锥可以四各面都为直角三角形.

②一个棱柱可以分成等体积的三个三棱锥；所以 $V_{棱柱}=Sh=3V_{棱柱}$.

⑴①正棱锥定义：底面是正多边形；顶点在底面的射影为底面的中心.

[注]：i. 正四棱锥的各个侧面都是全等的等腰三角形.（不是等边三角形）

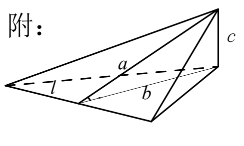
ii. 正四面体是各棱相等，而正三棱锥是底面为正△侧棱与底棱不一定相等

iii. 正棱锥定义的推论：若一个棱锥的各个侧面都是全等的等腰三角形（即侧棱相等）；底面为正多边形.

②正棱锥的侧面积：$S=\frac{1}{2}Ch'$（底面周长为 C，斜高为 h'）

③棱锥的侧面积与底面积的射影公式：$S_{侧}=\frac{S_{底}}{\cos\alpha}$（侧面与底面成的二面角为 α）

附：



以知 $c\perp l$，$\cos\alpha\cdot a=b$，α 为二面角 $a-l-b$.

则 $S_1=\frac{1}{2}a\cdot l$ ①，$S_2=\frac{1}{2}l\cdot b$ ②，$\cos\alpha\cdot a=b$ ③ $\Rightarrow$ ①②③

得 $S_{侧}=\frac{S_{底}}{\cos\alpha}$.

注：S 为任意多边形的面积（可分别多个三角形的方法）.

⑵棱锥具有的性质：

①正棱锥各侧棱相等，各侧面都是全等的等腰三角形，各等腰三角形底边上的高相等（它叫做正棱锥的斜高）.

②正棱锥的高、斜高和斜高在底面内的射影组成一个直角三角形，正棱锥的高、侧棱、侧棱在底面内的射影也组成一个直角三角形.

⑶特殊棱锥的顶点在底面的射影位置：

①棱锥的侧棱长均相等，则顶点在底面上的射影为底面多边形的外心.

②棱锥的侧棱与底面所成的角均相等，则顶点在底面上的射影为底面多边形的外心.

③棱锥的各侧面与底面所成角均相等，则顶点在底面上的射影为底面多边形内心.

④棱锥的顶点到底面各边距离相等，则顶点在底面上的射影为底面多边形内心.

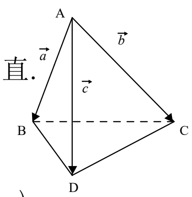
⑤三棱锥有两组对棱垂直，则顶点在底面的射影为三角形垂心.

⑥三棱锥的三条侧棱两两垂直，则顶点在底面上的射影为三角形的垂心.

⑦每个四面体都有外接球，球心 0 是各条棱的中垂面的交点，此点到各顶点的距离等于球半径；

⑧每个四面体都有内切球，球心 I 是四面体各个二面角的平分面的交点，到各面的距离等于半径.

[注]：i. 各个侧面都是等腰三角形，且底面是正方形的棱锥是正四棱锥.（×）（各个侧面的等腰三角形不知是否全等）

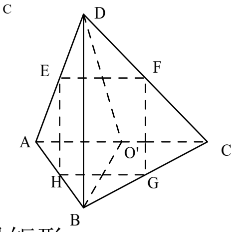


ii. 若一个三角锥，两条对角线互相垂直，则第三对角线必然垂直.

简证：AB⊥CD，AC⊥BD⇒ BC⊥AD. 令 $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{c},\overrightarrow{AC}=\vec{b}$

得 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{c}\Rightarrow\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=\vec{b}\vec{c}-\vec{a}\vec{c}$，已知 $\vec{a}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=0,\vec{b}\cdot\left(\vec{a}-\vec{c}\right)=0$

$\Rightarrow\vec{a}\vec{c}-\vec{b}\vec{c}=0$ 则 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.



iii. 空间四边形 OABC 且四边长相等，则顺次连结各边的中点的四边形一定是矩形.

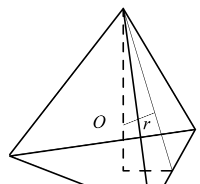
iv. 若是四边长与对角线分别相等，则顺次连结各边的中点的四边是一定是正方形.

简证：取 AC 中点 O'，则 $oo'\perp AC,BO'\perp AC\Rightarrow AC\perp$ 平面 $OO'B\Rightarrow AC\perp BO\Rightarrow\angle FGH=90^{\circ}$ 易知 EFGH 为平行四边形⇒ EFGH 为长方形. 若对角线等，则 $EF=FG\Rightarrow EFGH$ 为正方形.

3. 球：⑴球的截面是一个圆面.

①球的表面积公式：$S=4\pi R^2$.

②球的体积公式：$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.



⑵纬度、经度：

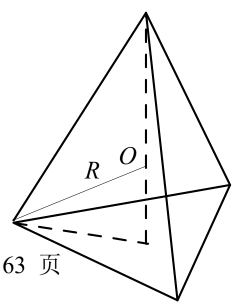
①纬度：地球上一点 P 的纬度是指经过 P 点的球半径与赤道面所成的角的度数.

②经度：地球上 A,B 两点的经度差，是指分别经过这两点的经线与地轴所确定的二个半平面的二面角的度数，特别地，当经过点 A 的经线是本初子午线时，这个二面角的度数就是 B 点的经度.

附：①圆柱体积：$V=\pi r^2h$（r 为半径，h 为高）

②圆锥体积：$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$（r 为半径，h 为高）

③锥形体积：$V=\dfrac{1}{3}Sh$（S 为底面积，h 为高）



4. ①内切球：当四面体为正四面体时，设边长为a，$h=\frac{\sqrt{6}}{3}a$，$S_{底}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$S_{侧}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

得 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot R+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot R\Rightarrow R=\frac{\sqrt{2}}{4}a/\frac{4}{3}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}}{4}a\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{4}a$.

注：球内切于四面体：$V_{B-ACD}=\frac{1}{3}\cdot S_{侧}\cdot R\cdot 3+\frac{1}{3}S_{底}\cdot R=S_{底}\cdot h$

②外接球：球外接于正四面体，可如图建立关系式.

六. 空间向量.

1. （1）共线向量：共线向量亦称平行向量，指空间向量的有向线段所在直线互相平行或重合.

注：①若$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，$\vec{b}$与$\vec{c}$共线，则$\vec{a}$与$\vec{c}$共线.（×）　[当$\vec{b}=\vec{0}$时，不成立]

②向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面即它们所在直线共面.（×）　[可能异面]

③若$\vec{a}$ // $\vec{b}$，则存在小任一实数λ，使$\vec{a}=\lambda\vec{b}$.（×）[与$\vec{b}=\vec{0}$不成立]

④若$\vec{a}$为非零向量，则$0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.（√）[这里用到$\lambda\vec{b}(\vec{b}\neq 0)$之积仍为向量]

（2）共线向量定理：对空间任意两个向量$\vec{a},\vec{b}(\vec{b}\neq 0)$，$\vec{a}$ // $\vec{b}$的充要条件是存在实数λ（具有唯一性），使$\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

（3）共面向量：若向量$\vec{a}$使之平行于平面α或$\vec{a}$在α内，则$\vec{a}$与α的关系是平行，记作$\vec{a}$ // α.

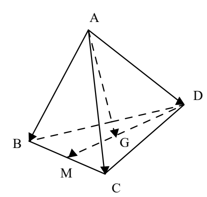
（4）①共面向量定理：如果两个向量$\vec{a},\vec{b}$不共线，则向量$\vec{P}$与向量$\vec{a},\vec{b}$共面的充要条件是存在实数对x、y使$\vec{P}=x\vec{a}+y\vec{b}$.

②空间任一点O和不共线三点A、B、C，则$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}(x+y+z=1)$是$PABC$四点共面的充要条件.（简证：$\overrightarrow{OP}=(1-y-z)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AP}=y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}\rightarrow P$、$A$、$B$、$C$四点共面）

注：①②是证明四点共面的常用方法.

2. 空间向量基本定理：如果三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面，那么对空间任一向量$\vec{P}$，存在一个唯一的有序实数组x、y、z，使$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$.

推论：设O、A、B、C是不共面的四点，则对空间任一点P，都存在唯一的有序实数组x、y、z使 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$(这里隐含 x+y+z≠1).



注：设四面体 ABCD 的三条棱，$\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{AD}=\vec{d}$, 其

中 Q 是△BCD 的重心，则向量 $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ 用 $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ}$ 即证.

3. （1）空间向量的坐标：空间直角坐标系的 x 轴是横轴（对应为横坐标），y 轴是纵轴（对应为纵轴），z 轴是竖轴（对应为竖坐标）.

①令 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$　　$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)(\lambda\in R)$　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1,a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3(\lambda\in R)\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$　　$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$ (用到常用的向量模与向量之间的转化：$\left|\vec{a}\right|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$)

$$\cos<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

②空间两点的距离公式：$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

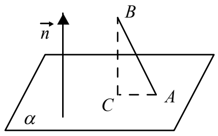
（2）法向量：若向量 $\vec{a}$ 所在直线垂直于平面 α，则称这个向量垂直于平面 α，记作 $\vec{a}\perp\alpha$，如果 $\vec{a}\perp\alpha$ 那么向量 $\vec{a}$ 叫做平面 α 的法向量.

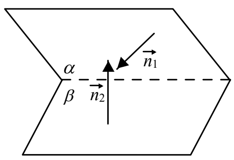
（3）用向量的常用方法：

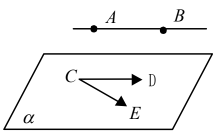
①利用法向量求点到面的距离定理：如图，设 n 是平面 α 的法向量，AB 是平面 α 的一条射线，其中 $A\in\alpha$，则点 B 到平面 α 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$.

②利用法向量求二面角的平面角定理：设 $\vec{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 分别是二面角 $\alpha-l-\beta$ 中平面 α,β 的法向量，则 $\vec{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 所成的角就是所求二面角的平面角或其补角大小（$\vec{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 方向相同，则为补角，$\vec{n_1},\overrightarrow{n_2}$ 反方，则为其夹角）.

③证直线和平面平行定理：已知直线 $a\neq\not\subset$ 平面 α，$A\cdot B\in a,C\cdot D\in\alpha$，且 CDE 三点不共线，则 a∥ α 的充要条件是存在有序实数对 $\lambda\cdot\mu$ 使 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CE}$.（常设 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}+\mu\overrightarrow{CE}$ 求解 λ,μ 若 λ,μ 存在即证毕，若 λ,μ 不存在，则直线 AB 与平面相交）.



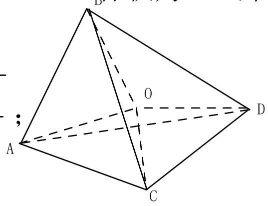




II. 竞赛知识要点

一、四面体.

1. 对照平面几何中的三角形，我们不难得到立体几何中的四面体的类似性质：
①四面体的六条棱的垂直平分面交于一点，这一点叫做此四面体的外接球的球心；
②四面体的四个面组成六个二面角的角平分面交于一点，这一点叫做此四面体的内接球的球心；
③四面体的四个面的重心与相对顶点的连接交于一点，这一点叫做此四面体的重心，且重心将每条连线分为 3∶1；
④12 个面角之和为 720°，每个三面角中任两个之和大于另一个面角，且三个面角之和为 180°.
2. 直角四面体：有一个三面角的三个面角均为直角的四面体称为直角四面体，相当于平面几何的直角三角形.（在直角四面体中，记 V、l、S、R、r、h 分别表示其体积、六条棱长之和、表面积、外接球半径、内切球半径及侧面上的高），则有空间勾股定理：$S^2_{\triangle ABC}+S^2_{\triangle BCD}+S^2_{\triangle ABD}=S^2_{\triangle ACD}$.
3. 等腰四面体：对棱都相等的四面体称为等腰四面体，好象平面几何中的等腰三角形.根据定义不难证明以长方体的一个顶点的三条面对角线的端点为顶点的四面体是等腰四面体，反之也可以将一个等腰四面体拼补成一个长方体.
（在等腰四面体 ABCD 中，记 BC = AD =a，AC = BD = b，AB = CD = c，体积为 V，外接球半径为 R，内接球半径为 r，高为 h），则有



①等腰四面体的体积可表示为$V=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$；

②等腰四面体的外接球半径可表示为$R=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$；

③等腰四面体的四条顶点和对面重心的连线段的长相等，且可表示为$m=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$；

④h = 4r.
二、空间正余弦定理.
空间正弦定理：sin∠ABD/sin∠A-BC-D=sin∠ABC/sin∠A-BD-C=sin∠CBD/sin∠C-BA-D
空间余弦定理：cos∠ABD=cos∠ABCcos∠CBD+sin∠ABCsin∠CBDcos∠A-BC-D

立体几何知识要点

一、知识提纲

（一）空间的直线与平面
1.平面的基本性质　⑴三个公理及公理三的三个推论和它们的用途.　⑵斜二测画法.
2.空间两条直线的位置关系：相交直线、平行直线、异面直线.
⑴公理四（平行线的传递性）. 等角定理.
⑵异面直线的判定：判定定理、反证法.
⑶异面直线所成的角：定义（求法）、范围.
3.直线和平面平行　　直线和平面的位置关系、直线和平面平行的判定与性质.
4.直线和平面垂直
⑴直线和平面垂直：定义、判定定理.
⑵三垂线定理及逆定理.
5. 平面和平面平行

两个平面的位置关系、两个平面平行的判定与性质.

6. 平面和平面垂直

互相垂直的平面及其判定定理、性质定理.

（二）直线与平面的平行和垂直的证明思路（见附图）

（三）夹角与距离

7. 直线和平面所成的角与二面角

⑴平面的斜线和平面所成的角：三面角余弦公式、最小角定理、斜线和平面所成的角、直线和平面所成的角.

⑵二面角：①定义、范围、二面角的平面角、直二面角.

②互相垂直的平面及其判定定理、性质定理.

8. 距离

⑴点到平面的距离.

⑵直线到与它平行平面的距离.

⑶两个平行平面的距离：两个平行平面的公垂线、公垂线段.

⑷异面直线的距离：异面直线的公垂线及其性质、公垂线段.

（四）简单多面体与球

9. 棱柱与棱锥

⑴多面体.

⑵棱柱与它的性质：棱柱、直棱柱、正棱柱、棱柱的性质.

⑶平行六面体与长方体：平行六面体、直平行六面体、长方体、正四棱柱、正方体；平行六面体的性质、长方体的性质.

⑷棱锥与它的性质：棱锥、正棱锥、棱锥的性质、正棱锥的性质.

⑸直棱柱和正棱锥的直观图的画法.

10. 多面体欧拉定理的发现

⑴简单多面体的欧拉公式.

⑵正多面体.

11. 球

⑴球和它的性质：球体、球面、球的大圆、小圆、球面距离.

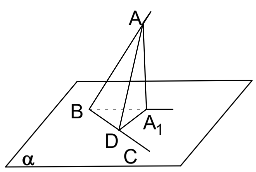
⑵球的体积公式和表面积公式.

二、常用结论、方法和公式

1.从一点 O 出发的三条射线 OA、OB、OC，若∠AOB=∠AOC，则点 A 在平面∠BOC 上的射影在∠BOC 的平分线上；

2. 已知:直二面角 M－AB－N 中，AE ⊂ M，BF⊂ N,∠EAB=θ_1,∠ABF=θ_2，异面直线 AE 与 BF 所成的角为θ，则$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$;

3.立平斜公式：如图，AB 和平面所成的角是θ_1，AC 在平面内，BC 和 AB 的射影 BA_1 成θ_2，设∠ABC=θ_3,则 $\cos\theta_1\cos\theta_2=\cos\theta_3$；



4.异面直线所成角的求法：

（1）平移法：在异面直线中的一条直线中选择一特殊点，作另一条的平行线；

（2）补形法：把空间图形补成熟悉的或完整的几何体，如正方体、平行六面体、长方体等，其目的在于容易发现两条异面直线间的关系；

5.直线与平面所成的角

斜线和平面所成的是一个直角三角形的锐角，它的三条边分别是平面的垂线段、斜线段及斜线段在平面上的射影。通常通过斜线上某个特殊点作出平面的垂线段，垂足和斜足的连线，是产生线面角的关键；

6.二面角的求法

（1）定义法：直接在二面角的棱上取一点（特殊点），分别在两个半平面内作棱的垂线，得出平面角，用定义法时，要认真观察图形的特性；

（2）三垂线法：已知二面角其中一个面内一点到一个面的垂线，用三垂线定理或逆定理作出二面角的平面角；

（3）垂面法：已知二面角内一点到两个面的垂线时，过两垂线作平面与两个半平面的交线所成的角即为平面角，由此可知，二面角的平面角所在的平面与棱垂直；

（4）射影法：利用面积射影公式 $S_{射}=S_{原}\cos\theta$,其中 θ 为平面角的大小，此法不必在图形中画出平面角；

特别:对于一类没有给出棱的二面角，应先延伸两个半平面，使之相交出现棱，然后再选用上述方法（尤其要考虑射影法）。

7.空间距离的求法

（1）两异面直线间的距离，高考要求是给出公垂线，所以一般先利用垂直作出公垂线，然后再进行计算；

（2）求点到直线的距离，一般用三垂线定理作出垂线再求解；

（3）求点到平面的距离，一是用垂面法，借助面面垂直的性质来作，因此，确定已知面的垂面是关键；二是不作出公垂线，转化为求三棱锥的高，利用等体积法列方程求解；

8.正棱锥的各侧面与底面所成的角相等，记为 θ，则 $S_{侧}\cos\theta=S_{底}$；

9.已知:长方体的体对角线与过同一顶点的三条棱所成的角分别为 $\alpha,\beta,\gamma,$ 因此有

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$; 若长方体的体对角线与过同一顶点的三侧面所成的角分别为

$\alpha,\beta,\gamma,$ 则有 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$;

10.正方体和长方体的外接球的直径等与其体对角线长；

11.欧拉公式：如果简单多面体的顶点数为 V,面数为 F,棱数为 E.那么 V+F－E=2；并且棱数 E＝各顶点连着的棱数和的一半＝各面边数和的一半；

12. 柱体的体积公式：柱体（棱柱、圆柱）的体积公式是 $V_{柱体}=Sh$. 其中 S 是柱体的底面积，h 是柱体的高.

13.直棱柱的侧面积和全面积

$S_{直棱柱侧}=c\ell$ （c 表示底面周长，ℓ 表示侧棱长） $S_{棱柱全}=S_{底}+S_{侧}$

14．棱锥的体积:$V_{棱锥}=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 是棱锥的底面积，h 是棱锥的高。

15.球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，表面积公式 $S=4\pi R^2$；掌握球面上两点 A、B 间的距离求法：（1）计算线段 AB 的长，（2）计算球心角∠AOB 的弧度数；(3)用弧长公式计算劣弧 AB 的长；

高中数学第十章-排列组合二项定理

考试内容：

分类计数原理与分步计数原理.

排列．排列数公式.

组合．组合数公式．组合数的两个性质.

二项式定理．二项展开式的性质.

考试要求：

（1）掌握分类计数原理与分步计数原理，并能用它们分析和解决一些简单的应用问题.

（2）理解排列的意义，掌握排列数计算公式，并能用它解决一些简单的应用问题.

（3）理解组合的意义，掌握组合数计算公式和组合数的性质，并能用它们解决一些简单的应用问题.

（4）掌握二项式定理和二项展开式的性质，并能用它们计算和证明一些简单的问题.

§10. 排列组合二项定理 知识要点

一、两个原理.

1. 乘法原理、加法原理.

2. 可以有重复元素的排列.

从 m 个不同元素中，每次取出 n 个元素，元素可以重复出现，按照一定的顺序排成一排，那么第一、第二……第 n 位上选取元素的方法都是 m 个，所以从 m 个不同元素中，每次取出 n 个元素可重复排列数 m·m·… m = m^n.. 例如：n 件物品放入 m 个抽屉中，不限放法，共有多少种不同放法？ （解：m^n 种）

二、排列.

1. ⑴对排列定义的理解.

定义：从 n 个不同的元素中任取 $m(m\le n)$个元素，按照一定顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

⑵相同排列.

如果；两个排列相同，不仅这两个排列的元素必须完全相同，而且排列的顺序也必须完全相同.

⑶排列数.

从 n 个不同元素中取出 $m(m\le n)$个元素排成一列，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列. 从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列数，用符号 A_n^m 表示.

⑷排列数公式：

$$A^m = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}(m\le n, n, m\in N)$$

注意： $n\cdot n! = (n+1)! - n!$　　规定 $0! = 1$

$A_{n+1}^m = A_n^m + A_m^m \cdot C_n^{m-1} = A_n^m + mA_n^{m-1}$　　$A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$　　规定 $C_n^0 = C_n^n = 1$

2. 含有可重元素的排列问题.

对含有相同元素求排列个数的方法是：设重集 S 有 k 个不同元素 a_1，a_2,…...a_n 其中限重复数

为 n_1、n_2……n_k，且 $n = n_1+n_2+……n_k$，则 S 的排列个数等于 $n=\dfrac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$.

例如：已知数字 3、2、2，求其排列个数 $n=\dfrac{(1+2)!}{1!2!}=3$ 又例如：数字 5、5、5、求其排列个数？其排列个数 $n=\dfrac{3!}{3!}=1$.

三、组合.

1. ⑴组合：从 n 个不同的元素中任取 $m(m\le n)$个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

⑵组合数公式：$C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$ $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

⑶两个公式：① $C_n^m=C_n^{n-m}$； ② $C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m$

①从 n 个不同元素中取出 m 个元素后就剩下 n-m 个元素，因此从 n 个不同元素中取出 n-m 个元素的方法是一一对应的，因此是一样多的就是说从 n 个不同元素中取出 n-m 个元素的唯一的一个组合.

（或者从 n+1 个编号不同的小球中，n 个白球一个红球，任取 m 个不同小球其不同选法，分二类，一类是含红球选法有 $C_n^{m-1}\cdot C_1^1=C_n^{m-1}$ 一类是不含红球的选法有 C_n^m）

②根据组合定义与加法原理得；在确定 n+1 个不同元素中取 m 个元素方法时，对于某一元素，只存在取与不取两种可能，如果取这一元素，则需从剩下的 n 个元素中再取 m-1 个元素，所以有 C_n^{m-1}，如果不取这一元素，则需从剩余 n 个元素中取出 m 个元素，所以共有 C_n^m 种，依分类原理有 $C_n^{m-1}+C_n^m=C_{n+1}^m$.

⑷排列与组合的联系与区别.

联系：都是从 n 个不同元素中取出 m 个元素.

区别：前者是"排成一排"，后者是"并成一组"，前者有顺序关系，后者无顺序关系.

⑸①几个常用组合数公式

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots\ell_n^n=2^n$$

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$$

$$C_n^m+C_{m+1}^m+C_{m+2}^m\cdots C_{m+n}^m=C_{m+n+1}^{m+1}$$

$$kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$$

$$\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

②常用的证明组合等式方法例.

i. 裂项求和法. 如：$\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\cdots\dfrac{n}{(n+1)!}=1-\dfrac{1}{(n+1)!}$（利用 $\dfrac{n-1}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}$）

ii. 导数法. iii. 数学归纳法. iv. 倒序求和法.

v. 递推法（即用 $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$ 递推）如：$C_3^3+C_4^3+C_5^3+\cdots C_n^3=C_{n+1}^4$.

vi. 构造二项式. 如：$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$

证明：这里构造二项式 $(x+1)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ 其中 x^n 的系数，左边为

$C_n^0\cdot C_n^n+C_n^1\cdot C_n^{n-1}+C_n^2\cdot C_n^{n-2}+\cdots+C_n^n\cdot C_n^0=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2$，而右边 $=C_{2n}^n$

四、排列、组合综合.

1. I. 排列、组合问题几大解题方法及题型：

①直接法. ②排除法.

③捆绑法：在特定要求的条件下，将几个相关元素当作一个元素来考虑，待整体排好之后再考虑它们“局部”的排列.它主要用于解决“元素相邻问题”，例如，一般地，n 个不同元素排成一列，要求其中某 $m(m\le n)$ 个元素必相邻的排列有 $A_{n-m+1}^{n-m+1}\cdot A_m^m$ 个.其中 A_{n-m+1}^{n-m+1} 是一个“整体排列”，而 A_m^m 则是“局部排列”.

又例如①有 n 个不同座位，A、B 两个不能相邻，则有排列法种数为 $A_n^2-A_{n-1}^1\cdot A_2^2$.

②有 n 件不同商品，若其中 A、B 排在一起有 $A_{n-1}^{n-1}\cdot A_2^2$.

③有 n 件不同商品，若其中有二件要排在一起有 $A_n^2\cdot A_{n-1}^{n-1}$.

注：①③区别在于①是确定的座位，有 A_2^2 种；而③的商品地位相同，是从 n 件不同商品任取的 2 个，有不确定性.

④插空法：先把一般元素排列好，然后把待定元素插排在它们之间或两端的空档中，此法主要解决“元素不相邻问题”.

例如：n 个元素全排列，其中 m 个元素互不相邻，不同的排法种数为多少？$A_{n-m}^{n-m}\cdot A_{n-m+1}^m$（插空法），当 n – m+1≥m, 即 m≤$\dfrac{n+1}{2}$ 时有意义.

⑤占位法：从元素的特殊性上讲，对问题中的特殊元素应优先排列，然后再排其他一般元素；从位置的特殊性上讲，对问题中的特殊位置应优先考虑，然后再排其他剩余位置.即采用“先特殊后一般”的解题原则.

⑥调序法：当某些元素次序一定时，可用此法.解题方法是：先将 n 个元素进行全排列有 A_n^n 种，$m(m\prec n)$ 个元素的全排列有 A_m^m 种，由于要求 m 个元素次序一定，因此只能取其中的某一种排法，可以利用除法起到去调序的作用，即若 n 个元素排成一列，其中 m 个元素次序一定，共有 $\dfrac{A_n^n}{A_m^m}$ 种排列方法.

例如：n 个元素全排列，其中 m 个元素顺序不变，共有多少种不同的排法？

解法一：（逐步插空法）（m+1）（m+2）…n = n！/ m！；解法二：（比例分配法）A_n^n/A_m^m.

⑦平均法：若把 kn 个不同元素平均分成 k 组，每组 n 个，共有 $\dfrac{C_{kn}^{n}\cdot C_{(k-1)n}^{n}\cdots C_{n}^{n}}{A_{k}^{k}}$.

例如：从 1，2，3，4 中任取 2 个元素将其平均分成 2 组有几种分法？有 $\dfrac{C_4^2}{2!}=3$（平均分组就用不着管组与组之间的顺序问题了）又例如将 200 名运动员平均分成两组，其中两名种子选手必在一组的概率是多少？

（$P=\dfrac{C_{18}^{8}C_{2}^{2}}{C_{20}^{10}/2!}$）

注意：分组与插空综合. 例如：n 个元素全排列，其中某 m 个元素互不相邻且顺序不变，共有多少种排法？有 $A_{n-m}^{n-m}\cdot A_{n-m+1}^{m}/A_{m}^{m}$，当 n – m+1 ≥m, 即 m≤$\dfrac{n+1}{2}$时有意义.

⑧隔板法：常用于解正整数解组数的问题.

例如：$x_1+x_2+x_3+x_4=12$的正整数解的组数就可建立组合模型将 12 个完全相同的球排成一列，在它们之间形成 11 个空隙中任选三个插入 3 块摸板，把球分成 4 个组.每一种方法所得球的数目依次为x_1,x_2,x_3,x_4显然$x_1+x_2+x_3+x_4=12$，故（x_1,x_2,x_3,x_4）是方程的一组解.反之，方程的任何一组解(y_1,y_2,y_3,y_4)，对应着惟一的一种在 12 个球之间插入隔板的方式（如图

●●|●●●●|●●●|●●●

x_1　x_2　x_3　x_4 所示）故方程的解和插板的方法一一对应. 即方程的解的组数等于插隔板的方法数C_{11}^{3}.

注意：若为非负数解的 x 个数，即用 $a_1,a_2,...a_n$ 中 a_i 等于 x_i+1，有 $x_1+x_2+x_3...+x_n=A\Rightarrow a_1-1+a_2-1+...a_n-1=A$，进而转化为求 a 的正整数解的个数为 C_{A+n}^{n-1} .

⑨定位问题：从 n 个不同元素中每次取出 k 个不同元素作排列规定某 r 个元素都包含在内，并且都排在某 r 个指定位置则有 $A_r^rA_{n-r}^{k-r}$.

例如：从 n 个不同元素中，每次取出 m 个元素的排列，其中某个元素必须固定在（或不固定在）某一位置上，共有多少种排法？

固定在某一位置上：A_{n-1}^{m-1}；不在某一位置上：$A_n^m-A_{n-1}^{m-1}$或$A_{n-1}^{m}+A_{m-1}^{1}\cdot A_{n-1}^{m-1}$（一类是不取出特殊元素 a，有 A_{n-1}^{m}，一类是取特殊元素 a，有从 m-1 个位置取一个位置，然后再从 n-1 个元素中取 m-1，这与用插空法解决是一样的）

⑩指定元素排列组合问题.

i. 从 n 个不同元素中每次取出 k 个不同的元素作排列（或组合），规定某 r 个元素都包含在内 。先 C 后 A 策略，排列$C_r^rC_{n-r}^{k-r}A_k^k$；组合$C_r^rC_{n-r}^{k-r}$.

ii. 从 n 个不同元素中每次取出 k 个不同元素作排列（或组合），规定某 r 个元素都不包含在内。先 C 后 A 策略，排列$C_{n-r}^{k}A_k^k$；组合C_{n-r}^{k}.

iii 从 n 个不同元素中每次取出 k 个不同元素作排列（或组合），规定每个排列（或组合）

都只包含某 r 个元素中的 s 个元素。先 C 后 A 策略，排列 $C_r^sC_{n-r}^{k-s}A_k^k$；组合 $C_r^sC_{n-r}^{k-s}$.

II. 排列组合常见解题策略：

①特殊元素优先安排策略；②合理分类与准确分步策略；③排列、组合混合问题先选后排的策略（处理排列组合综合性问题一般是先选元素，后排列）；④正难则反，等价转化策略；⑤相邻问题插空处理策略；

⑥不相邻问题插空处理策略；⑦定序问题除法处理策略；⑧分排问题直排处理的策略；⑨“小集团”排列问题中先整体后局部的策略；⑩构造模型的策略.

2. 组合问题中分组问题和分配问题.

①均匀不编号分组：将 n 个不同元素分成不编号的 m 组，假定其中 r 组元素个数相等，不管是否分尽，其分法种数为 A/A_r^r（其中 A 为非均匀不编号分组中分法数）.如果再有 K 组均匀分组应再除以 A_k^k.

例：10 人分成三组，各组元素个数为 2、4、4，其分法种数为 $C_{10}^2C_8^4C_4^4/A_2^2=1575$.若分成六组，各组人数分别为 1、1、2、2、2、2，其分法种数为 $C_{10}^1C_9^1C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2/A_2^2\cdot A_4^4$

②非均匀编号分组: n 个不同元素分组，各组元素数目均不相等，且考虑各组间的顺序，其分法种数为 $A\cdot A_m^m$

例：10 人分成三组，各组人数分别为 2、3、5，去参加不同的劳动，其安排方法为：$C_{10}^2\cdot C_8^3\cdot C_5^5\cdot A_3^3$ 种.

若从 10 人中选 9 人分成三组，人数分别为 2、3、4，参加不同的劳动，则安排方法有 $C_{10}^2C_8^3C_5^4\cdot A_3^3$ 种

③均匀编号分组：n 个不同元素分成 m 组，其中 r 组元素个数相同且考虑各组间的顺序，其分法种数为 $A/A_r^r\cdot A_m^m$.

例：10 人分成三组，人数分别为 2、4、4，参加三种不同劳动，分法种数为 $\dfrac{C_{10}^2C_8^4C_4^4}{A_2^2}\cdot A_3^3$

④非均匀不编号分组：将 n 个不同元素分成不编号的 m 组，每组元素数目均不相同，且不考虑各组间顺序，不管是否分尽，其分法种数为 $\mathrm{A}=\mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{m}_1}\ \mathrm{C}_{\mathrm{n}-\mathrm{m}_1}^{\mathrm{m}_2}\cdots\mathrm{C}_{\mathrm{n}-(\mathrm{m}_1+\mathrm{m}_2+\ldots+\mathrm{m}_{k-1})}^{\mathrm{m}_k}$

例：10 人分成三组，每组人数分别为 2、3、5，其分法种数为 $C_{10}^2C_8^3C_5^5=2520$ 若从 10 人中选出 6 人分成三组，各组人数分别为 1、2、3，其分法种数为 $C_{10}^1C_9^2C_7^3=12600$.

五、二项式定理.

1. ⑴二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^na^0b^n$.

展开式具有以下特点：

① 项数：共有 $n+1$ 项；

② 系数：依次为组合数 $C_n^0,C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^r,\cdots,C_n^n$；

③ 每一项的次数是一样的，即为 n 次，展开式依 a 的降幂排列，b 的升幂排列展开.

⑵二项展开式的通项.

$(a+b)^n$ 展开式中的第 $r+1$ 项为：$T_{r+1}=C_n^r a^{n-r}b^r(0\le r\le n,r\in Z)$.

⑶二项式系数的性质.

①在二项展开式中与首末两项“等距离”的两项的二项式系数相等；

②二项展开式的中间项二项式系数最大.

I. 当 n 是偶数时，中间项是第 $\frac{n}{2}+1$ 项，它的二项式系数 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 最大；

II. 当 n 是奇数时，中间项为两项，即第 $\frac{n+1}{2}$ 项和第 $\frac{n+1}{2}+1$ 项，它们的二项式系数 $C_n^{\frac{n-1}{2}}=C_n^{\frac{n+1}{2}}$ 最大.

③系数和：

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$
$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+\cdots=2^{n-1}$$

附：一般来说 $(ax+by)^n$（a,b 为常数）在求系数最大的项或最小的项时均可直接根据性质二求解. 当 $|a|\ne 1$或$|b|\ne 1$时，一般采用解不等式组 $\begin{cases}A_k\ge A_{k+1}\\A_k\ge A_{k-1}\end{cases}$或$\begin{cases}A_k\le A_{k+1}\\A_k\le A_{k-1}\end{cases}$（$A_k$ 为T_{k+1} 的系数或系数的绝对值）的办法来求解.

⑷如何来求 $(a+b+c)^n$ 展开式中含 $a^pb^qc^r$ 的系数呢？其中 $p,q,r\in N$，且 $p+q+r=n$ 把 $(a+b+c)^n=[(a+b)+c]^n$ 视为二项式，先找出含有 C^r 的项 $C_n^r(a+b)^{n-r}C^r$，另一方面在 $(a+b)^{n-r}$ 中含有 b^q 的项为 $C_{n-r}^q a^{n-r-q}b^q=C_{n-r}^q a^pb^q$，故在 $(a+b+c)^n$ 中含 $a^pb^qc^r$ 的项为 $C_n^rC_{n-r}^q a^pb^qc^r$.其系数为 $C_n^rC_{n-r}^q=\frac{n!}{r!(n-r)!}\cdot\frac{(n-r)!}{q!(n-r-q)!}=\frac{n!}{r!q!p!}=C_n^pC_{n-p}^qC_r^r$.

2. 近似计算的处理方法.

当 a 的绝对值与 1 相比很小且 n 不大时，常用近似公式 $(1+a)^n\approx 1+na$，因为这时展开式的后面部分 $C_n^2a^2+C_n^3a^3+\cdots+C_n^na^n$ 很小，可以忽略不计。类似地，有 $(1-a)^n\approx 1-na$ 但使用这两个公式时应注意 a 的条件，以及对计算精确度的要求.

高中数学第十一章-概率

考试内容：

随机事件的概率．等可能性事件的概率．互斥事件有一个发生的概率．相互独立事件同时发生的概率．独立重复试验.

考试要求：

（1）了解随机事件的发生存在着规律性和随机事件概率的意义.

（2）了解等可能性事件的概率的意义，会用排列组合的基本公式计算一些等可能性事件的概率。

（3）了解互斥事件、相互独立事件的意义，会用互斥事件的概率加法公式与相互独立事件的概率乘法公式计算一些事件的概率.

（4）会计算事件在 n 次独立重复试验中恰好发生 κ 次的概率.

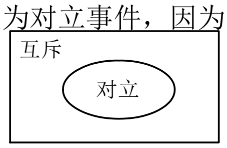
§11. 概率　知识要点

1. 概率：随机事件 A 的概率是频率的稳定值，反之，频率是概率的近似值.

2. 等可能事件的概率：如果一次试验中可能出现的结果有年 n 个，且所有结果出现的可能性都相等，那么，每一个基本事件的概率都是 $\frac{1}{n}$，如果某个事件 A 包含的结果有 m 个，那么事件 A 的概率 $P(A)=\frac{m}{n}$.

3. ①互斥事件：不可能同时发生的两个事件叫互斥事件. 如果事件 A、B 互斥，那么事件 A+B 发生(即 A、B 中有一个发生)的概率，等于事件 A、B 分别发生的概率和，即 P(A+B)=P(A)+P(B)，推广：$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

②对立事件：两个事件必有一个发生的互斥事件叫对立事件. 例如：从 1～52 张扑克牌中任取一张抽到“红桃”与抽到“黑桃”互为互斥事件，因为其中一个不可能同时发生，但又不能保证其中一个必然发生，故不是对立事件.而抽到“红色牌”与抽到黑色牌“互为对立事件，因为其中一个必发生.



注意：i.对立事件的概率和等于 1：$P(A)+P(\bar{A})=P(A+\bar{A})=1$.

ii.互为对立的两个事件一定互斥，但互斥不一定是对立事件.

③相互独立事件：事件 A(或 B)是否发生对事件 B(或 A)发生的概率没有影响.这样的两个事件叫做相互独立事件. 如果两个相互独立事件同时发生的概率，等于每个事件发生的概率的积，即 P(A·B)=P(A)·P(B). 由此，当两个事件同时发生的概率 P（AB）等于这两个事件发生概率之和，这时我们也可称这两个事件为独立事件.例如：从一副扑克牌（52 张）中任抽一张设 A：“抽到老 K”；B：“抽到红牌”则 A 应与 B 互为独立事件[看上去 A 与 B 有关系很有可能不是独立事件，但 $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13},P(B)=\frac{26}{52}=\frac{1}{2},P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{26}$.又事件 AB 表示“既抽到老 K 对抽到红牌”即“抽到红桃老 K 或方块老 K”有 $P(A\cdot B)=\frac{2}{52}=\frac{1}{26}$，因此有 $P(A)\cdot P(B)=P(A\cdot B)$.

推广：若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则 $P(A_1\cdot A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)$.

注意：i. 一般地，如果事件 A 与 B 相互独立，那么 A 与 $\bar{B},\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也都相互独立.

ii. 必然事件与任何事件都是相互独立的.

iii. 独立事件是对任意多个事件来讲，而互斥事件是对同一实验来讲的多个事件，且这多个事件不能同时发生，故这些事件相互之间必然影响，因此互斥事件一定不是独立事件.

④独立重复试验：若 n 次重复试验中，每次试验结果的概率都不依赖于其他各次试验的结果，则称这 n 次试验是独立的. 如果在一次试验中某事件发生的概率为 P，那么在 n 次独立重复

试验中这个事件恰好发生 k 次的概率：$P_n(k)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k}$.

4. 对任何两个事件都有 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$

第十二章-概率与统计

考试内容：
抽样方法. 总体分布的估计.
总体期望值和方差的估计.
考试要求：
（1）了解随机抽样了解分层抽样的意义，会用它们对简单实际问题进行抽样.
（2）会用样本频率分布估计总体分布.
（3）会用样本估计总体期望值和方差.

§12. 概率与统计　知识要点

一、随机变量.

1. 随机试验的结构应该是不确定的.试验如果满足下述条件：
①试验可以在相同的情形下重复进行;②试验的所有可能结果是明确可知的,并且不止一个;③每次试验总是恰好出现这些结果中的一个,但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果.
它就被称为一个随机试验.
2. 离散型随机变量：如果对于随机变量可能取的值，可以按一定次序一一列出，这样的随机变量叫做离散型随机变量.若ξ是一个随机变量，a，b 是常数.则 $\eta=a\xi+b$ 也是一个随机变量.一般地，若ξ是随机变量，$f(x)$ 是连续函数或单调函数，则 $f(\xi)$ 也是随机变量.也就是说，随机变量的某些函数也是随机变量.
设离散型随机变量ξ可能取的值为：$x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots$
ξ取每一个值 $x_1(i=1,2,\cdots)$ 的概率 $P(\xi=x_i)=p_i$，则表称为随机变量ξ的概率分布，简称ξ的分布列.

ξ	x_1	x_2	…	x_i	…
P	p_1	p_2	…	p_i	…

有性质① $p_1\geq 0,i=1,2,\cdots$；　② $p_1+p_2+\cdots+p_i+\cdots=1$.
注意：若随机变量可以取某一区间内的一切值，这样的变量叫做<u>连续型随机变量</u>.例如：$\xi\in[0,5]$ 即 ξ 可以取 0～5 之间的一切数，包括整数、小数、无理数.
3. ⑴二项分布：如果在一次试验中某事件发生的概率是 P，那么在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率是：$P(\xi=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ [其中 $k=0,1,\cdots,n,q=1-p$]
于是得到随机变量ξ的概率分布如下：我们称这样的随机变量ξ服从二项分布，记作 ξ～B（n·p），其中 n，p 为参数，并记 $C_n^k p^k q^{n-k}=b(k;n\cdot p)$.

⑵二项分布的判断与应用.
①二项分布，实际是对 n 次独立重复试验.关键是看某一事件是否是进行 n 次独立重复，且每次试验只有两种结果，如果不满足此两条件，随机变量就不服从二项分布.
②当随机变量的总体很大且抽取的样本容量相对于总体来说又比较小，而每次抽取时又只有两种试验结果，此时可以把它看作独立重复试验，利用二项分布求其分布列.
4. 几何分布：“$\xi=k$”表示在第 k 次独立重复试验时，事件第一次发生，如果把 k 次试验时事件 A 发生记为 A_k，事 A 不发生记为 $A_k,P(A_k)=q$，那么 $P(\xi=k)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k)$.根据

相互独立事件的概率乘法分式：$P(\xi=k)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_{k-1})P(A_k)=q^{k-1}p\ \ (k=1,2,3,\cdots)$ 于是得到随机变量ξ的概率分布列.

ξ	1	2	3	…	k	…
P	q	qp	q^2p	…	$q^{k-1}p$	…

我们称ξ服从几何分布，并记 $g(k,p)=q^{k-1}p$，其中 $q=1-p.\ \ k=1,2,3\cdots$

5. ⑴超几何分布：一批产品共有 N 件，其中有 M（M<N）件次品，今抽取 $n(1\le n\le N)$ 件，则其中的次品数ξ是一离散型随机变量，分布列为 $P(\xi=k)=\dfrac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\cdot(0\le k\le M,0\le n-k\le N-M)$.〔分子是从 M 件次品中取 k 件，从 N-M 件正品中取 n-k 件的取法数，如果规定 $m<r$ 时 $C_m^r=0$，则 k 的范围可以写为 k=0，1，…，n.〕

⑵超几何分布的另一种形式：一批产品由 a 件次品、b 件正品组成，今抽取 n 件（1≤n≤a+b），则次品数ξ的分布列为 $P(\xi=k)=\dfrac{C_a^k\cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}\quad k=0,1,\cdots,n.$.

⑶超几何分布与二项分布的关系.

设一批产品由 a 件次品、b 件正品组成，不放回抽取 n 件时，其中次品数ξ服从超几何分布.若放回式抽取，则其中次品数 η 的分布列可如下求得：把 $a+b$ 个产品编号，则抽取 n 次共有 $(a+b)^n$ 个可能结果，等可能：$(\eta=k)$ 含 $C_n^k a^k b^{n-k}$ 个结果，故 $P(\eta=k)=\dfrac{C_n^k a^k b^{n-k}}{(a+b)^n}=C_n^k(\dfrac{a}{a+b})^k(1-\dfrac{a}{a+b})^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$，即 $\eta\sim B(n\cdot\dfrac{a}{a+b})$.[我们先为 k 个次品选定位置，共 C_n^k 种选法；然后每个次品位置有 a 种选法，每个正品位置有 b 种选法] 可以证明：当产品总数很大而抽取个数不多时，$P(\xi=k)\approx P(\eta=k)$，因此二项分布可作为超几何分布的近似，无放回抽样可近似看作放回抽样.

二、数学期望与方差.

1. 期望的含义：一般地，若离散型随机变量ξ的概率分布为

ξ	x_1	x_2	…	x_i	…
P	p_1	p_2	…	p_i	…

则称 $E\xi=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n+\cdots$ 为ξ的数学期望或平均数、均值.数学期望又简称期望.数学期望反映了离散型随机变量取值的平均水平.

2. ⑴随机变量 $\eta=a\xi+b$ 的数学期望：$E\eta=E(a\xi+b)=aE\xi+b$

①当 $a=0$ 时，$E(b)=b$，即常数的数学期望就是这个常数本身.

②当 $a=1$ 时，$E(\xi+b)=E\xi+b$，即随机变量ξ与常数之和的期望等于ξ的期望与这个常数的和.

③当 $b=0$ 时，$E(a\xi)=aE\xi$，即常数与随机变量乘积的期望等于这个常数与随机变量期望的乘积.

⑵单点分布：$E\xi=c\times1=c$ 其分布列为：$P(\xi=1)=c$.

⑶两点分布：$E\xi=0\times q+1\times p=p$，其分布列为：（p + q = 1）

ξ	0	1
P	q	p

⑷二项分布：$E\xi=\sum k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k\cdot q^{n-k}=np$ 其分布列为 $\xi\sim B(n,p)$.（P 为发生 ξ 的概率）

⑸几何分布：$E\xi=\frac{1}{p}$ 其分布列为 $\xi\sim q(k,p)$.（P 为发生 ξ 的概率）

3.方差、标准差的定义：当已知随机变量ξ的分布列为 $P(\xi=x_k)=p_k(k=1,2,\cdots)$ 时，则称 $D\xi=(x_1-E\xi)^2p_1+(x_2-E\xi)^2p_2+\cdots+(x_n-E\xi)^2p_n+\cdots$ 为ξ的方差. 显然 $D\xi\geq 0$，故 $\sigma\xi=\sqrt{D\xi}$. $\sigma\xi$ 为ξ的根方差或标准差.随机变量ξ的方差与标准差都反映了随机变量ξ取值的稳定与波动，集中与离散的程度. $D\xi$ 越小，稳定性越高，波动越小.

4.方差的性质.

⑴随机变量 $\eta=a\xi+b$ 的方差 $D(\eta)=D(a\xi+b)=a^2D\xi$.（a、b 均为常数）

⑵单点分布：$D\xi=0$ 其分布列为 $P(\xi=1)=p$

⑶两点分布：$D\xi=pq$ 其分布列为：（p＋q＝1）

ξ	0	1
P	q	p

⑷二项分布：$D\xi=npq$

⑸几何分布：$D\xi=\frac{q}{p^2}$

5. 期望与方差的关系.

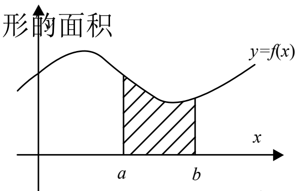
⑴如果 $E\xi$ 和 $E\eta$ 都存在，则 $E(\xi\pm\eta)=E\xi\pm E\eta$

⑵设ξ和 η 是互相独立的两个随机变量，则 $E(\xi\eta)=E\xi\cdot E\eta, D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$

⑶期望与方差的转化：$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$ ⑷ $E(\xi-E\xi)=E(\xi)-E(E\xi)$（因为 $E\xi$ 为一常数）$=E\xi-E\xi=0$.

三、正态分布.（基本不列入考试范围）

1.密度曲线与密度函数：对于连续型随机变量ξ，位于 x 轴上方，ξ落在任一区间 $[a,b)$ 内的概率等于它与 x 轴.直线 $x=a$ 与直线 $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积（如图阴影部分）的曲线叫ξ的密度曲线，以其作为图像的函数 $f(x)$ 叫做ξ的密度函数，由于“$x\in(-\infty,+\infty)$”是必然事件，故密度曲线与 x 轴所夹部分面积等于 1.



2.⑴正态分布与正态曲线：如果随机变量ξ的概率密度为：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.（$x\in R,\mu,\sigma$ 为常数，且 $\sigma\succ 0$），称ξ服从参数为 μ,σ 的正态分布，用 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$ 表示. $f(x)$ 的表达式可简记为 $N(\mu,\sigma^2)$，它的密度曲线简称为正态曲线.

⑵正态分布的期望与方差：若 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，则ξ的期望与方差分别为：$E\xi=\mu, D\xi=\sigma^2$.

⑶正态曲线的性质.

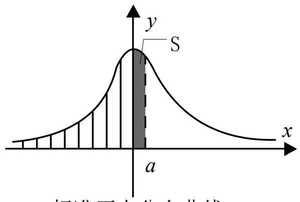
①曲线在 x 轴上方，与 x 轴不相交.

②曲线关于直线 $x=\mu$ 对称.

③当 $x=\mu$ 时曲线处于最高点，当 x 向左、向右远离时，曲线不断地降低，呈现出“中间高、两边低”的钟形曲线.

④当 $x<\mu$ 时，曲线上升；当 $x>\mu$ 时，曲线下降，并且当曲线向左、向右两边无限延伸时，以 x 轴为渐近线，向 x 轴无限的靠近.
⑤当 μ 一定时，曲线的形状由 σ 确定，σ 越大，曲线越“矮胖”.表示总体的分布越分散；σ 越小，曲线越“瘦高”，表示总体的分布越集中.

3. ⑴标准正态分布：如果随机变量ξ的概率函数为 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-\infty\prec x\prec+\infty)$，则称ξ服从标准正态分布. 即 $\xi\sim N(0,1)$ 有 $\varphi(x)=P(\xi\le x)$，$\varphi(x)=1-\varphi(-x)$ 求出，而 P（a＜ξ≤b）的计算则是 $P(a\prec\xi\le b)=\varphi(b)-\varphi(a)$.
注意：当标准正态分布的 $\Phi(x)$ 的 X 取 0 时，有 $\Phi(x)=0.5$ 当 $\Phi(x)$ 的 X 取大于 0 的数时，有 $\Phi(x)\succ 0.5$.比如 $\Phi(\frac{0.5-\mu}{\sigma})=0.0793\prec 0.5$ 则 $\frac{0.5-\mu}{\sigma}$ 必然小于 0，如图.



标准正态分布曲线
S阴=0.5　Sa=0.5+S

⑵正态分布与标准正态分布间的关系：若 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$ 则ξ的分布函数通常用 $F(x)$ 表示，且有 $P(\xi\le x)=F(x)=\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$.

4.⑴“3 σ ”原则.
假设检验是就正态总体而言的，进行假设检验可归结为如下三步：①提出统计假设，统计假设里的变量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.②确定一次试验中的取值 a 是否落入范围 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$.③做出判断：如果 $a\in(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$，接受统计假设. 如果 $a\notin(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$，由于这是小概率事件，就拒绝统计假设.
⑵“3 σ ”原则的应用：若随机变量ξ服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 则 ξ落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 内的概率为 99.7% 亦即落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之外的概率为 0.3%，此为小概率事件，如果此事件发生了，就说明此种产品不合格（即ξ不服从正态分布）.

高中数学第十三章-极 限

考试内容：

　　教学归纳法．数学归纳法应用．

　数列的极限．

　函数的极限．根限的四则运算．函数的连续性．

考试要求：

（1）理解数学归纳法的原理，能用数学归纳法证明一些简单的数学命题．
（2）了解数列极限和函数极限的概念．
（3）掌握极限的四则运算法则；会求某些数列与函数的极限．
（4）了解函数连续的意义，了解闭区间上连续函数有最大值和最小值的性质．

§13. 极 限 知识要点

1. ⑴第一数学归纳法：①证明当n取第一个n_0时结论正确；②假设当$n=k$（$k\in N^+,k\ge n_0$）时，结论正确，证明当$n=k+1$时，结论成立.

⑵第二数学归纳法：设$P(n)$是一个与正整数n有关的命题，如果

①当$n=n_0$（$n_0\in N^+$）时，$P(n)$成立；

②假设当$n\le k$（$k\in N^+,k\ge n_0$）时，$P(n)$成立，推得$n=k+1$时，$P(n)$也成立.

那么，根据①②对一切自然数$n\ge n_0$时，$P(n)$都成立.

2. ⑴数列极限的表示方法：

① $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$

②当$n\to\infty$时，$a_n\to a$.

⑵几个常用极限：

① $\lim\limits_{n\to\infty} C=C$（$C$为常数）

② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0\quad(k\in N,k\text{是常数})$

③对于任意实常数，

当$|a|\prec 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} a^n=0$

当$|a|=1$时，若 a = 1，则$\lim\limits_{n\to\infty} a^n=1$；若$a=-1$，则$\lim\limits_{n\to\infty} a^n=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$不存在

当$|a|\succ 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty} a^n$不存在

⑶数列极限的四则运算法则：

如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty} b_b=b$，那么

① $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$

② $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}(b\ne 0)$

特别地，如果C是常数，那么

$\lim\limits_{n\to\infty}(C\cdot a_n)=\lim\limits_{n\to\infty} C\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a_n=Ca$.

⑷数列极限的应用：

求无穷数列的各项和，特别地，当$|q|\prec 1$时，无穷等比数列的各项和为$S=\frac{a_1}{1-q}(|q|\prec 1)$.

（化循环小数为分数方法同上式）

注：并不是每一个无穷数列都有极限.

3. 函数极限；

⑴当自变量 x 无限趋近于常数 x_0（但不等于 x_0）时，如果函数 $f(x)$ 无限趋进于一个常数 a，就是说当 x 趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的极限为 a.记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 或当 $x\to x_0$ 时，$f(x)\to a$.

注：当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 是否存在极限与 $f(x)$ 在 x_0 处是否定义无关，因为 $x\to x_0$ 并不要求 $x=x_0$.（当然，$f(x)$ 在 x_0 是否有定义也与 $f(x)$ 在 x_0 处是否存在极限无关.$\Rightarrow$ 函数 $f(x)$ 在 x_0 有定义是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的既不充分又不必要条件.）

如 $P(x)=\begin{cases} x-1 & x\succ 1 \\ -x+1 & x\prec 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处无定义，但 $\lim\limits_{x\to 1} P(x)$ 存在，因为在 $x=1$ 处左右极限均等于零.

⑵函数极限的四则运算法则：

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$，那么

① $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=a\pm b$

② $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=a\cdot b$

③ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}(b\neq 0)$

特别地，如果 C 是常数，那么

$\lim\limits_{x\to x_0}(C\cdot f(x))=C\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)]^n$（$n\in N^+$）

注：①各个函数的极限都应存在.

②四则运算法则可推广到任意有限个极限的情况，但不能推广到无限个情况.

⑶几个常用极限：

① $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

② $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$（$0<a<1$）；$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$（$a>1$）

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

④ $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$，$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$（$e=2.71828183$）

4. 函数的连续性：

⑴如果函数 $f(x)$，$g(x)$ 在某一点 $x=x_0$ 连续，那么函数 $f(x)\pm g(x), f(x)\cdot g(x), \dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x)\neq 0)$ 在点 $x=x_0$ 处都连续.

⑵函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续必须满足三个条件：

①函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处有定义；② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；③函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的极限值

等于该点的函数值，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

⑶函数 f（x）在点 $x=x_0$ 处不连续（间断）的判定：
如果函数 f（x）在点 $x=x_0$ 处有下列三种情况之一时，则称 x_0 为函数 f（x）的不连续点.

①f（x）在点 $x=x_0$ 处没有定义，即 $f(x_0)$ 不存在；② $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；③ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

5. 零点定理，介值定理，夹逼定理：

⑴零点定理：设函数 f（x）在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)\prec 0$.那么在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点，即至少有一点 ξ（$a<\xi<b$）使 $f(\xi)=0$.

⑵介值定理：设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同函数值，$f(a)=A, f(b)=B$，那么对于 A,B 之间任意的一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$（$a<\xi<b$）.

⑶夹逼定理：设当 $0\prec|x-x_0|\prec\delta$ 时，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则必有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.$

注：$|x-x_0|$：表示以 x_0 为的极限，则 $|x-x_0|$ 就无限趋近于零.（ξ 为最小整数）

6. 几个常用极限：

① $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0,|q|\prec 1$

② $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!}=0(a\succ 0)$

③ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^k}{a^n}=0(a\succ 1,k$ 为常数）

④ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n}=0$

⑤ $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln n)^k}{n^{\varepsilon}}=0(\varepsilon\succ 0,k$ 为常数）

高中数学第十四章 导 数

考试内容：

导数的背影.

导数的概念.

多项式函数的导数.

利用导数研究函数的单调性和极值．函数的最大值和最小值.

考试要求：

（1）了解导数概念的某些实际背景.

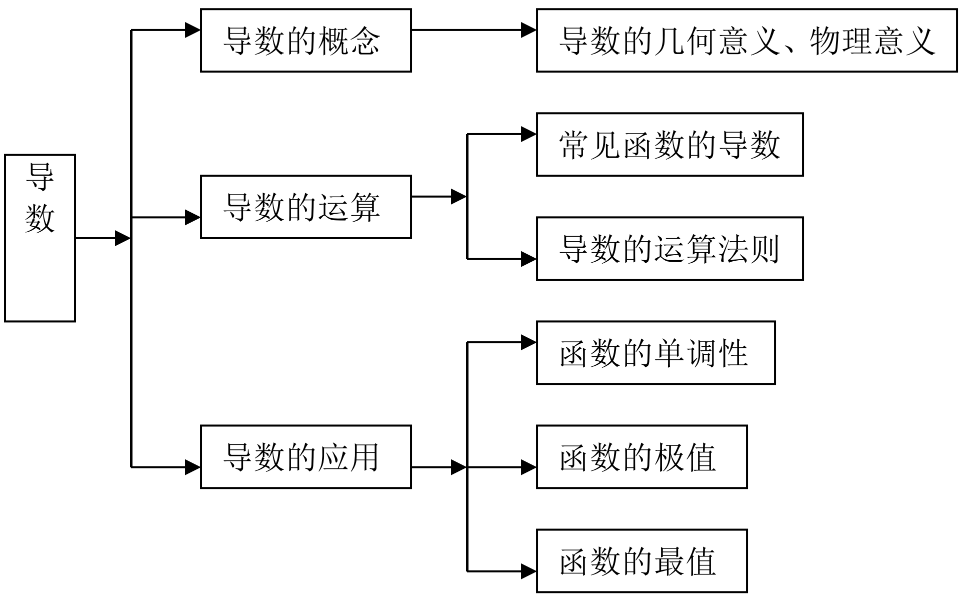
（2）理解导数的几何意义.

（3）掌握函数，y=c(c 为常数)、y=xn(n∈N+)的导数公式，会求多项式函数的导数.

（4）理解极大值、极小值、最大值、最小值的概念，并会用导数求多项式函数的单调区间、极大值、极小值及闭区间上的最大值和最小值.

（5）会利用导数求某些简单实际问题的最大值和最小值.

§14. 导 数 知识要点



1. 导数（导函数的简称）的定义：设 x_0 是函数 $y=f(x)$ 定义域的一点，如果自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx，则函数值 y 也引起相应的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率；如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并把这个极限叫做 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

注：① Δx 是增量，我们也称为“改变量”，因为 Δx 可正，可负，但不为零.

②以知函数 $y=f(x)$ 定义域为 A，$y=f'(x)$ 的定义域为 B，则 A 与 B 关系为 $A\supseteq B$.

2. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续与点 x_0 处可导的关系：

⑴函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的必要不充分条件.
可以证明，如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，那么 $y=f(x)$ 点 x_0 处连续.
事实上，令 $x=x_0+\Delta x$，则 $x\to x_0$ 相当于 $\Delta x\to 0$.

于是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x+x_0)-f(x_0)+f(x_0)]$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\Delta x+f(x_0)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}+\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0)=f'(x_0)\cdot 0+f(x_0)=f(x_0)$.

⑵如果 $y=f(x)$ 点 x_0 处连续，那么 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，是不成立的.

例：$f(x)=|x|$ 在点 $x_0=0$ 处连续，但在点 $x_0=0$ 处不可导，因为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$，当 $\Delta x>0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1$；当 $\Delta x<0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-1$，故 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在.

注：①可导的奇函数函数其导函数为偶函数.
②可导的偶函数函数其导函数为奇函数.

3. 导数的几何意义：
函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x))$ 处的切线的斜率，也就是说，曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x))$ 处的切线的斜率是 $f'(x_0)$，切线方程为

$y-y_0=f'(x)(x-x_0)$.

4. 求导数的四则运算法则：

$(u\pm v)'=u'\pm v'\Rightarrow y=f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)\Rightarrow y'=f_1'(x)+f_2'(x)+...+f_n'(x)$

$(uv)'=vu'+v'u\Rightarrow(cv)'=c'v+cv'=cv'$（$c$ 为常数）

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-v'u}{v^2}(v\neq 0)$$

注：①u,v 必须是可导函数.
②若两个函数可导，则它们和、差、积、商必可导；若两个函数均不可导，则它们的和、差、积、商不一定不可导.

例如：设 $f(x)=2\sin x+\dfrac{2}{x}$，$g(x)=\cos x-\dfrac{2}{x}$，则 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 处均不可导，但它们和 $f(x)+g(x)=$
$\sin x+\cos x$ 在 $x=0$ 处均可导.

5. 复合函数的求导法则：$f_x'(\varphi(x))=f'(u)\varphi'(x)$ 或 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$

复合函数的求导法则可推广到多个中间变量的情形.

6. 函数单调性：

⑴函数单调性的判定方法：设函数 $y=f(x)$ 在某个区间内可导，如果 $f'(x)>0$，则 $y=f(x)$ 为增函数；如果 $f'(x)<0$，则 $y=f(x)$ 为减函数.

⑵常数的判定方法；

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内恒有 $f'(x)$ =0，则 $y=f(x)$ 为常数.

注：① $f(x)\succ 0$ 是 f（x）递增的充分条件，但不是必要条件，如 $y=2x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上并不是都有 $f(x)\succ 0$，有一个点例外即 x=0 时 f（x）=0，同样 $f(x)\prec 0$ 是 f（x）递减的充分非必要条件.

②一般地，如果 f（x）在某区间内有限个点处为零，在其余各点均为正（或负），那么 f（x）在该区间上仍旧是单调增加（或单调减少）的.

7. 极值的判别方法：（极值是在 x_0 附近所有的点，都有 $f(x)<f(x_0)$，则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值，极小值同理）

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续时，

①如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)$ >0，右侧 $f'(x)$ <0，那么 $f(x_0)$ 是极大值；

②如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)$ <0，右侧 $f'(x)$ >0，那么 $f(x_0)$ 是极小值.

也就是说 x_0 是极值点的充分条件是 x_0 点两侧导数异号，而不是 $f'(x)$ =0[①]. 此外，函数不可导的点也可能是函数的极值点[②]. 当然，极值是一个局部概念，极值点的大小关系是不确定的，即有可能极大值比极小值小（函数在某一点附近的点不同）.

注①： 若点 x_0 是可导函数 $f(x)$ 的极值点，则 $f'(x)$ =0. 但反过来不一定成立. 对于可导函数，其一点 x_0 是极值点的必要条件是若函数在该点可导，则导数值为零.

例如：函数 $y=f(x)=x^3$， $x=0$ 使 $f'(x)$ =0，但 $x=0$ 不是极值点.

②例如：函数 $y=f(x)=|x|$，在点 $x=0$ 处不可导，但点 $x=0$ 是函数的极小值点.

8. 极值与最值的区别：极值是在局部对函数值进行比较，最值是在整体区间上对函数值进行比较.

注：函数的极值点一定有意义.

9. 几种常见的函数导数：

I. $C'=0$ （C 为常数）　　$(\sin x)'=\cos x$　　$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(x^n)'=nx^{n-1}$ （$n\in R$）　　$(\cos x)'=-\sin x$　　$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

II. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$　　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a e$　　$(\arctan x)'=\dfrac{1}{x^2+1}$

$(e^x)'=e^x$　　$(a^x)'=a^x\ln a$　　$(arc\cot x)'=-\dfrac{1}{x^2+1}$

III. 求导的常见方法：

①常用结论：$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$.

②形如 $y=(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$ 或 $y=\dfrac{(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)}{(x-b_1)(x-b_2)...(x-b_n)}$ 两边同取自然对数，可转化求代数和形式.

③无理函数或形如 $y=x^x$ 这类函数，如 $y=x^x$ 取自然对数之后可变形为 $\ln y=x\ln x$，对两边求导可得 $\dfrac{y'}{y}=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}\Rightarrow y'=y\ln x+y\Rightarrow y'=x^x\ln x+x^x$.

高中数学第十五章 复数

考试内容：

复数的概念.

复数的加法和减法.

复数的乘法和除法.

数系的扩充.

考试要求：

（1）了解复数的有关概念及复数的代数表示和几何意义.

（2）掌握复数代数形式的运算法则，能进行复数代数形式的加法、减法、乘法、除法运算.

（3）了解从自然数系到复数系的关系及扩充的基本思想.

§15. 复 数 知识要点

1. ⑴复数的单位为 i，它的平方等于－1，即 $i^2=-1$.

⑵复数及其相关概念：

① 复数—形如 $a+bi$ 的数（其中 a，$b\in R$）；

② 实数—当 $b=0$ 时的复数 $a+bi$，即 a；

③ 虚数—当 $b\neq 0$ 时的复数 $a+bi$；

④ 纯虚数—当 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 时的复数 $a+bi$，即 bi.

⑤ 复数 $a+bi$ 的实部与虚部—a 叫做复数的实部，b 叫做虚部（注意 a，b 都是实数）

⑥ 复数集 C—全体复数的集合，一般用字母 C 表示.

⑶两个复数相等的定义：

$a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$（其中，a，b，c，d，$\in R$）特别地 $a+bi=0\Leftrightarrow a=b=0$.

⑷两个复数，如果不全是实数，就不能比较大小.

注：①若 z_1,z_2 为复数，则 1° 若 $z_1+z_2\succ 0$，则 $z_1\succ -z_2$.（×）[z_1,z_2 为复数，而不是实数]

2° 若 $z_1\prec z_2$，则 $z_1-z_2\prec 0$.（√）

② 若 $a,b,c\in C$，则 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$ 是 $a=b=c$ 的必要不充分条件.（当 $(a-b)^2=i^2$，

$(b-c)^2=1,(c-a)^2=0$ 时，上式成立）

2. ⑴复平面内的两点间距离公式：$d=|z_1-z_2|$.

其中 z_1，z_2 是复平面内的两点 z_1 和 z_2 所对应的复数，d 表示 z_1 和 z_2 间的距离.

由上可得：复平面内以 z_0 为圆心，r 为半径的圆的复数方程：$|z-z_0|=r$（$r \succ 0$）.

⑵曲线方程的复数形式：

①$|z-z_0|=r$ 表示以 z_0 为圆心，r 为半径的圆的方程.

②$|z-z_1|=|z-z_2|$ 表示线段 z_1z_2 的垂直平分线的方程.

③$|z-z_1|+|z-z_2|=2a$（$a \succ 0$ 且 $2a \succ |z_1z_2|$）表示以 Z_1，Z_2 为焦点，长半轴长为 a 的椭圆的方程

（若 $2a=|z_1z_2|$，此方程表示线段 Z_1，Z_2）.

④$\left||z-z_1|-|z-z_2|\right|=2a$（$0 \prec 2a \prec |z_1z_2|$），表示以 Z_1，Z_2 为焦点，实半轴长为 a 的双曲线方程

（若 $2a=|z_1z_2|$，此方程表示两条射线）.

⑶绝对值不等式：
设 z_1，z_2 是不等于零的复数，则

①$\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$.

左边取等号的条件是 $z_2=\lambda z_1$（$\lambda \in R$，且 $\lambda \prec 0$），右边取等号的条件是 $z_2=\lambda z_1$（$\lambda \in R$，$\lambda \succ 0$）.

②$\left||z_1|-|z_2|\right| \le |z_1-z_2| \le |z_1|+|z_2|$.

左边取等号的条件是 $z_2=\lambda z_1$（$\lambda \in R$，$\lambda \succ 0$），右边取等号的条件是 $z_2=\lambda z_1$（$\lambda \in R$，$\lambda \prec 0$）.

注：$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$.

3. 共轭复数的性质：

$\overline{\overline{z}}=z$　　　　$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

$z+\overline{z}=2a$，$z-\overline{z}=2bi$（$z=a+bi$）　　　　$z\cdot\overline{z}=|z|^2=|\overline{z}|^2$

$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$　　　　$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$（$z_2\neq 0$）　　　　$\overline{z^n}=(\overline{z})^n$

注：两个共轭复数之差是纯虚数.（×）[之差可能为零，此时两个复数是相等的]

4。⑴①复数的乘方：$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot z\ldots z}_{n}(n\in N^+)$

②对任何 z，$z_1,z_2\in C$ 及 $m,n\in N_+$ 有

③ $z^m\cdot z^n=z^{m+n},(z^m)^n=z^{m\cdot n},(z_1\cdot z_2)^n=z_1^n\cdot z_2^n$

注：①以上结论不能拓展到分数指数幂的形式，否则会得到荒谬的结果，如$i^2=-1,i^4=1$若由

$i^2=(i^4)^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}=1$就会得到$-1=1$的错误结论.

②在实数集成立的$|x|=x^2$. 当x为虚数时，$|x|\neq x^2$，所以复数集内解方程不能采用两边平

方法.

⑵常用的结论：

$$i^2=-1,i^{4n+1}=i,i^{4n+2}=-1,i^{4n+3}=-i,i^{4n}=1$$

$$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0,(n\in Z)$$

$$(1\pm i)^2=\pm 2i,\frac{1+i}{1-i}=i,\frac{1-i}{1+i}=-i$$

若 ω 是 1 的立方虚数根，即 $\omega=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则 $\omega^3=1,\omega^2=\overline{\omega},\omega=\frac{1}{\omega},1+\omega+\omega^2=0,\omega^n+\omega^{n+1}+\omega^{n+2}=0(n\in Z)$.

5. ⑴复数z是实数及纯虚数的充要条件：

①$z\in R\Leftrightarrow z=\overline{z}$.

②若$z\neq 0$，z是纯虚数$\Leftrightarrow z+\overline{z}=0$.

⑵模相等且方向相同的向量，不管它的起点在哪里，都认为是相等的，而相等的向量表示同一复数. 特例：零向量的方向是任意的，其模为零.

注：$|z|=|\overline{z}|$.

6. ⑴复数的三角形式：$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

辐角主值：θ适合于$0\leqslant\theta<2\pi$的值，记作$\arg z$.

注：①z为零时，$\arg z$可取$[0,2\pi)$内任意值.

②辐角是多值的，都相差2π的整数倍.

③设$a\in R^+$，则$\arg a=0,\arg(-a)=\pi,\arg ai=\frac{\pi}{2},\arg(-ai)=\frac{3}{2}\pi$.

⑵复数的代数形式与三角形式的互化：

$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\frac{a}{r},\sin\theta=\frac{b}{r}$.

⑶几类三角式的标准形式：

$$r(\cos\vartheta-i\sin\theta)=r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]$$

$$-r(\cos\theta+i\sin\theta)=r[\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)]$$

$$r(-\cos\theta+i\sin\theta)=r[\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)]$$

$$r(\sin\theta+i\cos\theta)=r[\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)]$$

7. 复数集中解一元二次方程：

在复数集内解关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 时，应注意下述问题：

①当 $a,b,c\in R$ 时，若 $\Delta>0$，则有二不等实数根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$；若 $\Delta=0$，则有二相等实数根 $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$；若 $\Delta<0$，则有二相等复数根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{|\Delta|}i}{2a}$（$x_{1,2}$ 为共轭复数）.

②当 a,b,c 不全为实数时，不能用 Δ 方程根的情况.

③不论 a,b,c 为何复数，都可用求根公式求根，并且韦达定理也成立.

8. 复数的三角形式运算：

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

棣莫弗定理：$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$

目　　录

前　　言

美国著名数学教育家波利亚说过，掌握数学就意味着要善于解题。而当我们解题时遇到一个新问题，总想用熟悉的题型去“套”，这只是满足于解出来，只有对数学思想、数学方法理解透彻及融会贯通时，才能提出新看法、巧解法。高考试题十分重视对于数学思想方法的考查，特别是突出考查能力的试题，其解答过程都蕴含着重要的数学思想方法。我们要有意识地应用数学思想方法去分析问题解决问题，形成能力，提高数学素质，使自己具有数学头脑和眼光。

高考试题主要从以下几个方面对数学思想方法进行考查：

① 常用数学方法：配方法、换元法、待定系数法、数学归纳法、参数法、消去法等；

② 数学逻辑方法：分析法、综合法、反证法、归纳法、演绎法等；

③ 数学思维方法：观察与分析、概括与抽象、分析与综合、特殊与一般、类比、归纳和演绎等；

④ 常用数学思想：函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、转化（化归）思想等。

数学思想方法与数学基础知识相比较，它有较高的地位和层次。数学知识是数学内容，可以用文字和符号来记录和描述，随着时间的推移，记忆力的减退，将来可能忘记。而数学思想方法则是一种数学意识，只能够领会和运用，属于思维的范畴，用以对数学问题的认识、处理和解决，掌握数学思想方法，不是受用一阵子，而是受用一辈子，即使数学知识忘记了，数学思想方法也还是对你起作用。

数学思想方法中，数学基本方法是数学思想的体现，是数学的行为，具有模式化与可操作性的特征，可以选用作为解题的具体手段。数学思想是数学的灵魂，它与数学基本方法常常在学习、掌握数学知识的同时获得。

可以说，“知识”是基础，“方法”是手段，“思想”是深化，提高数学素质的核心就是提高学生对数学思想方法的认识和运用，数学素质的综合体现就是“能力”。

为了帮助学生掌握解题的金钥匙，掌握解题的思想方法，本书先是介绍高考中常用的数学基本方法：配方法、换元法、待定系数法、数学归纳法、参数法、消去法、反证法、分析与综合法、特殊与一般法、类比与归纳法、观察与实验法，再介绍高考中常用的数学思想：函数与方程思想、数形结合思想、分类讨论思想、转化（化归）思想。最后谈谈解题中的有关策略和高考中的几个热点问题，并在附录部分提供了近几年的高考试卷。

在每节的内容中，先是对方法或者问题进行综合性的叙述，再以三种题组的形式出现。再现性题组是一组简单的选择填空题进行方法的再现，示范性题组进行详细的解答和分析，对方法和问题进行示范。巩固性题组旨在检查学习的效果，起到巩固的作用。每个题组中习题的选取，又尽量综合到代数、三角、几何几个部分重要章节的数学知识。

第二章　高中数学解题基本方法

一、配方法

配方法是对数学式子进行一种定向变形（配成“完全平方”）的技巧，通过配方找到已知和未知的联系，从而化繁为简。何时配方，需要我们适当预测，并且合理运用“裂项”与“添项”、“配”与“凑”的技巧，从而完成配方。有时也将其称为“凑配法”。

最常见的配方是进行恒等变形，使数学式子出现完全平方。它主要适用于：已知或者未知中含有二次方程、二次不等式、二次函数、二次代数式的讨论与求解，或者缺 xy 项的二次曲线的平移变换等问题。

配方法使用的最基本的配方依据是二项完全平方公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，将这个公式灵活运用，可得到各种基本配方形式，如：

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$；

$a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab=(a-b)^2+3ab=(a+\frac{b}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}b)^2$；

$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2]$

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=(a+b-c)^2-2(ab-bc-ca)=\cdots$

结合其它数学知识和性质，相应有另外的一些配方形式，如：

$1+\sin 2\alpha=1+2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$；

$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=(x-\frac{1}{x})^2+2$ ；…… 等等。

Ⅰ、再现性题组：

1. 在正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_1 \cdot a_5+2a_3 \cdot a_5+a_3 \cdot a_7=25$，则 $a_3+a_5=$_______。

2. 方程 $x^2+y^2-4kx-2y+5k=0$ 表示圆的充要条件是_____。

   A. $\frac{1}{4}<k<1$　　B. $k<\frac{1}{4}$或 $k>1$　　C. $k\in R$　　D. $k=\frac{1}{4}$或 $k=1$

3. 已知 $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1$，则 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值为______。

   A. 1　　B. -1　　C. 1 或-1　　D. 0

4. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-2x^2+5x+3)$的单调递增区间是_____。

   A. $(-\infty, \frac{5}{4}]$　　B. $[\frac{5}{4},+\infty)$　　C. $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$　　D. $[\frac{5}{4},3)$

5. 已知方程 $x^2+(a-2)x+a-1=0$ 的两根 x_1、x_2，则点 $P(x_1,x_2)$在圆 $x^2+y^2=4$ 上，则实数 $a=$_____。

【简解】 1 小题：利用等比数列性质 $a_{m-p}a_{m+p}=a_m^2$，将已知等式左边后配方$(a_3+a_5)^2$易求。答案是：5。

2 小题：配方成圆的标准方程形式$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$，解 $r^2>0$ 即可，选 B。

3 小题：已知等式经配方成$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$，求出 $\sin\alpha\cos\alpha$，然后求出所求式的平方值，再开方求解。选 C。

4 小题：配方后得到对称轴，结合定义域和对数函数及复合函数的单调性求解。选 D。

5 小题：答案 $3-\sqrt{11}$ 。

Ⅱ、示范性题组：

例 1. 已知长方体的全面积为 11，其 12 条棱的长度之和为 24，则这个长方体的一条对角线长为_____。

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{14}$　　C. 5　　D. 6

【分析】 先转换为数学表达式：设长方体长宽高分别为 x,y,z，则 $\begin{cases}2(xy+yz+xz)=11\\4(x+y+z)=24\end{cases}$，而欲求对角线长 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，将其配凑成两已知式的组合形式可得。

【解】设长方体长宽高分别为 x,y,z，由已知“长方体的全面积为 11，其 12 条棱的长度之和为 24”而得：$\begin{cases}2(xy+yz+xz)=11\\4(x+y+z)=24\end{cases}$。

长方体所求对角线长为：$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)}=\sqrt{6^2-11}=5$

所以选 B。

【注】本题解答关键是在于将两个已知和一个未知转换为三个数学表示式，观察和分析三个数学式，容易发现使用配方法将三个数学式进行联系，即联系了已知和未知，从而求解。这也是我们使用配方法的一种解题模式。

例 2. 设方程 $x^2+kx+2=0$ 的两实根为 p、q，若 $(\frac{p}{q})^2+(\frac{q}{p})^2\leqslant 7$ 成立，求实数 k 的取值范围。

【解】方程 $x^2+kx+2=0$ 的两实根为 p、q，由韦达定理得：$p+q=-k$，$pq=2$，

$$(\frac{p}{q})^2+(\frac{q}{p})^2=\frac{p^4+q^4}{(pq)^2}=\frac{(p^2+q^2)^2-2p^2q^2}{(pq)^2}=\frac{[(p+q)^2-2pq]^2-2p^2q^2}{(pq)^2}=\frac{(k^2-4)^2-8}{4}\leqslant 7,$$

解得 $k\leqslant-\sqrt{10}$ 或 $k\geqslant\sqrt{10}$。

又 ∵p、q 为方程 $x^2+kx+2=0$ 的两实根，∴ $\triangle=k^2-8\geqslant 0$ 即 $k\geqslant 2\sqrt{2}$ 或 $k\leqslant-2\sqrt{2}$

综合起来，k 的取值范围是：$-\sqrt{10}\leqslant k\leqslant-2\sqrt{2}$ 或者 $2\sqrt{2}\leqslant k\leqslant\sqrt{10}$。

【注】 关于实系数一元二次方程问题，总是先考虑根的判别式“Δ”；已知方程有两根时，可以恰当运用韦达定理。本题由韦达定理得到 p+q、pq 后，观察已知不等式，从其结构特征联想到先通分后配方，表示成 p+q 与 pq 的组合式。假如本题不对“△”讨论，结果将出错，即使有些题目可能结果相同，去掉对“△”的讨论，但解答是不严密、不完整的，这一点我们要尤为注意和重视。

例 3. 设非零复数 a、b 满足 $a^2+ab+b^2=0$，求 $(\frac{a}{a+b})^{1998}+(\frac{b}{a+b})^{1998}$。

【分析】 对已知式可以联想：变形为$(\frac{a}{b})^2+(\frac{a}{b})+1=0$，则$\frac{a}{b}=\omega$ （ω为1的立方虚根）；或配方为$(a+b)^2=ab$ 。则代入所求式即得。

【解】由$a^2+ab+b^2=0$变形得：$(\frac{a}{b})^2+(\frac{a}{b})+1=0$ ，

设$\omega=\frac{a}{b}$，则$\omega^2+\omega+1=0$，可知ω为1的立方虚根，所以：$\frac{1}{\omega}=\frac{b}{a}$，$\omega^3=\overline{\omega}^3=1$。

又由$a^2+ab+b^2=0$变形得：$(a+b)^2=ab$ ，

所以 $(\frac{a}{a+b})^{1998}+(\frac{b}{a+b})^{1998}=(\frac{a^2}{ab})^{999}+(\frac{b^2}{ab})^{999}=(\frac{a}{b})^{999}+(\frac{b}{a})^{999}=\omega^{999}+\overline{\omega}^{999}=2$ 。

【注】 本题通过配方，简化了所求的表达式；巧用1的立方虚根，活用ω的性质，计算表达式中的高次幂。一系列的变换过程，有较大的灵活性，要求我们善于联想和展开。

【另解】由$a^2+ab+b^2=0$变形得：$(\frac{a}{b})^2+(\frac{a}{b})+1=0$ ，解出$\frac{b}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$后，化成三角形式，代入所求表达式的变形式$(\frac{a}{b})^{999}+(\frac{b}{a})^{999}$后，完成后面的运算。此方法用于只是未$\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$联想到ω时进行解题。

假如本题没有想到以上一系列变换过程时，还可由$a^2+ab+b^2=0$解出：$a=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}b$，直接代入所求表达式，进行分式化简后，化成复数的三角形式，利用棣莫佛定理完成最后的计算。

Ⅲ、巩固性题组：

1. 函数$y=(x-a)^2+(x-b)^2$ （a、b为常数）的最小值为_____。

A. 8　　B. $\frac{(a-b)^2}{2}$　　C. $\frac{a^2+b^2}{2}$　　D.最小值不存在

2. α、β是方程$x^2-2ax+a+6=0$的两实根，则$(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$的最小值是_____。

A. $-\frac{49}{4}$　　B. 8　　C. 18　　D.不存在

3. 已知x、y∈R^+，且满足$x+3y-1=0$，则函数$t=2^x+8^y$有_____。

A.最大值$2\sqrt{2}$　　B.最大值$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C.最小值$2\sqrt{2}$　　B.最小值$\frac{\sqrt{2}}{2}$

4. 椭圆 $x^2-2ax+3y^2+a^2-6=0$ 的一个焦点在直线 $x+y+4=0$ 上，则 a=_____。

A. 2　　B. −6　　C. −2 或−6　　D. 2 或 6

5. 化简：$2\sqrt{1-\sin 8}+\sqrt{2+2\cos 8}$ 的结果是_____。

A. 2sin4　　B. 2sin4−4cos4　　C. −2sin4　　D. 4cos4−2sin4

6. 设 F_1 和 F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点，点 P 在双曲线上且满足 $\angle F_1PF_2=90°$，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是_________。

7. 若 $x>-1$，则 $f(x)=x^2+2x+\frac{1}{x+1}$ 的最小值为___________。

8. 已知 $\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3}{4}\pi$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13}$，$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，求 $\sin 2\alpha$ 的值。(92 年高考题)

9. 设二次函数 $f(x)=Ax^2+Bx+C$，给定 m、n（m<n），且满足 $A^2[(m+n)^2+m^2n^2]+2A[B(m+n)-Cmn]+B^2+C^2=0$。

① 解不等式 $f(x)>0$；

② 是否存在一个实数 t，使当 $t\in(m+t,n-t)$ 时，$f(x)<0$？若不存在，说出理由；若存在，指出 t 的取值范围。

10. 设 $s>1,t>1,m\in R,x=\log_s t+\log_t s,y=\log_s{}^4 t+\log_t{}^4 s+m(\log_s{}^2 t+\log_t{}^2 s)$，

① 将 y 表示为 x 的函数 $y=f(x)$，并求出 $f(x)$ 的定义域；

② 若关于 x 的方程 $f(x)=0$ 有且仅有一个实根，求 m 的取值范围。

二、换元法

解数学题时，把某个式子看成一个整体，用一个变量去代替它，从而使问题得到简化，这叫换元法。换元的实质是转化，关键是构造元和设元，理论依据是等量代换，目的是变换研究对象，将问题移至新对象的知识背景中去研究，从而使非标准型问题标准化、复杂问题简单化，变得容易处理。

换元法又称辅助元素法、变量代换法。通过引进新的变量，可以把分散的条件联系起来，隐含的条件显露出来，或者把条件与结论联系起来。或者变为熟悉的形式，把复杂的计算和推证简化。

它可以化高次为低次、化分式为整式、化无理式为有理式、化超越式为代数式，在研究方程、不等式、函数、数列、三角等问题中有广泛的应用。

换元的方法有：局部换元、三角换元、均值换元等。局部换元又称整体换元，是在已知或者未知中，某个代数式几次出现，而用一个字母来代替它从而简化问题，当然有时候要通过变形才能发现。例如解不等式：$4^x+2^x-2\geqslant 0$，先变形为设 $2^x=t$（$t>0$），而变为熟悉的一元二次不等式求解和指数方程的问题。

三角换元，应用于去根号，或者变换为三角形式易求时，主要利用已知代数式中与三角知识中有某点联系进行换元。如求函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ 的值域时，易发现 $x\in[0,1]$，设 $x=\sin^2\alpha$ ，$\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$，问题变成了熟悉的求三角函数值域。为什么会想到如此设，其中主要应该是发现值域的联系，又有去根号的需要。如变量 x、y 适合条件 $x^2+y^2=r^2$（$r>0$）时，则可作三角代换 $x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$ 化为三角问题。

均值换元，如遇到 $x+y=S$ 形式时，设 $x=\frac{S}{2}+t$，$y=\frac{S}{2}-t$ 等等。

我们使用换元法时，要遵循有利于运算、有利于标准化的原则，换元后要注重新变量范围的选取，一定要使新变量范围对应于原变量的取值范围，不能缩小也不能扩大。如上

几例中的 t>0 和 α $\in[0,\frac{\pi}{2}]$。

Ⅰ、再现性题组：

1. y＝sinx·cosx＋sinx+cosx 的最大值是__________。

2. 设 $f(x^2+1)=\log_a(4-x^4)$ （a>1），则 f(x)的值域是_________________。

3. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=-1$，$a_{n+1}\cdot a_n=a_{n+1}-a_n$，则数列通项 $a_n=$____________。

4. 设实数 x、y 满足 $x^2+2xy-1=0$，则 x＋y 的取值范围是____________。

5. 方程$\frac{1+3^{-x}}{1+3^x}=3$的解是_________________。

6. 不等式 $\log_2(2^x-1)\cdot\log_2(2^{x+1}-2)<2$ 的解集是_________________。

【简解】1 小题：设 sinx+cosx＝t∈$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，则 $y=\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}$，对称轴 t＝－1，

当 $t=\sqrt{2}$，$y_{max}=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$；

2 小题：设 $x^2+1=t$ (t≥1)，则 $f(t)=\log_a[-(t-1)^2+4]$，所以值域为$(-\infty,\log_a 4]$；

3 小题：已知变形为$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=-1$，设 $b_n=\frac{1}{a_n}$，则 $b_1=-1$，$b_n=-1+(n-1)(-1)$

$=-n$，所以 $a_n=-\frac{1}{n}$；

4 小题：设 x＋y＝k，则 $x^2-2kx+1=0$，$\triangle=4k^2-4\geq0$，所以 k≥1 或 k≤－1；

5 小题：设 $3^x=y$，则 $3y^2+2y-1=0$，解得 $y=\frac{1}{3}$，所以 x＝－1；

6 小题：设 $\log_2(2^x-1)=y$，则 y(y＋1)<2，解得－2<y<1，所以 $x\in(\log_2\frac{5}{4},\log_2 3)$。

Ⅱ、示范性题组：

例 1. 实数 x、y 满足 $4x^2-5xy+4y^2=5$ （①式），设 $S=x^2+y^2$，求$\frac{1}{S_{max}}+\frac{1}{S_{min}}$的值。（93 年全国高中数学联赛题）

【分析】 由 $S=x^2+y^2$ 联想到 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，于是进行三角换元，设$\begin{cases}x=\sqrt{S}\cos\alpha\\ y=\sqrt{S}\sin\alpha\end{cases}$代入①式求 S_{max} 和 S_{min} 的值。

【解】设 $\begin{cases} x=\sqrt{S}\cos\alpha \\ y=\sqrt{S}\sin\alpha \end{cases}$ 代入①式得： $4S-5S\cdot\sin\alpha\cos\alpha=5$

解得 $S=\dfrac{10}{8-5\sin 2\alpha}$ ；

∵ $-1\leqslant\sin 2\alpha\leqslant 1$ ∴ $3\leqslant 8-5\sin 2\alpha\leqslant 13$ ∴ $\dfrac{10}{13}\leqslant\dfrac{10}{8-5\sin\alpha}\leqslant\dfrac{10}{3}$

∴ $\dfrac{1}{S_{max}}+\dfrac{1}{S_{min}}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{13}{10}=\dfrac{16}{10}=\dfrac{8}{5}$

此种解法后面求 S 最大值和最小值，还可由 $\sin 2\alpha=\dfrac{8S-10}{S}$ 的有界性而求，即解不等式：$|\dfrac{8S-10}{S}|\leqslant 1$。这种方法是求函数值域时经常用到的“有界法”。

【另解】 由 $S=x^2+y^2$，设 $x^2=\dfrac{S}{2}+t$，$y^2=\dfrac{S}{2}-t$，$t\in[-\dfrac{S}{2},\ \dfrac{S}{2}]$，

则 $xy=\pm\sqrt{\dfrac{S^2}{4}-t^2}$ 代入①式得：$4S\pm 5\sqrt{\dfrac{S^2}{4}-t^2}=5$，

移项平方整理得 $100t^2+39S^2-160S+100=0$ 。

∴ $39S^2-160S+100\leqslant 0$ 解得：$\dfrac{10}{13}\leqslant S\leqslant\dfrac{10}{3}$

∴ $\dfrac{1}{S_{max}}+\dfrac{1}{S_{min}}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{13}{10}=\dfrac{16}{10}=\dfrac{8}{5}$

【注】 此题第一种解法属于“三角换元法”，主要是利用已知条件 $S=x^2+y^2$ 与三角公式 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ 的联系而联想和发现用三角换元，将代数问题转化为三角函数值域问题。第二种解法属于“均值换元法”，主要是由等式 $S=x^2+y^2$ 而按照均值换元的思路，设 $x^2=\dfrac{S}{2}+t$、$y^2=\dfrac{S}{2}-t$，减少了元的个数，问题且容易求解。另外，还用到了求值域的几种方法：有界法、不等式性质法、分离参数法。

和“均值换元法”类似，我们还有一种换元法，即在题中有两个变量 x、y 时，可以设 $x=a+b$，$y=a-b$，这称为“和差换元法”，换元后有可能简化代数式。本题设 $x=a+b$，$y=a-b$，代入①式整理得 $3a^2+13b^2=5$ ，求得 $a^2\in[0,\ \dfrac{5}{3}]$，所以 $S=(a-b)^2+(a+b)^2=2(a^2+b^2)=\dfrac{10}{13}+\dfrac{20}{13}a^2\in[\dfrac{10}{13},\ \dfrac{10}{3}]$，再求 $\dfrac{1}{S_{max}}+\dfrac{1}{S_{min}}$ 的值。

例 2. △ABC 的三个内角 A、B、C 满足：A+C=2B，$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$，求 $\cos\frac{A-C}{2}$ 的值。（96 年全国理）

【分析】 由已知“A+C=2B”和“三角形内角和等于 180°”的性质，可得 $\begin{cases}A+C=120°\\B=60°\end{cases}$；由“A+C=120°”进行均值换元，则设 $\begin{cases}A=60°+\alpha\\C=60°-\alpha\end{cases}$，再代入可求 cosα 即 $\cos\frac{A-C}{2}$。

【解】由△ABC 中已知 A+C=2B，可得 $\begin{cases}A+C=120°\\B=60°\end{cases}$，

由 A+C=120°，设 $\begin{cases}A=60°+\alpha\\C=60°-\alpha\end{cases}$，代入已知等式得：

$$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=\frac{1}{\cos(60°+\alpha)}+\frac{1}{\cos(60°-\alpha)}=\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}+$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}=-2\sqrt{2},$$

解得：$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，　　即：$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

【另解】由 A+C=2B，得 A+C=120°，B=60°。所以 $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$ $=-2\sqrt{2}$，设 $\frac{1}{\cos A}=-\sqrt{2}+m$，$\frac{1}{\cos C}=-\sqrt{2}-m$，

所以 $\cos A=\frac{1}{-\sqrt{2}+m}$，$\cos C=\frac{1}{-\sqrt{2}-m}$，两式分别相加、相减得：

$$\cos A+\cos C=2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=\cos\frac{A-C}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{m^2-2},$$

$$\cos A-\cos C=-2\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{A-C}{2}=-\sqrt{3}\sin\frac{A-C}{2}=\frac{2m}{m^2-2},$$

即：$\sin\frac{A-C}{2}=-\frac{2m}{\sqrt{3}(m^2-2)}$，$=-\frac{2\sqrt{2}}{m^2-2}$，代入$\sin^2\frac{A-C}{2}+\cos^2\frac{A-C}{2}=1$整理

得：$3m^4-16m-12=0$，解出$m^2=6$，代入$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{m^2-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

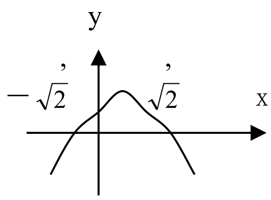
【注】 本题两种解法由“A＋C＝120°”、“$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-2\sqrt{2}$”分别进行均值换元，随后结合三角形角的关系与三角公式进行运算，除由已知想到均值换元外，还要求对三角公式的运用相当熟练。假如未想到进行均值换元，也可由三角运算直接解出：由 A＋C＝2B，得 A＋C＝120°，B＝60°。所以$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-\frac{\sqrt{2}}{\cos B}=-2\sqrt{2}$，即 $\cos A+\cos C=-2\sqrt{2}\cos A\cos C$，和积互化得：

$2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=-\sqrt{2}[\cos(A+C)+\cos(A-C)]$，即$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\cos(A-C)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}(2\cos^2\frac{A-C}{2}-1)$，整理得：$4\sqrt{2}\cos^2\frac{A-C}{2}+2\cos\frac{A-C}{2}-3\sqrt{2}=0$,

解得：$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

例 3. 设 $a>0$，求 $f(x)=2a(\sin x+\cos x)-\sin x\cdot\cos x-2a^2$ 的最大值和最小值。



【解】 设 $\sin x+\cos x=t$，则 $t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，由$(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cdot\cos x$ 得：$\sin x\cdot\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

∴ $f(x)=g(t)=-\frac{1}{2}(t-2a)^2+\frac{1}{2}$ $(a>0)$，$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

$t=-\sqrt{2}$时，取最小值：$-2a^2-2\sqrt{2}a-\frac{1}{2}$

当 $2a\geq\sqrt{2}$ 时，$t=\sqrt{2}$，取最大值：$-2a^2+2\sqrt{2}a-\frac{1}{2}$ ；

当 $0<2a\leq\sqrt{2}$ 时，$t=2a$，取最大值：$\frac{1}{2}$ 。

∴ f(x)的最小值为$-2a^2-2\sqrt{2}a-\frac{1}{2}$，最大值为$\begin{cases}\frac{1}{2}(0<a<\frac{\sqrt{2}}{2})\\ -2a^2+2\sqrt{2}a-\frac{1}{2}(a\ge\frac{\sqrt{2}}{2})\end{cases}$。

【注】 此题属于局部换元法，设 sinx+cosx=t 后，抓住 sinx+cosx 与 sinx·cosx 的内在联系，将三角函数的值域问题转化为二次函数在闭区间上的值域问题，使得容易求解。换元过程中一定要注意新的参数的范围（$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$）与 sinx+cosx 对应，否则将会出错。本题解法中还包含了含参问题时分类讨论的数学思想方法，即由对称轴与闭区间的位置关系而确定参数分两种情况进行讨论。

一般地，在遇到题目已知和未知中含有 sinx 与 cosx 的和、差、积等而求三角式的最大值和最小值的题型时，即函数为 f(sinx±cosx，sinxcsox)，经常用到这样设元的换元法，转化为在闭区间上的二次函数或一次函数的研究。

例 4. 设对所于有实数 x，不等式 $x^2\log_2\frac{4(a+1)}{a}+2x\log_2\frac{2a}{a+1}+\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}>0$ 恒成立，求 a 的取值范围。（87 年全国理）

【分析】不等式中 $\log_2\frac{4(a+1)}{a}$、 $\log_2\frac{2a}{a+1}$、$\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}$ 三项有何联系？进行对数式的有关变形后不难发现，再实施换元法。

【解】 设 $\log_2\frac{2a}{a+1}=t$，则 $\log_2\frac{4(a+1)}{a}=\log_2\frac{8(a+1)}{2a}=3+\log_2\frac{a+1}{2a}=3-\log_2\frac{2a}{a+1}=3-t$，$\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}=2\log_2\frac{a+1}{2a}=-2t$，

代入后原不等式简化为（3－t）$x^2+2tx-2t>0$，它对一切实数 x 恒成立，所以：

$\begin{cases}3-t>0\\ \Delta=4t^2+8t(3-t)<0\end{cases}$，解得$\begin{cases}t<3\\ t<0\text{或}t>6\end{cases}$ ∴ t<0 即 $\log_2\frac{2a}{a+1}<0$

$0<\frac{2a}{a+1}<1$，解得 0<a<1。

【注】应用局部换元法，起到了化繁为简、化难为易的作用。为什么会想到换元及如何设元，关键是发现已知不等式中 $\log_2\frac{4(a+1)}{a}$、 $\log_2\frac{2a}{a+1}$、$\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}$ 三项之间的联系。在解决不等式恒成立问题时，使用了“判别式法”。另外，本题还要求对数运算十分熟练。一般地，解指数与对数的不等式、方程，有可能使用局部换元法，换元时也可能要对所给的已知条件进行适当变形，发现它们的联系而实施换元，这是我们思考解法时要注意的一点。

例 5. 已知$\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{y}$，且$\frac{\cos^2\theta}{x^2}+\frac{\sin^2\theta}{y^2}=\frac{10}{3(x^2+y^2)}$ (②式)，求$\frac{x}{y}$的值。

【解】 设$\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{y}$＝k，则 sinθ＝kx，cosθ＝ky，且 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=k^2(x^2+y^2)=1$，代入②式得：$\frac{k^2y^2}{x^2}+\frac{k^2x^2}{y^2}=\frac{10}{3(x^2+y^2)}=\frac{10k^2}{3}$ 即：$\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}=\frac{10}{3}$

设$\frac{x^2}{y^2}$＝t，则 $t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}$， 解得：t＝3 或$\frac{1}{3}$ ∴$\frac{x}{y}=\pm\sqrt{3}$或$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

【另解】 由$\frac{x}{y}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$＝tgθ，将等式②两边同时除以$\frac{\cos^2\theta}{x^2}$，再表示成含 tgθ 的式子：$1+tg^4\theta=(1+tg^2\theta)\times\frac{10}{3(1+\frac{1}{tg^2\theta})}=\frac{10}{3}tg^2\theta$，设 $tg^2\theta$＝t，则 $3t^2-10t+3=0$，

∴t＝3 或$\frac{1}{3}$， 解得$\frac{x}{y}=\pm\sqrt{3}$或$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$。

【注】 第一种解法由$\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{y}$而进行等量代换，进行换元，减少了变量的个数。第二种解法将已知变形为$\frac{x}{y}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，不难发现进行结果为 tgθ，再进行换元和变形。两种解法要求代数变形比较熟练。在解高次方程时，都使用了换元法使方程次数降低。

例 6. 实数 x、y 满足$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}$＝1，若 x＋y－k>0 恒成立，求 k 的范围。

【分析】由已知条件$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}$＝1，可以发现它与 $a^2+b^2=1$ 有相似之处，于是实施三角换元。

【解】由$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}$＝1，设$\frac{x-1}{3}$＝cosθ，$\frac{y+1}{4}$＝sinθ，

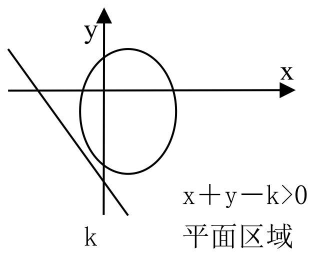
即：$\begin{cases} x=1+3\cos\theta \\ y=-1+4\sin\theta \end{cases}$ 代入不等式 x＋y－k>0 得：

$3\cos\theta+4\sin\theta-k>0$，即 $k<3\cos\theta+4\sin\theta=5\sin(\theta+\psi)$

所以 k<-5 时不等式恒成立。

【注】本题进行三角换元，将代数问题（或者是解析几何问题）化为了含参三角不等式恒成立的问题，再运用“分离参数法”转化为三角函数的值域问题，从而求出参数范围。一般地，在遇到与圆、椭圆、双曲线的方程相似的代数式时，或者在解决圆、椭圆、双曲线等有关问题时，经常使用“三角换元法”。

本题另一种解题思路是使用数形结合法的思想方法：在平面直角坐标系，不等式 ax＋by＋c>0 (a>0)所表示的区域为直线 ax＋by＋c＝0 所分平面成两部分中含 x 轴正方向的一部分。此题不等式恒成立问题化为图形问题：椭圆上的点始终位于平面上 x＋y－k>0 的区域。即当直线 x＋y－k＝0 在与椭圆下部相切的切线之下时。当直线与椭圆相切时，方程组 $\begin{cases} 16(x-1)^2+9(y+1)^2=144 \\ x+y-k=0 \end{cases}$ 有相等的一组实数解，消元后由△＝0 可求得 k＝－3，所以 k<-3 时原不等式恒成立。



Ⅲ、巩固性题组：

1. 已知 $f(x^3)=\lg x$ (x>0)，则 f(4)的值为_____。

   A. 2lg2　　B. $\frac{1}{3}\lg 2$　　C. $\frac{2}{3}\lg 2$　　D. $\frac{2}{3}\lg 4$

2. 函数 $y=(x+1)^4+2$ 的单调增区间是______。

   A. [-2,+∞)　　B. [-1,+∞)　　D. (-∞,+∞)　　C. (-∞,-1]

3. 设等差数列$\{a_n\}$的公差 $d=\frac{1}{2}$，且 $S_{100}=145$，则 $a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{99}$ 的值为_____。

   A. 85　　B. 72.5　　C. 60　　D. 52.5

4. 已知 $x^2+4y^2=4x$，则 x＋y 的范围是_________________。

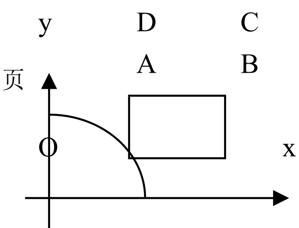
5. 已知 a≥0，b≥0，a＋b＝1，则 $\sqrt{a+\frac{1}{2}}+\sqrt{b+\frac{1}{2}}$ 的范围是____________。

6. 不等式 $\sqrt{x}>ax+\frac{3}{2}$ 的解集是(4,b)，则 a＝________，b＝_______。

7. 函数 $y=2x+\sqrt{x+1}$ 的值域是________________。

8. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2$，$a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{30}=12$，求 $a_{31}+a_{32}+\cdots+a_{60}$。

9. 实数 m 在什么范围内取值，对任意实数 x，



不等式 $\sin^2 x+2m\cos x+4m-1<0$ 恒成立。

10. 已知矩形 ABCD，顶点 C(4,4)，A 点在曲线 $x^2+y^2=2$ $(x>0,y>0)$ 上移动，且 AB、AD 始终平行 x 轴、y 轴，求矩形 ABCD 的最小面积。

三、待定系数法

要确定变量间的函数关系，设出某些未知系数，然后根据所给条件来确定这些未知系数的方法叫待定系数法，其理论依据是多项式恒等，也就是利用了多项式 $f(x)\equiv g(x)$ 的充要条件是：对于一个任意的 a 值，都有 $f(a)\equiv g(a)$；或者两个多项式各同类项的系数对应相等。

待定系数法解题的关键是依据已知，正确列出等式或方程。使用待定系数法，就是把具有某种确定形式的数学问题，通过引入一些待定的系数，转化为方程组来解决，要判断一个问题是否用待定系数法求解，主要是看所求解的数学问题是否具有某种确定的数学表达式，如果具有，就可以用待定系数法求解。例如分解因式、拆分分式、数列求和、求函数式、求复数、解析几何中求曲线方程等，这些问题都具有确定的数学表达形式，所以都可以用待定系数法求解。

使用待定系数法，它解题的基本步骤是：

第一步，确定所求问题含有待定系数的解析式；

第二步，根据恒等的条件，列出一组含待定系数的方程；

第三步，解方程组或者消去待定系数，从而使问题得到解决。

如何列出一组含待定系数的方程，主要从以下几方面着手分析：

①利用对应系数相等列方程；

②由恒等的概念用数值代入法列方程；

③利用定义本身的属性列方程；

④利用几何条件列方程。

比如在求圆锥曲线的方程时，我们可以用待定系数法求方程：首先设所求方程的形式，其中含有待定的系数；再把几何条件转化为含所求方程未知系数的方程或方程组；最后解所得的方程或方程组求出未知的系数，并把求出的系数代入已经明确的方程形式，得到所求圆锥曲线的方程。

Ⅰ、再现性题组：

1. 设 $f(x)=\dfrac{x}{2}+m$，f(x)的反函数 $f^{-1}(x)=nx-5$，那么 m、n 的值依次为_____。

A. $\frac{5}{2}$ ，-2　　B. $-\frac{5}{2}$ ，2　　C. $\frac{5}{2}$ ，2　　D. $-\frac{5}{2}$ ，-2

2. 二次不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集是 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，则 $a+b$ 的值是_____。

A. 10　　B. -10　　C. 14　　D. -14

3. 在 $(1-x^3)(1+x)^{10}$ 的展开式中，x^5 的系数是_____。

A. -297　　B. -252　　C. 297　　D. 207

4. 函数 $y=a-b\cos 3x$ $(b<0)$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$，最小值为 $-\frac{1}{2}$，则 $y=-4a\sin 3bx$ 的最小正周期是_____。

5. 与直线 L：$2x+3y+5=0$ 平行且过点 A(1,-4) 的直线 L'的方程是_______________。

6. 与双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 有共同的渐近线，且过点 (2,2) 的双曲线的方程是____________。

【简解】1 小题：由 $f(x)=\frac{x}{2}+m$ 求出 $f^{-1}(x)=2x-2m$，比较系数易求，选 C；

2 小题：由不等式解集 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，可知 $-\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$ 是方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两根，代入两根，列出关于系数 a、b 的方程组，易求得 a+b，选 D；

3 小题：分析 x^5 的系数由 C_{10}^5 与 $(-1)C_{10}^2$ 两项组成，相加后得 x^5 的系数，选 D；

4 小题：由已知最大值和最小值列出 a、b 的方程组求出 a、b 的值，再代入求得答案 $\frac{2\pi}{3}$；

5 小题：设直线 L'方程 $2x+3y+c=0$，点 A(1,-4) 代入求得 C=10，即得 $2x+3y+10=0$；

6 小题：设双曲线方程 $x^2-\frac{y^2}{4}=\lambda$，点 (2,2) 代入求得 $\lambda=3$，即得方程 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{12}=1$。

Ⅱ、示范性题组：

例 1. 已知函数 $y=\frac{mx^2+4\sqrt{3}x+n}{x^2+1}$ 的最大值为 7，最小值为 -1，求此函数式。

【分析】求函数的表达式，实际上就是确定系数 m、n 的值；已知最大值、最小值实际是就是已知函数的值域，对分子或分母为二次函数的分式函数的值域易联想到“判别式法”。

【解】 函数式变形为： $(y-m)x^2-4\sqrt{3}x+(y-n)=0$， $x\in R$， 由已知得 $y-m\neq 0$

$\therefore$ $\Delta=(-4\sqrt{3})^2-4(y-m)(y-n)\geq 0$　即：　$y^2-(m+n)y+(mn-12)\leq 0$　①

不等式①的解集为 (-1,7)，则 -1、7 是方程 $y^2-(m+n)y+(mn-12)=0$ 的两根，

代入两根得：$\begin{cases}1+(m+n)+mn-12=0\\49-7(m+n)+mn-12=0\end{cases}$　解得：$\begin{cases}m=5\\n=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=1\\n=5\end{cases}$

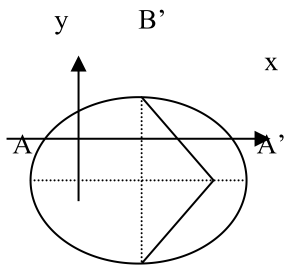
∴ y＝$\dfrac{5x^2+4\sqrt{3}x+1}{x^2+1}$或者 y＝$\dfrac{x^2+4\sqrt{3}x+5}{x^2+1}$

此题也可由解集(-1,7)而设(y＋1)(y－7)≤0,即 $y^2-6y-7\le 0$，然后与不等式①比较系数而得：$\begin{cases} m+n=6 \\ mn-12=-7 \end{cases}$，解出 m、n 而求得函数式 y。

【注】 在所求函数式中有两个系数 m、n 需要确定，首先用“判别式法”处理函数值域问题，得到了含参数 m、n 的关于 y 的一元二次不等式，且知道了它的解集，求参数 m、n。两种方法可以求解，一是视为方程两根，代入后列出 m、n 的方程求解；二是由已知解集写出不等式，比较含参数的不等式而列出 m、n 的方程组求解。本题要求对一元二次不等式的解集概念理解透彻，也要求理解求函数值域的“判别式法”：将 y 视为参数，函数式化成含参数 y 的关于 x 的一元二次方程，可知其有解，利用△≥0,建立了关于参数 y 的不等式，解出 y 的范围就是值域，使用“判别式法”的关键是否可以将函数化成一个一元二次方程。

例 2. 设椭圆中心在(2,-1)，它的一个焦点与短轴两端连线互相垂直，且此焦点与长轴较近的端点距离是 $\sqrt{10}-\sqrt{5}$，求椭圆的方程。

【分析】求椭圆方程，根据所给条件，确定几何数据 a、b、c 之值，问题就全部解决了。设 a、b、c 后，由已知垂直关系而联想到勾股定理建立一个方程，再将焦点与长轴较近端点的距离转化为 a－c 的值后列出第二个方程。



【解】 设椭圆长轴 2a、短轴 2b、焦距 2c，则|BF’|＝a

∴ $\begin{cases} a^2=b^2+c^2 \\ a^2+a^2=(2b)^2 \\ a-c=\sqrt{10}-\sqrt{5} \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} a=\sqrt{10} \\ b=\sqrt{5} \end{cases}$

∴ 所求椭圆方程是：$\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{5}=1$

也可有垂直关系推证出等腰 Rt△BB’F’后，由其性质推证出等腰 Rt△B’O’F’，再进行如下列式：$\begin{cases} b=c \\ a-c=\sqrt{10}-\sqrt{5} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$，更容易求出 a、b 的值。

【注】 圆锥曲线中，参数（a、b、c、e、p）的确定，是待定系数法的生动体现；如何确定，要抓住已知条件，将其转换成表达式。在曲线的平移中，几何数据（a、b、c、e）不变，本题就利用了这一特征，列出关于 a－c 的等式。

一般地，解析几何中求曲线方程的问题，大部分用待定系数法，基本步骤是：设方程（或几何数据）→几何条件转换成方程→求解→已知系数代入。

例 3. 是否存在常数 a、b、c，使得等式 $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)}{12}(an^2+bn+c)$对一切自然数 n 都成立？并证明你的结论。 （89 年全国高考题）

【分析】是否存在，不妨假设存在。由已知等式对一切自然数 n 都成立，取特殊值 n=1、2、3 列出关于 a、b、c 的方程组，解方程组求出 a、b、c 的值，再用数学归纳法证明等式对所有自然数 n 都成立。

【解】假设存在 a、b、c 使得等式成立，令：n=1，得 $4=\frac{1}{6}(a+b+c)$；n=2，得 $22=\frac{1}{2}(4a+2b+c)$；n=3，得 $70=9a+3b+c$。整理得：

$$\begin{cases}a+b+c=24\\4a+2b+c=44\\9a+3b+C=70\end{cases}，解得\begin{cases}a=3\\b=11\\c=10\end{cases}，$$

于是对 n=1、2、3，等式 $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)$ 成立，下面用数学归纳法证明对任意自然数 n，该等式都成立：

假设对 n=k 时等式成立，即 $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+k(k+1)^2=\frac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10)$；

当 n=k+1 时，$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+k(k+1)^2+(k+1)(k+2)^2=\frac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10)+(k+1)(k+2)^2=\frac{k(k+1)}{12}(k+2)(3k+5)+(k+1)(k+2)^2=\frac{(k+1)(k+2)}{12}(3k^2+5k+12k+24)=\frac{(k+1)(k+2)}{12}[3(k+1)^2+11(k+1)+10]$，

也就是说，等式对 n=k+1 也成立。

综上所述，当 a=8、b=11、c=10 时，题设的等式对一切自然数 n 都成立。

【注】建立关于待定系数的方程组，在于由几个特殊值代入而得到。此种解法中，也体现了方程思想和特殊值法。对于是否存在性问题待定系数时，可以按照先试值、再猜想、最后归纳证明的步骤进行。本题如果记得两个特殊数列 $1^3+2^3+\cdots+n^3$、$1^2+2^2+\cdots+n^2$ 求和的公式，也可以抓住通项的拆开，运用数列求和公式而直接求解：由 $n(n+1)^2=n^3+2n^2+n$ 得 $S_n=1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=(1^3+2^3+\cdots+n^3)+2(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10)$，

综上所述，当 a=8、b=11、c=10 时，题设的等式对一切自然数 n 都成立。

例 4. 有矩形的铁皮，其长为 30cm，宽为 14cm，要从四角上剪掉边长为 xcm 的四个小正方形，将剩余部分折成一个无盖的矩形盒子，问 x 为何值时，矩形盒子容积最大，最大容积是多少？

【分析】实际问题中，最大值、最小值的研究，先由已知条件选取合适的变量建立目标函数，将实际问题转化为函数最大值和最小值的研究。

【解】 依题意，矩形盒子底边边长为 (30－2x) cm，底边宽为 (14－2x) cm，高为 xcm。

∴ 盒子容积 $V=(30-2x)(14-2x)x=4(15-x)(7-x)x$ ，

显然:15－x>0，7－x>0，x>0。

设 V＝$\frac{4}{ab}$(15a－ax)(7b－bx)x　(a>0, b>0)

要使用均值不等式，则$\begin{cases}-a-b+1=0\\15a-ax=7b-bx=x\end{cases}$

解得：a＝$\frac{1}{4}$，　b＝$\frac{3}{4}$　，　x＝3　。

从而 V＝$\frac{64}{3}(\frac{15}{4}-\frac{x}{4})(\frac{21}{4}-\frac{3}{4}x)x\leq\frac{64}{3}\left(\frac{\frac{15}{4}+\frac{21}{4}}{3}\right)^3=\frac{64}{3}$×27＝576。

所以当 x＝3 时，矩形盒子的容积最大，最大容积是 576cm^3。

【注】均值不等式应用时要注意等号成立的条件，当条件不满足时要凑配系数，可以用“待定系数法”求。本题解答中也可以令 V＝$\frac{4}{ab}$(15a－ax)(7－x)bx 或 $\frac{4}{ab}$(15－x)(7a－ax)bx，再由使用均值不等式的最佳条件而列出方程组，求出三项该进行凑配的系数，本题也体现了“凑配法”和“函数思想”。

Ⅲ、巩固性题组：

1. 函数 y＝$\log_a$x 的 x∈[2,+∞)上恒有|y|>1，则 a 的取值范围是_____。

A. 2>a>$\frac{1}{2}$且 a≠1　　B. 0<a<$\frac{1}{2}$或 1<a<2　　C.　1<a<2　　D.　a>2 或 0<a<$\frac{1}{2}$

2. 方程 x^2＋px＋q＝0 与 x^2＋qx＋p＝0 只有一个公共根，则其余两个不同根之和为_____。

A.　1　　B.　－1　　C.　p＋q　　D.　无法确定

3. 如果函数 y＝sin2x＋a·cos2x 的图像关于直线 x＝－$\frac{\pi}{8}$对称，那么 a＝_____。

A.　$\sqrt{2}$　　B.　－$\sqrt{2}$　　C.　1　　D.　－1

4. 满足 C_n^0＋1·C_n^1＋2·C_n^2＋…＋n·C_n^n<500 的最大正整数是_____。

A.　4　　B.　5　　C.　6　　D.　7

5. 无穷等比数列{a_n}的前 n 项和为 S_n＝a－$\frac{1}{2^n}$，则所有项的和等于_____。

A.　－$\frac{1}{2}$　　B.　1　　C.　$\frac{1}{2}$　　D. 与 a 有关

6. (1＋kx)^9＝b_0＋b_1x＋b_2x^2＋…＋b_9x^9，若 b_0＋b_1＋b_2＋…＋b_9＝－1，则 k＝______。

7. 经过两直线 11x－3y－9＝0 与 12x＋y－19＝0 的交点，且过点(3,-2)的直线方程为_____________。

8. 正三棱锥底面边长为 2，侧棱和底面所成角为 60°，过底面一边作截面，使其与底面成 30°角，则截面面积为______________。

9. 设 y＝f(x)是一次函数，已知 f(8)＝15, 且 f(2)、f(5)、(f14)成等比数列，求 f(1)＋f(2)＋…＋f(m)的值。

10. 设抛物线经过两点(-1,6)和(-1,-2)，对称轴与 x 轴平行，开口向右，直线 y＝2x＋7 和抛物线截得的线段长是 $4\sqrt{10}$，求抛物线的方程。

四、定义法

所谓定义法，就是直接用数学定义解题。数学中的定理、公式、性质和法则等，都是由定义和公理推演出来。定义是揭示概念内涵的逻辑方法，它通过指出概念所反映的事物的本质属性来明确概念。

定义是千百次实践后的必然结果，它科学地反映和揭示了客观世界的事物的本质特点。简单地说，定义是基本概念对数学实体的高度抽象。用定义法解题，是最直接的方法，本讲让我们回到定义中去。

Ⅰ、再现性题组：

1. 已知集合 A 中有 2 个元素，集合 B 中有 7 个元素，A∪B 的元素个数为 n，则______。

A. 2≤n≤9　　B. 7≤n≤9　　C. 5≤n≤9　　D. 5≤n≤7

2. 设 MP、OM、AT 分别是 46° 角的正弦线、余弦线和正切线，则_____。

A. MP<OM<AT　　B. OM<MP<AT　　C. AT<<OM<MP　　D. OM<AT<MP

3. 复数 z_1＝a＋2 i，z_2＝－2＋ i，如果$|z_1|<|z_2|$，则实数 a 的取值范围是_____。

A. －1<a<1　　B. a>1　　C. a>0　　D. a<－1 或 a>1

4. 椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上有一点 P，它到左准线的距离为 $\dfrac{5}{2}$，那么 P 点到右焦点的距离为_____。

A. 8　　C. 7.5　　C. $\dfrac{75}{4}$　　D. 3

5. 奇函数 f(x)的最小正周期为 T，则 f($-\frac{T}{2}$)的值为_____。

A. T　　B. 0　　C. $\frac{T}{2}$　　D. 不能确定

6. 正三棱台的侧棱与底面成 45° 角，则其侧面与底面所成角的正切值为_____。

【简解】1 小题：利用并集定义，选 B；

2 小题：利用三角函数线定义，作出图形，选 B；

3 小题：利用复数模的定义得 $\sqrt{a^2+2^2}<\sqrt{5}$，选 A；

4 小题：利用椭圆的第二定义得到 $\frac{|PF_{左}|}{\frac{5}{2}}$ =e=$\frac{4}{5}$，选 A；

5 小题：利用周期函数、奇函数的定义得到 f($-\frac{T}{2}$)=f($\frac{T}{2}$)=−f($-\frac{T}{2}$)，选 B；

6 小题：利用线面角、面面角的定义，答案 2。

Ⅱ、示范性题组：

例 1. 已知 z=1+ i， ① 设 w=$z^2+3\bar{z}-4$，求 w 的三角形式； ② 如果 $\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1}$=1− i，求实数 a、b 的值。（94 年全国理）

【分析】代入 z 进行运算化简后，运用复数三角形式和复数相等的定义解答。

【解】由 z=1+ i，有 w=$z^2+3\bar{z}-4=(1+i)^2+3\overline{(1+i)}-4=2i+3(1-i)-4=-1-i$，w 的三角形式是 $\sqrt{2}$（cos$\frac{5\pi}{4}$ + i sin$\frac{5\pi}{4}$）；

由 z=1+ i，有 $\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=\frac{(1+i)^2+a(1+i)+b}{(1+i)^2-(1+i)+1}=\frac{(a+b)+(a+2)i}{i}$ =(a+2)−(a+b) i。

由题设条件知：(a+2)−(a+b) i =1+ i；

根据复数相等的定义，得：$\begin{cases}a+2=1\\-(a+b)=-1\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a=-1\\b=2\end{cases}$。

【注】求复数的三角形式，一般直接利用复数的三角形式定义求解。利用复数相等的定义，由实部、虚部分别相等而建立方程组，这是复数中经常遇到的。

例 2. 已知 f(x)=$-x^n$+cx，f(2)=−14，f(4)=−252，求 y=$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$f(x)的定义域，判定在($\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$,1)上的单调性。

【分析】要判断函数的单调性，必须首先确定 n 与 c 的值求出函数的解析式，再利用函数的单调性定义判断。

【解】 $\begin{cases} f(2)=-2^n+2c=-14 \\ f(4)=-4^n+4c=-252 \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} n=4 \\ c=1 \end{cases}$

∴ $f(x)=-x^4+x$ 解 $f(x)>0$ 得：$0<x<1$

设 $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}<x_1<x_2<1$， 则 $f(x_1)-f(x_2)=-x_1^4+x_1-(-x_2^4+x_2)$

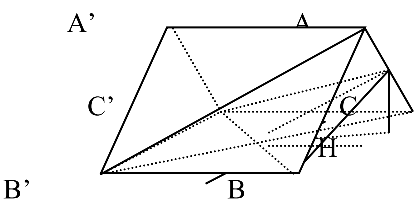
$=(x_1-x_2)[1-(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)]$,

∵ $x_1+x_2>\sqrt[3]{2}$， $x_1^2+x_2^2>\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ ∴ $(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)>\sqrt[3]{2}\times\frac{\sqrt[3]{4}}{2}=1$

∴ $f(x_1)-f(x_2)>0$ 即 $f(x)$ 在 $(\frac{\sqrt[3]{2}}{2},1)$ 上是减函数

∵ $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ ∴ $y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}f(x)$ 在 $(\frac{\sqrt[3]{2}}{2},1)$ 上是增函数。

【注】关于函数的性质：奇偶性、单调性、周期性的判断，一般都是直接应用定义解题。本题还在求 n、c 的过程中，运用了待定系数法和换元法。



例 3. 如图，已知 A’B’C’—ABC 是正三棱柱，D 是 AC 中点。

① 证明：AB’∥平面 DBC’;

② 假设 AB’⊥BC’，求二面角 D—BC’—C 的度数。(94 年全国理)

【分析】 由线面平行的定义来证①问，即通过证 AB’平行平面 DBC’内的一条直线而得；由二面角的平面角的定义作出平面角，通过解三角形而求②问。

【解】 ① 连接 B’C 交 BC’于 O, 连接 OD

∵ A’B’C’—ABC 是正三棱柱

∴ 四边形 B’BCC’是矩形

∴ O 是 B’C 中点

△AB’C 中， D 是 AC 中点 ∴ AB’∥OD

∴ AB’∥平面 DBC’

② 作 DH⊥BC 于 H，连接 OH ∴ DH⊥平面 BC’C

∵ AB’∥OD, AB’⊥BC’ ∴ BC’⊥OD

∴ BC’⊥OH 即∠DOH 为所求二面角的平面角。

设 AC＝1，作 OE⊥BC 于 E，则 DH＝$\frac{1}{2}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$，BH＝$\frac{3}{4}$，EH＝$\frac{1}{4}$ ；

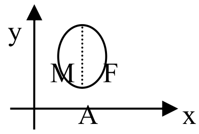
Rt△BOH 中，OH^2＝BH×EH＝$\frac{3}{16}$，

∴ OH＝$\frac{\sqrt{3}}{4}$＝DH ∴∠DOH＝45°，即二面角 D—BC'—C 的度数为 45°。

【注】对于二面角 D—BC'—C 的平面角，容易误认为∠DOC 即所求。利用二面角的平面角定义，两边垂直于棱，抓住平面角的作法，先作垂直于一面的垂线 DH，再证得垂直于棱的垂线 DO，最后连接两个垂足 OH，则∠DOH 即为所求，其依据是三垂线定理。本题还要求解三角形十分熟练，在 Rt△BOH 中运用射影定理求 OH 的长是计算的关键。

此题文科考生的第二问为：假设 AB'⊥BC'，BC＝2，求 AB'在侧面 BB'C'C 的 射影长。解答中抓住斜线在平面上的射影的定义，先作平面的垂线，连接垂足和斜足而得到射影。其解法如下：作 AE⊥BC 于 E，连接 B'E 即所求，易得到 OE∥B'B，所以$\frac{EF}{BF}=\frac{OE}{B'B}=\frac{1}{2}$，EF＝$\frac{1}{3}$B'E。在 Rt△B'BE 中，易得到 BF⊥BE，由射影定理得：B'E×EF＝BE^2 即$\frac{1}{3}B'E^2$＝1，所以 B'E＝$\sqrt{3}$。

例 4. 求过定点 M(1,2)，以 x 轴为准线，离心率为$\frac{1}{2}$的椭圆的下顶点的轨迹方程。



【分析】运动的椭圆过定点 M，准线固定为 x 轴，所以 M 到准线距离为 2。抓住圆锥曲线的统一性定义，可以得到$\frac{|AF|}{2}=\frac{1}{2}$建立一个方程，再由离心率的定义建立一个方程。

【解】设 A(x,y)、F(x,m)，由 M(1,2)，则椭圆上定点 M 到准线距离为 2，下顶点 A 到准线距离为 y。根据椭圆的统一性定义和离心率的定义，得到：

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+(m-2)^2}=\frac{1}{2}\times 2\\ \frac{m-y}{y}=\frac{1}{2}\end{cases}$$，消 m 得：$(x-1)^2+\frac{(y-\frac{4}{3})^2}{(\frac{2}{3})^2}=1$，

所以椭圆下顶点的轨迹方程为$(x-1)^2+\frac{(y-\frac{4}{3})^2}{(\frac{2}{3})^2}=1$。

【注】求曲线的轨迹方程，按照求曲线轨迹方程的步骤，设曲线上动点所满足的条件，根据条件列出动点所满足的关系式，进行化简即可得到。本题还引入了一个参数 m,列出的是所满足的方程组，消去参数 m 就得到了动点坐标所满足的方程，即所求曲线的轨迹方程。在建立方程组时，巧妙地运用了椭圆的统一性定义和离心率的定义。一般地，圆锥曲线的点、焦点、准线、离心率等问题，常用定义法解决；求圆锥曲线的方程，也总是利用圆锥曲线的定义求解，但要注意椭圆、双曲线、抛物线的两个定义的恰当选用。

Ⅲ、巩固性题组：

1. 函数 y＝f(x)＝a^x＋k 的图像过点(1,7)，它的反函数的图像过点(4,0)，则 f(x)的表达式是___。

2. 过抛物线焦点 F 的直线与抛物线相交于 A、B 两点，若 A、B 在抛物线准线上的射影分别为 A_1、B_1，则 $\angle A_1FB_1$ 等于_____。

A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°

3. 已知 A＝{0,1}，B＝{x|x⊆A}，则下列关系正确的是_____。

A. A⊆B B. A⊇B C. A∈B D. A∉B

4. 双曲线 $3x^2-y^2=3$ 的渐近线方程是_____。

A. $y=\pm 3x$ B. $y=\pm\frac{1}{3}x$ C. $y=\pm\sqrt{3}x$ D. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

5. 已知定义在 R 上的非零函数 f(x)满足 f(x+y)＝f(x)＋f(y)，则 f(x)是_____。

A.奇函数 B.偶函数 C.非奇非偶函数 D.既奇既偶函数

6. $C_{3n}^{38-n}+C_{21+n}^{3n}=$________。

7. $Z=4(\sin 140°-i\cos 140°)$，则复数 $\frac{1}{z^2}$ 的辐角主值是__________。

8. 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是(1,2)，则不等式 $bx^2+cx+a<0$ 解集是__________。

9. 已知数列$\{a_n\}$是等差数列，求证数列$\{b_n\}$也是等差数列，其中 $b_n=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$。

10. 已知 F_1、F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>b>0)的两个焦点，其中 F_2 与抛物线 $y^2=12x$ 的焦点重合，M 是两曲线的一个焦点，且有 $\cos\angle MF_1F_2\cdot\cos\angle MF_2F_1=\frac{7}{23}$，求椭圆方程。

五、数学归纳法

归纳是一种有特殊事例导出一般原理的思维方法。归纳推理分完全归纳推理与不完全归纳推理两种。不完全归纳推理只根据一类事物中的部分对象具有的共同性质，推断该类事物全体都具有的性质，这种推理方法，在数学推理论证中是不允许的。完全归纳推理是在考察了一类事物的全部对象后归纳得出结论来。

数学归纳法是用来证明某些与自然数有关的数学命题的一种推理方法，在解数学题中有着广泛的应用。它是一个递推的数学论证方法，论证的第一步是证明命题在n＝1(或n_0)时成立，这是递推的基础；第二步是假设在n＝k时命题成立，再证明n＝k＋1时命题也成立，这是无限递推下去的理论依据，它判断命题的正确性能否由特殊推广到一般，实际上它使命题的正确性突破了有限，达到无限。这两个步骤密切相关，缺一不可，完成了这两步，就可以断定“对任何自然数（或$n\geq n_0$且n∈N）结论都正确”。由这两步可以看出，数学归纳法是由递推实现归纳的，属于完全归纳。

运用数学归纳法证明问题时，关键是n＝k＋1时命题成立的推证，此步证明要具有目标意识，注意与最终要达到的解题目标进行分析比较，以此确定和调控解题的方向，使差异逐步减小，最终实现目标完成解题。

运用数学归纳法，可以证明下列问题：与自然数n有关的恒等式、代数不等式、三角不等式、数列问题、几何问题、整除性问题等等。

Ⅰ、再现性题组：

1. 用数学归纳法证明(n＋1)(n＋2)…(n＋n)＝2^n·1·2…(2n－1)　（n∈N），从“k到k＋1”，左端需乘的代数式为_____。

A. 2k＋1　　B. 2(2k＋1)　　C. $\dfrac{2k+1}{k+1}$　　D. $\dfrac{2k+3}{k+1}$

2. 用数学归纳法证明$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}<n$　(n>1)时，由n＝k (k>1)不等式成立，推证n＝k＋1时，左边应增加的代数式的个数是_____。

A. 2^{k-1}　　B. 2^k-1　　C. 2^k　　D. 2^k+1

3. 某个命题与自然数n有关，若n＝k　(k∈N)时该命题成立，那么可推得n＝k＋1时该命题也成立。现已知当n＝5时该命题不成立，那么可推得______。　　(94年上海高考)

A. 当n＝6时该命题不成立　　B. 当n＝6时该命题成立
C. 当n＝4时该命题不成立　　D. 当n＝4时该命题成立

4. 数列$\{a^n\}$中，已知$a_1=1$，当n≥2时$a_n=a_{n-1}+2n-1$，依次计算a_2、a_3、a_4后，猜想a_n的表达式是_____。

A. 3n－2　　B. n^2　　C. 3^{n-1}　　D. 4n－3

5. 用数学归纳法证明$3^{4n+2}+5^{2n+1}$　(n∈N)能被14整除，当n＝k＋1时对于式子$3^{4(k+1)+2}+5^{2(k+1)+1}$应变形为________________________。

6. 设k棱柱有f(k)个对角面，则k＋1棱柱对角面的个数为f(k+1)＝f(k)＋_________。

【简解】1小题：n＝k时，左端的代数式是(k＋1)(k＋2)…(k＋k),n＝k＋1时，左端的代数式是(k＋2)(k＋3)…(2k＋1)(2k＋2)，所以应乘的代数式为$\dfrac{(2k+1)(2k+2)}{k+1}$，选B；

2小题：（2^{k+1}－1）－（2^k－1）＝2^k，选C；

3 小题：原命题与逆否命题等价，若 n＝k＋1 时命题不成立，则 n＝k 命题不成立，选 C。

4 小题：计算出 $a_1=1$、$a_2=4$、$a_3=9$、$a_4=16$ 再猜想 a_n，选 B；

5 小题：答案（$3^{4k+2}+5^{2k+1}$）3^k+5^{2k+1}（5^2-3^4）；

6 小题：答案 k－1。

Ⅱ、示范性题组：

例 1. 已知数列 $\dfrac{8\cdot 1}{1^2\cdot 3^2}$，得，…，$\dfrac{8\cdot n}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2}$，…。$S_n$ 为其前 n 项和，求 S_1、S_2、S_3、S_4，推测 S_n 公式，并用数学归纳法证明。　（93 年全国理）

【解】 计算得 $S_1=\dfrac{8}{9}$，$S_2=\dfrac{24}{25}$，$S_3=\dfrac{48}{49}$，$S_4=\dfrac{80}{81}$，

猜测 $S_n=\dfrac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}$　(n∈N)。

当 n＝1 时，等式显然成立；

假设当 n＝k 时等式成立，即：$S_k=\dfrac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}$，

当 n＝k＋1 时，$S_{k+1}=S_k+\dfrac{8\cdot(k+1)}{(2k+1)^2\cdot(2k+3)^2}$

$$=\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}+\frac{8\cdot(k+1)}{(2k+1)^2\cdot(2k+3)^2}$$

$$=\frac{(2k+1)^2\cdot(2k+3)^2-(2k+3)^2+8\cdot(k+1)}{(2k+1)^2\cdot(2k+3)^2}$$

$$=\frac{(2k+1)^2\cdot(2k+3)^2-(2k-1)^2}{(2k+1)^2\cdot(2k+3)^2}=\frac{(2k+3)^2-1}{(2k+3)^2},$$

由此可知，当 n＝k＋1 时等式也成立。

综上所述，等式对任何 n∈N 都成立。

【注】 把要证的等式 $S_{k+1}=\dfrac{(2k+3)^2-1}{(2k+3)^2}$ 作为目标，先通分使分母含有 $(2k+3)^2$，再考虑要约分，而将分子变形，并注意约分后得到 $(2k+3)^2-1$。这样证题过程中简洁一些，有效地确定了证题的方向。本题的思路是从试验、观察出发，用不完全归纳法作出归纳猜想，再用数学归纳法进行严格证明，这是关于探索性问题的常见证法，在数列问题中经常见到。假如猜想后不用数学归纳法证明，结论不一定正确，即使正确，解答过程也不严密。必须要进行三步：试值 → 猜想 → 证明。

【另解】 用裂项相消法求和：

由 $a_n=\dfrac{8\cdot n}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2}=\dfrac{1}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ 得，

$S_n=(1-\dfrac{1}{3^2})+(\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{5^2})+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{(2n+1)^2}=1-\dfrac{1}{(2n+1)^2}$

$=\dfrac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}$。

此种解法与用试值猜想证明相比，过程十分简单，但要求发现 $\dfrac{8\cdot n}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2}=\dfrac{1}{(2n-1)^2}-\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ 的裂项公式。可以说，用试值猜想证明三步解题，具有一般性。

例 2. 设 $a_n=\sqrt{1\times 2}+\sqrt{2\times 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$ $(n\in N)$，证明：$\dfrac{1}{2}n(n+1)<a_n<\dfrac{1}{2}(n+1)^2$。

【分析】与自然数 n 有关，考虑用数学归纳法证明。n=1 时容易证得，n=k+1 时，因为 $a_{k+1}=a_k+\sqrt{(k+1)(k+2)}$，所以在假设 n=k 成立得到的不等式中同时加上 $\sqrt{(k+1)(k+2)}$，再与目标比较而进行适当的放缩求解。

【解】 当 n=1 时，$a_n=\sqrt{2}$，$\dfrac{1}{2}n(n+1)=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}(n+1)^2=2$，

∴ n=1 时不等式成立。

假设当 n=k 时不等式成立，即：$\dfrac{1}{2}k(k+1)<a_k<\dfrac{1}{2}(k+1)^2$，

当 n=k+1 时，$\dfrac{1}{2}k(k+1)+\sqrt{(k+1)(k+2)}<a_{k+1}<\dfrac{1}{2}(k+1)^2+\sqrt{(k+1)(k+2)}$，

$\dfrac{1}{2}k(k+1)+\sqrt{(k+1)(k+2)}>\dfrac{1}{2}k(k+1)+(k+1)=\dfrac{1}{2}(k+1)(k+3)>\dfrac{1}{2}(k+1)(k+2)$，

$\dfrac{1}{2}(k+1)^2+\sqrt{(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{2}(k+1)^2+\sqrt{k^2+3k+2}<\dfrac{1}{2}(k+1)^2+(k+\dfrac{3}{2})=\dfrac{1}{2}(k+2)^2$，

所以 $\dfrac{1}{2}(k+1)(k+2)<a_k<\dfrac{1}{2}(k+2)^2$，即 n=k+1 时不等式也成立。

综上所述，对所有的 $n\in N$，不等式 $\dfrac{1}{2}n(n+1)<a_n<\dfrac{1}{2}(n+1)^2$ 恒成立。

【注】 用数学归纳法解决与自然数有关的不等式问题，注意适当选用放缩法。本题中分别将$\sqrt{(k+1)(k+2)}$缩小成(k+1)、将$\sqrt{(k+1)(k+2)}$放大成(k+$\frac{3}{2}$)的两步放缩是证 n=k+1 时不等式成立的关键。为什么这样放缩，而不放大成(k+2)，这是与目标比较后的要求，也是遵循放缩要适当的原则。

本题另一种解题思路是直接采用放缩法进行证明。主要是抓住对$\sqrt{n(n+1)}$的分析，注意与目标比较后，进行适当的放大和缩小。解法如下：由$\sqrt{n(n+1)}$>n 可得，a_n>1+2+3+…+n=$\frac{1}{2}$n(n+1)；由$\sqrt{n(n+1)}$<n+$\frac{1}{2}$可得，a_n<1+2+3+…+n+$\frac{1}{2}$×n=$\frac{1}{2}$n(n+1)+$\frac{1}{2}$n=$\frac{1}{2}$(n^2+2n)<$\frac{1}{2}$$(n+1)^2$。所以$\frac{1}{2}$n(n+1)<$a_n$<$\frac{1}{2}$$(n+1)^2$。

例 3. 设数列{a_n}的前 n 项和为S_n，若对于所有的自然数 n，都有$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$，证明{a_n}是等差数列。 （94 年全国文）

【分析】 要证明{a_n}是等差数列，可以证明其通项符合等差数列的通项公式的形式，即证：$a_n=a_1+(n-1)d$ 。命题与 n 有关，考虑是否可以用数学归纳法进行证明。

【解】 设$a_2-a_1=d$，猜测$a_n=a_1+(n-1)d$

当 n=1 时，$a_n=a_1$， ∴ 当 n=1 时猜测正确。

当 n=2 时，$a_1+(2-1)d=a_1+d=a_2$， ∴当 n=2 时猜测正确。

假设当 n=k（k≥2）时，猜测正确，即：$a_k=a_1+(k-1)d$ ，

当 n=k+1 时，$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=\frac{(k+1)(a_1+a_{k+1})}{2}-\frac{k(a_1+a_k)}{2}$，

将$a_k=a_1+(k-1)d$代入上式， 得到$2a_{k+1}=(k+1)(a_1+a_{k+1})-2ka_1-k(k-1)d$，

整理得$(k-1)a_{k+1}=(k-1)a_1+k(k-1)d$，

因为 k≥2,所以$a_{k+1}=a_1+kd$，即 n=k+1 时猜测正确。

综上所述，对所有的自然数 n，都有$a_n=a_1+(n-1)d$，从而{a_n}是等差数列。

【注】 将证明等差数列的问题转化成证明数学恒等式关于自然数 n 成立的问题。在证明过程中a_{k+1}的得出是本题解答的关键，利用了已知的等式$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$、数列中通项与前 n 项和的关系$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$建立含a_{k+1}的方程，代入假设成立的式子$a_k=a_1+$(k

－1)d 解出来 a_{k+1}。另外本题注意的一点是不能忽视验证 n＝1、n＝2 的正确性，用数学归纳法证明时递推的基础是 n＝2 时等式成立，因为由(k－1)a_{k+1}＝(k－1)a_1＋k(k－1)d 得到 a_{k+1}＝a_1＋kd 的条件是 k≥2。

【另解】 可证 a_{n+1} －a_n＝ a_n－ a_{n-1}对于任意 n≥2 都成立：当 n≥2 时，a_n＝S_n－S_{n-1}＝$\frac{n(a_1+a_n)}{2}-\frac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2}$；同理有 a_{n+1}＝S_{n+1}－S_n＝$\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}-\frac{n(a_1+a_n)}{2}$；从而 a_{n+1}－a_n＝$\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}$－n($a_1$＋$a_n$)＋$\frac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2}$，整理得 a_{n+1} －a_n＝ a_n－ a_{n-1}，从而{a_n}是等差数列。

一般地，在数列问题中含有 a_n 与 S_n 时，我们可以考虑运用 a_n＝S_n－S_{n-1}的关系，并注意只对 n≥2 时关系成立，象已知数列的 S_n 求 a_n 一类型题应用此关系最多。

Ⅲ、巩固性题组：

1. 用数学归纳法证明：6^{2n-1}＋1 (n∈N)能被 7 整除。

2. 用数学归纳法证明： 1×4＋2×7＋3×10＋…＋n(3n＋1)＝n$(n+1)^2$ (n∈N)。

3. n∈N，试比较 2^n 与$(n+1)^2$的大小，并用证明你的结论。

4. 用数学归纳法证明等式：$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\cdot\sin\frac{x}{2^n}}$ (81 年全国高考)

5. 用数学归纳法证明： |sinnx|≤n|sinx| (n∈N)。 (85 年广东高考)

6. 数列{a_n}的通项公式 $a_n=\frac{1}{(n+1)^2}$ (n∈N)，设 f(n)＝(1－a_1)(1－a_2)…(1－a_n)，试求 f(1)、f(2)、f(3)的值，推测出 f(n)的值，并用数学归纳法加以证明。

7. 已知数列{a_n}满足 a_1＝1，a_n＝a_{n-1}cosx＋cos[(n－1)x]， (x≠kπ，n≥2 且 n∈N)。

①. 求 a_2和 a_3； ②. 猜测 a_n，并用数学归纳法证明你的猜测。

8. 设 f($\log_a$x)＝$\frac{a(x^2-1)}{x(a^2-1)}$ ，①. 求 f(x)的定义域； ②. 在 y＝f(x)的图像上是否存在两个不同点，使经过这两点的直线与 x 轴平行？证明你的结论。 ③. 求证：f(n)>n (n>1 且 n∈N)

六、参数法

参数法是指在解题过程中，通过适当引入一些与题目研究的数学对象发生联系的新变量（参数），以此作为媒介，再进行分析和综合，从而解决问题。直线与二次曲线的参数方程都是用参数法解题的例证。换元法也是引入参数的典型例子。

辨证唯物论肯定了事物之间的联系是无穷的，联系的方式是丰富多采的，科学的任务就是要揭示事物之间的内在联系，从而发现事物的变化规律。参数的作用就是刻画事物的变化状态，揭示变化因素之间的内在联系。参数体现了近代数学中运动与变化的思想，其观点已经渗透到中学数学的各个分支。运用参数法解题已经比较普遍。

参数法解题的关键是恰到好处地引进参数，沟通已知和未知之间的内在联系，利用参数提供的信息，顺利地解答问题。

Ⅰ、再现性题组：

1. 设$2^x=3^y=5^z>1$，则2x、3y、5z从小到大排列是________________。

2. （理）直线$\begin{cases} x=-2-\sqrt{2}t \\ y=3+\sqrt{2}t \end{cases}$上与点 A(-2,3)的距离等于$\sqrt{2}$的点的坐标是________。

（文）若 k<－1，则圆锥曲线 $x^2-ky^2=1$ 的离心率是_________。

3. 点 Z 的虚轴上移动，则复数 $C=z^2+1+2i$ 在复平面上对应的轨迹图像为____________________。

4. 三棱锥的三个侧面互相垂直，它们的面积分别是 6、4、3，则其体积为______。

5. 设函数 f(x)对任意的 x、y∈R，都有 f(x＋y)＝f(x)＋f(y)，且当 x>0 时，f(x)<0，则 f(x)的 R 上是______函数。(填“增”或“减”)

6. 椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$上的点到直线 $x+2y-\sqrt{2}=0$ 的最大距离是_____。

A. 3　　B. $\sqrt{11}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $2\sqrt{2}$

【简解】1 小题：设 $2^x=3^y=5^z=t$，分别取 2、3、5 为底的对数，解出 x、y、z，再用“比较法”比较 2x、3y、5z，得出 3y<2x<5z；

2 小题：（理）A(-2,3)为 t＝0 时，所求点为 t＝±$\sqrt{2}$时，即(-4,5)或(0,1)；（文）已知曲线为椭圆，a＝1，c＝$\sqrt{1+\frac{1}{k}}$，所以 e＝$-\frac{1}{k}\sqrt{k^2+k}$；

3 小题：设 z＝bi，则 $C=1-b^2+2i$，所以图像为：从(1,2)出发平行于 x 轴向右的射线；

4 小题：设三条侧棱 x、y、z，则$\frac{1}{2}$xy＝6、$\frac{1}{2}$yz＝4、$\frac{1}{2}$xz＝3，所以 xyz＝24，体积为 4。

5 小题：f(0)＝0，f(0)＝f(x)＋f(-x)，所以 f(x)是奇函数，答案：减；

6 小题：设 x＝4sinα、y＝2cosα，再求 d＝$\frac{|4\sin\alpha+4\cos\alpha-\sqrt{2}|}{\sqrt{5}}$的最大值，选 C。

Ⅱ、示范性题组：

例 1. 实数 a、b、c 满足 a＋b＋c＝1，求 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值。

【分析】由 a＋b＋c＝1 想到“均值换元法”，于是引入了新的参数，即设 a＝$\frac{1}{3}+t_1$，b＝$\frac{1}{3}+t_2$，c＝$\frac{1}{3}+t_3$，代入 $a^2+b^2+c^2$ 可求。

【解】由 a＋b＋c＝1，设 a＝$\frac{1}{3}+t_1$，b＝$\frac{1}{3}+t_2$，c＝$\frac{1}{3}+t_3$，其中 $t_1+t_2+t_3=0$，

∴ $a^2+b^2+c^2=(\frac{1}{3}+t_1)^2+(\frac{1}{3}+t_2)^2+(\frac{1}{3}+t_3)^2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(t_1+t_2+t_3)$ $+t_1^2+t_2^2+t_3^2=\frac{1}{3}+t_1^2+t_2^2+t_3^2\geqslant\frac{1}{3}$

所以 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值是 $\frac{1}{3}$。

【注】由“均值换元法”引入了三个参数，却将代数式的研究进行了简化，是本题此种解法的一个技巧。

本题另一种解题思路是利用均值不等式和“配方法”进行求解，解法是：$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)\geqslant 1-2(a^2+b^2+c^2)$，即 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}$。

两种解法都要求代数变形的技巧性强，多次练习，可以提高我们的代数变形能力。

例 2. 椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 上有两点 P、Q，O 为原点。连 OP、OQ，若 $k_{OP}\cdot k_{OQ}=-\frac{1}{4}$ ，

①. 求证：$|OP|^2+|OQ|^2$ 等于定值；　　②. 求线段 PQ 中点 M 的轨迹方程。

【分析】 由“换元法”引入新的参数，即设 $\begin{cases}x=4\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$ （椭圆参数方程），参数 θ_1、θ_2 为 P、Q 两点，先计算 $k_{OP}\cdot k_{OQ}$ 得出一个结论，再计算 $|OP|^2+|OQ|^2$，并运用“参数法”求中点 M 的坐标，消参而得。

【解】由 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，设 $\begin{cases}x=4\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}$，$P(4\cos\theta_1,2\sin\theta_1)$，$Q(4\cos\theta_2,2\sin\theta_2)$，

则 $k_{OP}\cdot k_{OQ}=\frac{2\sin\theta_1}{4\cos\theta_1}\bullet\frac{2\sin\theta_2}{4\cos\theta_2}=-\frac{1}{4}$，整理得到：

$\cos\theta_1\ \cos\theta_2+\sin\theta_1\ \sin\theta_2=0$，即 $\cos(\theta_1-\theta_2)=0$。

∴ $|OP|^2+|OQ|^2=16\cos^2\theta_1+4\sin^2\theta_1+16\cos^2\theta_2+4\sin^2\theta_2=8+12(\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2)=20+6(\cos2\theta_1+\cos2\theta_2)=20+12\cos(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)=20$，

即 $|OP|^2+|OQ|^2$ 等于定值 20。

由中点坐标公式得到线段 PQ 的中点 M 的坐标为 $\begin{cases}x_M=2(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\\ y_M=\sin\theta_1+\sin\theta_2\end{cases}$，

所以有 $(\frac{x}{2})^2+y^2=2+2(\cos\theta_1\ \cos\theta_2+\sin\theta_1\ \sin\theta_2)=2$，

即所求线段 PQ 的中点 M 的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1$。

【注】由椭圆方程，联想到 $a^2+b^2=1$，于是进行“三角换元”，通过换元引入新的参数，转化成为三角问题进行研究。本题还要求能够熟练使用三角公式和“平方法”，在由中点坐标公式求出 M 点的坐标后，将所得方程组稍作变形，再平方相加，即 $(\cos\theta_1+\cos\theta_2)^2+(\sin\theta_1+\sin\theta_2)^2$，这是求点 M 轨迹方程“消参法”的关键一步。一般地，求动点的轨迹方程运用“参数法”时，我们可以将点的 x、y 坐标分别表示成为一个或几个参数的函数，再运用“消去法”消去所含的参数，即得到了所求的轨迹方程。

本题的第一问，另一种思路是设直线斜率 k，解出 P、Q 两点坐标再求：

设直线 OP 的斜率 k，则 OQ 的斜率为$-\dfrac{1}{4k}$，由椭圆与直线 OP、OQ 相交于 PQ 两点有：

$\begin{cases}x^2+4y^2-16=0\\ y=kx\end{cases}$，消 y 得 $(1+4k^2)x^2=16$，即 $|x_P|=\dfrac{4}{\sqrt{1+4k^2}}$；

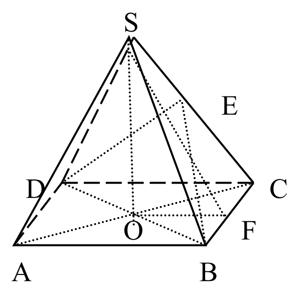
$\begin{cases}x^2+4y^2-16=0\\ y=-\dfrac{1}{4k}x\end{cases}$，消 y 得 $(1+\dfrac{1}{4k^2})x^2=16$，即 $|x_Q|=\dfrac{|8k|}{\sqrt{1+4k^2}}$；

所以 $|OP|^2+|OQ|^2=\left(\sqrt{1+k^2}\bullet\dfrac{4}{\sqrt{1+4k^2}}\right)^2+\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{16k^2}}\bullet\dfrac{|8k|}{\sqrt{1+4k^2}}\right)^2$

$=\dfrac{20+80k^2}{1+4k^2}=20$。即 $|OP|^2+|OQ|^2$ 等于定值 20。

在此解法中，利用了直线上两点之间的距离公式 $|AB|=\sqrt{1+k_{AB}{}^2}\bullet|x_A-x_B|$ 求 $|OP|$ 和 $|OQ|$ 的长。

例 3. 已知正四棱锥 S—ABCD 的侧面与底面的夹角为 β，相邻两侧面的夹角为 α，求证：$\cos\alpha=-\cos^2\beta$。



【分析】要证明 $\cos\alpha=-\cos^2\beta$，考虑求出 α、β 的余弦，则在 α 和 β 所在的三角形中利用有关定理求解。

【解】连 AC、BD 交于 O，连 SO；取 BC 中点 F，连 SF、OF；作 BE⊥SC 于 E，连 DE。则∠SFO＝β，∠DEB＝α。

设 BC＝a（为参数），则 $SF=\dfrac{OF}{\cos\beta}=\dfrac{a}{2\cos\beta}$， SC$=\sqrt{SF^2+FC^2}=\sqrt{(\frac{a}{2\cos\beta})^2+(\frac{a}{2})^2}$

$=\frac{a}{2\cos\beta}\sqrt{1+\cos^2\beta}$

又 ∵BE$=\frac{SF\cdot BC}{SC}=\frac{a^2}{2\cos\beta}\times\frac{1}{\frac{a}{2\cos\beta}\sqrt{1+\cos^2\beta}}=\frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\beta}}$

在△DEB 中，由余弦定理有：$\cos\alpha=\frac{2BE^2-BD^2}{2BE^2}=\frac{2\times\frac{a^2}{1+\cos^2\beta}-2a^2}{2\times\frac{a^2}{1+\cos^2\beta}}=-\cos^2\beta$。

所以 $\cos\alpha=-\cos^2\beta$。

【注】 设参数 a 而不求参数 a，只是利用其作为中间变量辅助计算，这也是在参数法中参数可以起的一个作用，即设参数辅助解决有关问题。

Ⅲ、巩固性题组：

1. 已知复数 z 满足 $|z|\leqslant 1$，则复数 $z+2i$ 在复平面上表示的点的轨迹是________________。
2. 函数 $y=x+2+\sqrt{1-4x-x^2}$ 的值域是__________________。
3. 抛物线 $y=x^2-10x\cos\theta+25+3\sin\theta-25\sin^2\theta$ 与 x 轴两个交点距离的最大值为______

   A. 5　　B. 10　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 3
4. 过点 M(0,1)作直线 L，使它与两已知直线 L_1：$x-3y+10=0$ 及 L_2：$2x+y-8=0$ 所截得的线段被点 P 平分，求直线 L 方程。
5. 求半径为 R 的球的内接圆锥的最大体积。
6. $f(x)=(1-\frac{a}{2}\cos^2x)\sin x$，$x\in[0,2\pi)$，求使 $f(x)\leqslant 1$ 的实数 a 的取值范围。
7. 若关于 x 的方程 $2x^2+x\lg\frac{(a^2-1)^3}{8a^3}+\lg^2(\frac{a^2-1}{2a})+\lg\frac{2a}{a^2-1}=0$ 有模为 1 的虚根，求实数 a 的值及方程的根。
8. 给定的抛物线 $y^2=2px$　(p>0)，证明：在 x 轴的正向上一定存在一点 M，使得对于抛物线的任意一条过点 M 的弦 PQ，有 $\frac{1}{|MP|^2}+\frac{1}{|MQ|^2}$ 为定值。

七、反证法

与前面所讲的方法不同，反证法是属于“间接证明法”一类，是从反面的角度思考问题的证明方法，即：肯定题设而否定结论，从而导出矛盾推理而得。法国数学家阿达玛(Hadamard)对反证法的实质作过概括：“若肯定定理的假设而否定其结论，就会导致矛盾”。具体地讲，反证法就是从否定命题的结论入手，并把对命题结论的否定作为推理的已知条件，进行正确的逻辑推理，使之得到与已知条件、已知公理、定理、法则或者已经证明为正确的命题等相矛，矛盾的原因是假设不成立，所以肯定了命题的结论，从而使命题获得了证明。

反证法所依据的是逻辑思维规律中的“矛盾律”和“排中律”。在同一思维过程中，两个互相矛盾的判断不能同时都为真，至少有一个是假的，这就是逻辑思维中的“矛盾律”；两个互相矛盾的判断不能同时都假，简单地说“A 或者非 A”，这就是逻辑思维中的“排中律”。反证法在其证明过程中，得到矛盾的判断，根据“矛盾律”，这些矛盾的判断不能同时为真，必有一假，而已知条件、已知公理、定理、法则或者已经证明为正确的命题都是真的，所以“否定的结论”必为假。再根据“排中律”，结论与“否定的结论”这一对立的互相否定的判断不能同时为假，必有一真，于是我们得到原结论必为真。所以反证法是以逻辑思维的基本规律和理论为依据的，反证法是可信的。

反证法的证题模式可以简要的概括我为“否定→推理→否定”。即从否定结论开始，经过正确无误的推理导致逻辑矛盾，达到新的否定，可以认为反证法的基本思想就是“否定之否定”。应用反证法证明的主要三步是：否定结论 → 推导出矛盾 → 结论成立。实施的具体步骤是：

第一步，反设：作出与求证结论相反的假设；

第二步，归谬：将反设作为条件，并由此通过一系列的正确推理导出矛盾；

第三步，结论：说明反设不成立，从而肯定原命题成立。

在应用反证法证题时，一定要用到“反设”进行推理，否则就不是反证法。用反证法证题时，如果欲证明的命题的方面情况只有一种，那么只要将这种情况驳倒了就可以，这种反证法又叫“归谬法”；如果结论的方面情况有多种，那么必须将所有的反面情况一一驳倒，才能推断原结论成立，这种证法又叫“穷举法”。

在数学解题中经常使用反证法，牛顿曾经说过：“反证法是数学家最精当的武器之一”。一般来讲，反证法常用来证明的题型有：命题的结论以“否定形式”、“至少”或“至多”、“唯一”、“无限”形式出现的命题；或者否定结论更明显。具体、简单的命题；或者直接

证明难以下手的命题，改变其思维方向，从结论入手进行反面思考，问题可能解决得十分干脆。

Ⅰ、再现性题组：

1. 已知函数 f(x)在其定义域内是减函数，则方程 f(x)＝0 ______。

A. 至多一个实根　　B. 至少一个实根　　C. 一个实根　　D. 无实根

2. 已知 $a<0$，$-1<b<0$，那么 a、ab、ab^2之间的大小关系是_____。

A. $a>ab>ab^2$　　B. $ab^2>ab>a$　　C. $ab>a>ab^2$　　D. $ab>ab^2>a$

3. 已知α∩β＝l，a　α，b　β，若 a、b 为异面直线，则_____。

A. a、b 都与 l 相交　　B. a、b 中至少一条与 l 相交

C. a、b 中至多有一条与 l 相交　　D. a、b 都与 l 相交

4. 四面体顶点和各棱的中点共 10 个，在其中取 4 个不共面的点，不同的取法有_____。(97 年全国理)

A. 150 种　　B. 147 种　　C. 144 种　　D. 141 种

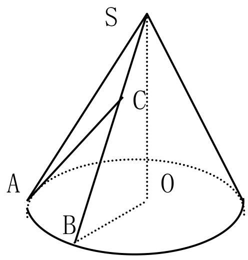
【简解】1 小题：从结论入手，假设四个选择项逐一成立，导出其中三个与特例矛盾，选 A；

2 小题：采用“特殊值法”，取 a＝－1、b＝－0.5，选 D；

3 小题：从逐一假设选择项成立着手分析，选 B；

4 小题：分析清楚结论的几种情况，列式是：$C_{10}^4-C_6^4\times4-3-6$，选 D。

Ⅱ、示范性题组：



例 1. 如图，设 SA、SB 是圆锥 SO 的两条母线，O 是底面圆心，C 是 SB 上一点。求证：AC 与平面 SOB 不垂直。

【分析】结论是“不垂直”，呈“否定性”，考虑使用反证法，即假设“垂直”后再导出矛盾后，再肯定“不垂直”。

【证明】 假设 AC⊥平面 SOB，

∵ 直线 SO 在平面 SOB 内，　　∴ AC⊥SO，

∵ SO⊥底面圆 O，　　∴ SO⊥AB，

∴ SO⊥平面 SAB，　　∴平面 SAB∥底面圆 O，

这显然出现矛盾，所以假设不成立。

即 AC 与平面 SOB 不垂直。

【注】否定性的问题常用反证法。例如证明异面直线，可以假设共面，再把假设作为已知条件推导出矛盾。

例 2. 若下列方程：$x^2+4ax-4a+3=0$，　$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$ 至少有一个方程有实根。试求实数 a 的取值范围。

【分析】 三个方程至少有一个方程有实根的反面情况仅有一种：三个方程均没有实根。先求出反面情况时 a 的范围，再所得范围的补集就是正面情况的答案。

【解】 设三个方程均无实根，则有：

$$\begin{cases}\triangle_1=16a^2-4(-4a+3)<0\\ \triangle_2=(a-1)^2-4a^2<0\\ \triangle_2=4a^2-4(-2a)<0\end{cases}$$，解得 $\begin{cases}-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}\\ a<-1\text{或}a>\frac{1}{3}\\ -2<a<0\end{cases}$，即$-\frac{3}{2}$<a<－1。

所以当 a≥－1 或 a≤$-\frac{3}{2}$时，三个方程至少有一个方程有实根。

【注】“至少”、“至多”问题经常从反面考虑，有可能使情况变得简单。本题还用到了“判别式法”、“补集法”（全集 R），也可以从正面直接求解，即分别求出三个方程有实根时（△≥0）a 的取值范围，再将三个范围并起来，即求集合的并集。两种解法，要求对不等式解集的交、并、补概念和运算理解透彻。

例 3. 给定实数 a，a≠0 且 a≠1，设函数 y＝$\frac{x-1}{ax-1}$（其中 x∈R 且 x≠$\frac{1}{a}$），证明：①. 经过这个函数图像上任意两个不同点的直线不平行于 x 轴；　②. 这个函数的图像关于直线 y＝x 成轴对称图像。(88 年全国理)。

【分析】“不平行”的否定是“平行”，假设“平行”后得出矛盾从而推翻假设。

【证明】① 设 $M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$是函数图像上任意两个不同的点，则 $x_1\neq x_2$，

假设直线 M_1M_2平行于 x 轴，则必有 $y_1=y_2$，即 $\frac{x_1-1}{ax_1-1}=\frac{x_2-1}{ax_2-1}$，整理得 $a(x_1-x_2)$

$=x_1-x_2$

∵$x_1\neq x_2$　∴ a＝1，　这与已知“a≠1”矛盾，

因此假设不对，即直线 M_1M_2不平行于 x 轴。

② 由 y＝$\frac{x-1}{ax-1}$得 axy－y＝x－1，即 (ay－1) x＝y－1，所以 x＝$\frac{y-1}{ay-1}$，

即原函数 y＝$\frac{x-1}{ax-1}$的反函数为 y＝$\frac{x-1}{ax-1}$，图像一致。

由互为反函数的两个图像关于直线 y＝x 对称可以得到，函数 y＝$\frac{x-1}{ax-1}$的图像关于直线 y＝x 成轴对称图像。

【注】对于“不平行”的否定性结论使用反证法，在假设“平行”的情况下，容易得到一些性质，经过正确无误的推理，导出与已知 a≠1 互相矛盾。第②问中，对称问题使用反函数对称性进行研究，方法比较巧妙，要求对反函数求法和性质运用熟练。

Ⅲ、巩固性题组：

1. 已知 $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$，求证：当 $x_1\neq x_2$时，$f(x_1)\neq f(x_2)$。

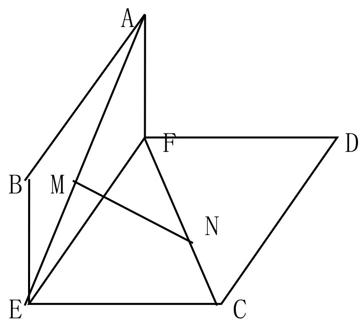
2. 已知非零实数 a、b、c 成等差数列，a≠c，求证：$\frac{1}{a}$、$\frac{1}{b}$、$\frac{1}{c}$不可能成等差数列。

3. 已知 $f(x)=x^2+px+q$，求证：$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$ 。

4. 求证：抛物线 $y=\frac{x^2}{2}-1$ 上不存在关于直线 $x+y=0$ 对称的两点。

5. 已知 a、b∈R，且$|a|+|b|<1$，求证：方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个根的绝对值均小于 1。

6. 两个互相垂直的正方形如图所示，M、N 在相应对角线上，且有 EM＝CN，求证：MN 不可能垂直 CF。



第二章 高中数学常用的数学思想

一、数形结合思想方法

中学数学的基本知识分三类：一类是纯粹数的知识，如实数、代数式、方程（组）、不等式（组）、函数等；一类是关于纯粹形的知识，如平面几何、立体几何等；一类是关于数形结合的知识，主要体现是解析几何。

数形结合是一个数学思想方法，包含“以形助数”和“以数辅形”两个方面，其应用大致可以分为两种情形：或者是借助形的生动和直观性来阐明数之间的联系，即以形作为手段，数为目的，比如应用函数的图像来直观地说明函数的性质；或者是借助于数的精确性和规范严密性来阐明形的某些属性，即以数作为手段，形作为目的，如应用曲线的方程来精确地阐明曲线的几何性质。

恩格斯曾说过：“数学是研究现实世界的量的关系与空间形式的科学。”数形结合就是根据数学问题的条件和结论之间的内在联系，既分析其代数意义，又揭示其几何直观，使数量关的精确刻划与空间形式的直观形象巧妙、和谐地结合在一起，充分利用这种结合，寻找

解题思路，使问题化难为易、化繁为简，从而得到解决。“数”与“形”是一对矛盾，宇宙间万物无不是“数”和“形”的矛盾的统一。华罗庚先生说过：数缺形时少直观，形少数时难入微，数形结合百般好，隔裂分家万事休。

数形结合的思想，其实质是将抽象的数学语言与直观的图像结合起来，关键是代数问题与图形之间的相互转化，它可以使代数问题几何化，几何问题代数化。在运用数形结合思想分析和解决问题时，要注意三点：第一要彻底明白一些概念和运算的几何意义以及曲线的代数特征，对数学题目中的条件和结论既分析其几何意义又分析其代数意义；第二是恰当设参、合理用参，建立关系，由数思形，以形想数，做好数形转化；第三是正确确定参数的取值范围。

数学中的知识，有的本身就可以看作是数形的结合。如：锐角三角函数的定义是借助于直角三角形来定义的；任意角的三角函数是借助于直角坐标系或单位圆来定义的。

Ⅰ、再现性题组：

5. 设命题甲：$0<x<5$；命题乙：$|x-2|<3$，那么甲是乙的_____。（90年全国文）

A. 充分非必要条件　B. 必要非充分条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

6. 若 $\log_a 2<\log_b 2<0$，则_____。(92年全国理)

A. $0<a<b<1$　B. $0<b<a<1$　C. $a>b>1$　D. $b>a>1$

7. 如果 $|x|\leqslant\frac{\pi}{4}$，那么函数 $f(x)=\cos^2x+\sin x$ 的最小值是_____。（89年全国文）

A. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　B. $-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$　C. -1　D. $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

8. 如果奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3,7]$ 上是增函数且最小值是5，那么 $f(x)$ 的 $[-7,-3]$ 上是____。(91年全国)

A. 增函数且最小值为-5　B. 增函数且最大值为-5

C. 减函数且最小值为-5　D. 减函数且最大值为-5

9. 设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in R\}$，集合 $M=\{(x,y)|\ \frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，那么 $\overline{M\cup N}$ 等于_____。（90年全国）

A. Φ　B. $\{(2,3)\}$　C. $(2,3)$　D. $\{(x,y)|y=x+1$

10. 如果 θ 是第二象限的角，且满足 $\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\sin\theta}$，那么 $\frac{\theta}{2}$ 是_____。

A. 第一象限角　B. 第三象限角　C. 可能第一象限角，也可能第三象限角　D. 第二象限角

11. 已知集合 $E=\{\theta\,|\cos\theta<\sin\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$，$F=\{\theta\,|\operatorname{tg}\theta<\sin\theta\}$，那么 $E\cap F$ 的区间是_____。（93年全国文理）

A. $(\frac{\pi}{2},\pi)$　B. $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$　C. $(\pi,\frac{3\pi}{2})$　D. $(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$

12. 若复数 z 的辐角为$\frac{5\pi}{6}$，实部为$-2\sqrt{3}$，则 z=_____。

A. $-2\sqrt{3}-2i$　　B. $-2\sqrt{3}+2i$　　C. $-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$　　D. $-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}i$

13. 如果实数 x、y 满足等式$(x-2)^2+y^2=3$，那么$\frac{y}{x}$的最大值是_____。 (90 年全国理)

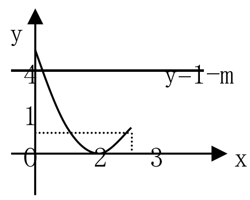
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

14. 满足方程$|z+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$的辐角主值最小的复数 z 是_____。

【简解】1 小题：将不等式解集用数轴表示，可以看出，甲=>乙，选 A;
2 小题：由已知画出对数曲线，选 B;
3 小题：设 sinx=t 后借助二次函数的图像求 f(x)的最小值，选 D;
4 小题：由奇函数图像关于原点对称画出图像，选 B;
5 小题：将几个集合的几何意义用图形表示出来，选 B;
6 小题：利用单位圆确定符号及象限；选 B;
7 小题：利用单位圆，选 A;
8 小题：将复数表示在复平面上，选 B;
9 小题：转化为圆上动点与原点连线的斜率范围问题；选 D;
10 小题：利用复平面上复数表示和两点之间的距离公式求解，答案$-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$。

【注】 以上各题是历年的高考客观题，都可以借助几何直观性来处理与数有关的问题，即借助数轴（①题）、图像（②、③、④、⑤题）、单位圆（⑥、⑦题）、复平面（⑧、⑩题）、方程曲线（⑨题）。

Ⅱ、示范性题组：



例 1. 若方程$\lg(-x^2+3x-m)=\lg(3-x)$在 $x\in(0,3)$内有唯一解，求实数 m 的取值范围。

【分析】将对数方程进行等价变形，转化为一元二次方程在某个范围内有实解的问题，再利用二次函数的图像进行解决。

【解】 原方程变形为 $\begin{cases}3-x>0\\-x^2+3x-m=3-x\end{cases}$

即：$\begin{cases}3-x>0\\(x-2)^2=1-m\end{cases}$

设曲线$y_1=(x-2)^2$，$x\in(0,3)$和直线$y_2=1-m$，图像如图所示。由图可知：

① 当 $1-m=0$ 时，有唯一解，$m=1$；

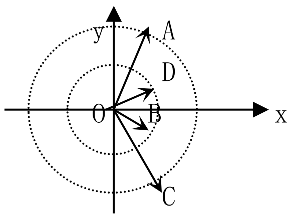
②当 $1\leqslant 1-m<4$ 时，有唯一解，即 $-3<m\leqslant 0$，

∴ $m=1$ 或 $-3<m\leqslant 0$

此题也可设曲线 $y_1=-(x-2)^2+1$，$x\in(0,3)$ 和直线 $y_2=m$ 后画出图像求解。

【注】 一般地，方程的解、不等式的解集、函数的性质等进行讨论时，可以借助于函数的图像直观解决，简单明了。此题也可用代数方法来讨论方程的解的情况，还可用分离参数法来求（也注意结合图像分析只一个 x 值）。

例 2. 设 $|z_1|=5$，$|z_2|=2$，$|z_1-\overline{z_2}|=\sqrt{13}$，求 $\dfrac{\overline{z_1}}{z_2}$ 的值。



【分析】 利用复数模、四则运算的几何意义，将复数问题用几何图形帮助求解。

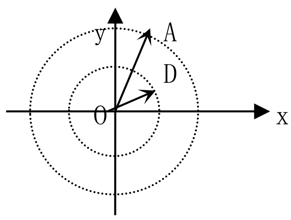
【解】 如图，设 $z_1=\overrightarrow{OA}$、$z_2=\overrightarrow{OB}$ 后，则 $\overline{z_1}=\overrightarrow{OC}$、$\overline{z_2}=\overrightarrow{OD}$ 如图所示。

由图可知，$\left|\dfrac{\overline{z_1}}{z_2}\right|=\dfrac{5}{2}$，$\angle AOD=\angle BOC$，由余弦定理得：

$$\cos\angle AOD=\frac{5^2+2^2-(\sqrt{13})^2}{2\times5\times2}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\ \frac{\overline{z_1}}{z_2}=\frac{5}{2}\left(\frac{4}{5}\pm\frac{3}{5}i\right)=2\pm\frac{3}{2}i$$

【另解】设 $z_1=\overrightarrow{OA}$、$\overline{z_2}=\overrightarrow{OD}$ 如图所示。则 $\left|\dfrac{z_1}{\overline{z_2}}\right|=\dfrac{5}{2}$，且



$\cos\angle AOD=\dfrac{5^2+2^2-(\sqrt{13})^2}{2\times5\times2}=\dfrac{4}{5}$，$\sin\angle AOD=\pm\dfrac{3}{5}$，

所以 $\dfrac{z_1}{\overline{z_2}}=\dfrac{5}{2}\left(\dfrac{4}{5}\pm\dfrac{3}{5}i\right)=2\pm\dfrac{3}{2}i$，即 $\dfrac{\overline{z_1}}{z_2}=2\pm\dfrac{3}{2}i$。

【注】本题运用“数形结合法”，把共轭复数的性质与复平面上的向量表示、代数运算的几何意义等都表达得淋漓尽致，体现了数形结合的生动活泼。 一般地，复数问题可以利用复数的几何意义而将问题变成几何问题，也可利用复数的代数形式、三角形式、复数性质求解。

本题设三角形式后转化为三角问题的求解过程是：设 $z_1=5(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=$

$+i\sin\theta_2)$，则 $|z_1-\overline{z_2}|=|(5\cos\theta_1-2\cos\theta_2)+(5\sin\theta_1+2\sin\theta_2)i|=$

$\sqrt{29-20\cos(\theta_1+\theta_2)}=\sqrt{13}$，所以 $\cos(\theta_1+\theta_2)=\frac{4}{5}$，$\sin(\theta_1+\theta_2)=\pm\frac{3}{5}$，

$\frac{\overline{z_1}}{z_2}=\frac{5[\cos(-\theta_1)+i\sin(-\theta_2)]}{2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{5}{2}[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]=\frac{5}{2}(\frac{4}{5}\pm\frac{3}{5}i)$

$=2\pm\frac{3}{2}i$。

本题还可以直接利用复数性质求解，其过程是：由 $|z_1-\overline{z_2}|=\sqrt{13}$ 得：

$(z_1-\overline{z_2})(\overline{z_1}-z_2)=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-z_1z_2-\overline{z_1}\,\overline{z_2}=25+4-z_1z_2-\overline{z_1}\,\overline{z_2}=13$,

所以 $z_1z_2+\overline{z_1}\,\overline{z_2}=16$,再同除以 $z_2\overline{z_2}$ 得 $\frac{z_1}{\overline{z_2}}+\frac{\overline{z_1}}{z_2}=4$，设 $\frac{\overline{z_1}}{z_2}=z$，解得 $z=2\pm\frac{3}{2}i$。

几种解法，各有特点，由于各人的立足点与思维方式不同，所以选择的方法也有别。一般地，复数问题可以应用于求解的几种方法是：直接运用复数的性质求解；设复数的三角形式转化为三角问题求解；设复数的代数形式转化为代数问题求解；利用复数的几何意义转化为几何问题求解。

例 3. 直线 L 的方程为：$x=-\frac{p}{2}$ $(p>0)$，椭圆中心 $D(2+\frac{p}{2},0)$，焦点在 x 轴上，长半轴为 2，短半轴为 1，它的左顶点为 A。问 p 在什么范围内取值，椭圆上有四个不同的点，它们中每一个点到点 A 的距离等于该点到直线 L 的距离？

【分析】 由抛物线定义，可将问题转化成：p 为何值时，以 A 为焦点、L 为准线的抛物线与椭圆有四个交点，再联立方程组转化成代数问题（研究方程组解的情况）。

【解】 由已知得：$a=2$，$b=1$，$A(\frac{p}{2},0)$，设椭圆与双曲线方程并联立有：

$\begin{cases} y^2=2px \\ \frac{[x-(2+\frac{p}{2})]^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，消 y 得：$x^2-(4-7p)x+(2p+\frac{p^2}{4})=0$

所以 $\triangle=16-64p+48p^2>0$, 即 $6p^2-8p+2>0$，解得：$p<\frac{1}{3}$ 或 $p>1$。

结合范围 $(\frac{p}{2},4+\frac{p}{2})$ 内两根，设 $f(x)=x^2-(4-7p)x+(2p+\frac{p^2}{4})$，

所以 $\frac{p}{2}<\frac{4-7p}{2}<4+\frac{p}{2}$ 即 $p<\frac{1}{2}$，且 $f(\frac{p}{2})>0$、$f(4+\frac{p}{2})>0$ 即 $p>-4+3\sqrt{2}$。

结合以上，所以 $-4+3\sqrt{2}<p<\frac{1}{3}$。

【注】 本题利用方程的曲线将曲线有交点的几何问题转化为方程有实解的代数问题。一般地，当给出方程的解的情况求参数的范围时可以考虑应用了“判别式法”，其中特别要注意解的范围。另外，“定义法”、“数形结合法”、“转化思想”、“方程思想”等知识都在本题进行了综合运用。

例 4. 设 a、b 是两个实数，$A=\{(x,y)|x=n, y=na+b\}$ （$n\in Z$），$B=\{(x,y)|x=m, y=3m^2+15\}$ （$m\in Z$），$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 144\}$，讨论是否，使得 $A\cap B\neq\phi$ 与 $(a,b)\in C$ 同时成立。(85 年高考)

【分析】集合 A、B 都是不连续的点集，“存在 a、b，使得 $A\cap B\neq\phi$”的含意就是“存在 a、b 使得 $na+b=3n^2+15(n\in Z)$ 有解（$A\cap B$ 时 $x=n=m$）。再抓住主参数 a、b，则此问题的几何意义是：动点 (a,b) 在直线 L：$nx+y=3n^2+15$ 上，且直线与圆 $x^2+y^2=144$ 有公共点，但原点到直线 L 的距离≥12。

【解】 由 $A\cap B\neq\phi$ 得：$na+b=3n^2+15$ ；

设动点 (a,b) 在直线 L：$nx+y=3n^2+15$ 上，且直线与圆 $x^2+y^2=144$ 有公共点，

所以圆心到直线距离 $d=\dfrac{|3n^2+15|}{\sqrt{n^2+1}}=3(\sqrt{n^2+1}+\dfrac{4}{\sqrt{n^2+1}})\geq 12$

∵ n 为整数 ∴ 上式不能取等号，故 a、b 不存在。

【注】 集合转化为点集（即曲线），而用几何方法进行研究。此题也属探索性问题用数形结合法解，其中还体现了主元思想、方程思想，并体现了对有公共点问题的恰当处理方法。

本题直接运用代数方法进行解答的思路是：

由 $A\cap B\neq\phi$ 得：$na+b=3n^2+15$,即 $b=3n^2+15-an$ （①式）；

由 $(a,b)\in C$ 得，$a^2+b^2\leq 144$ （②式）；

把①式代入②式，得关于 a 的不等式：

$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leq 0$ （③式），

它的判别式 $\triangle=4n^2(3n^2+15)^2-4(1+n^2)[(3n^2+15)^2-144]=-36(n^2-3)^2$

因为 n 是整数，所以 $n^2-3\neq 0$,因而 $\triangle<0$，又因为 $1+n^2>0$,故③式不可能有实数解。

所以不存在 a、b，使得 $A\cap B\neq\phi$ 与 $(a,b)\in C$ 同时成立

Ⅲ、巩固性题组：

1. 已知 $5x+12y=60$，则 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的最小值是_____。

A. $\frac{60}{13}$　　B. $\frac{13}{5}$　　C. $\frac{13}{12}$　　D. 1

2. 已知集合 P＝{(x, y)|y＝$\sqrt{9-x^2}$}、Q＝{(x, y)|y＝x＋b}，若 P∩Q≠φ，则 b 的取值范围是____。

A. |b|<3　　B. |b|≤$3\sqrt{2}$　　C. －3≤b≤$3\sqrt{2}$　　D. －3<b<$3\sqrt{2}$

3. 方程 2^x＝x^2＋2x＋1 的实数解的个数是_____。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D.以上都不对

4. 方程 x＝10sinx 的实根的个数是_______。

5. 若不等式m>|x－1|＋|x＋1|的解集是非空数集,那么实数m的取值范围是_________。

6. 设 z＝cosα＋$\frac{1}{2}$ i 且|z|≤1,那么 argz 的取值范围是____________。

7. 若方程 x^2－3ax＋$2a^2$＝0 的一个根小于 1，而另一根大于 1，则实数 a 的取值范围是______。

8. $\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin 20°\cdot\cos 80°$＝____________。

9. 解不等式：　$\sqrt{-x^2-2x}$>b－x

10. 设 A＝{x|<1x<3}，又设 B 是关于 x 的不等式组$\begin{cases}x^2-2x+a\leqslant 0\\ x^2-2bx+5\leqslant 0\end{cases}$的解集，试确定 a、b 的取值范围，使得 A⊆B。　（90 年高考副题）

11. 定义域内不等式$\sqrt{2-x}$〉x＋a 恒成立，求实数 a 的取值范围。

12. 已知函数 y＝$\sqrt{(x-1)^2+1}$＋$\sqrt{(x-5)^2+9}$，求函数的最小值及此时 x 的值。

13. 已知 z∈C，且|z|＝1，求|(z＋1)(z－ i)|的最大值。

14. 若方程 lg(kx)＝2lg(x＋1)只有一个实数解，求常数 k 的取值范围。

二、分类讨论思想方法

在解答某些数学问题时，有时会遇到多种情况，需要对各种情况加以分类，并逐类求解，然后综合得解，这就是分类讨论法。分类讨论是一种逻辑方法，是一种重要的数学思想，同时也是一种重要的解题策略，它体现了化整为零、积零为整的思想与归类整理的方法。有关分类讨论思想的数学问题具有明显的逻辑性、综合性、探索性，能训练人的思维条理性和概括性，所以在高考试题中占有重要的位置。

引起分类讨论的原因主要是以下几个方面：

① 问题所涉及到的数学概念是分类进行定义的。如$|a|$的定义分 $a>0$、$a=0$、$a<0$ 三种情况。这种分类讨论题型可以称为概念型。

② 问题中涉及到的数学定理、公式和运算性质、法则有范围或者条件限制，或者是分类给出的。如等比数列的前 n 项和的公式，分 $q=1$ 和 $q\neq1$ 两种情况。这种分类讨论题型可以称为性质型。

③ 解含有参数的题目时，必须根据参数的不同取值范围进行讨论。如解不等式 $ax>2$ 时分 $a>0$、$a=0$ 和 $a<0$ 三种情况讨论。这称为含参型。

另外，某些不确定的数量、不确定的图形的形状或位置、不确定的结论等，都主要通过分类讨论，保证其完整性，使之具有确定性。

进行分类讨论时，我们要遵循的原则是：分类的对象是确定的，标准是统一的，不遗漏、不重复，科学地划分，分清主次，不越级讨论。其中最重要的一条是“不漏不重”。

解答分类讨论问题时，我们的基本方法和步骤是：首先要确定讨论对象以及所讨论对象的全体的范围；其次确定分类标准，正确进行合理分类，即标准统一、不漏不重、分类互斥（没有重复）；再对所分类逐步进行讨论，分级进行，获取阶段性结果；最后进行归纳小结，综合得出结论。

Ⅰ、再现性题组：

1.集合 A＝{x||x|≤4, x∈R}，B＝{x||x－3|≤a, x∈R}，若 A⊇B，那么 a 的范围是_____。

A. 0≤a≤1　　B. a≤1　　C. a<1　　D. 0<a<1

2.若 a>0 且 a≠1，p＝$\log_a(a^3+a+1)$，q＝$\log_a(a^2+a+1)$，则 p、q 的大小关系是_____。

A. p＝q　　B. p<q　　C. p>q　　D.当 a>1 时，p>q；当 0<a<1 时，p<q

3.函数 y＝$\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{\cos x}{|\cos x|}+\frac{tgx}{|tgx|}+\frac{|ctgx|}{ctgx}$ 的值域是_________。

4.若 θ∈(0, $\frac{\pi}{2}$)，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos^n\theta-\sin^n\theta}{\cos^n\theta+\sin^n\theta}$ 的值为_____。

A. 1 或－1　　B. 0 或－1　　C. 0 或 1　　D. 0 或 1 或－1

5.函数 y＝x＋$\frac{1}{x}$ 的值域是_____。

A. $[2,+\infty)$　　B. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$　　C. $(-\infty,+\infty)$　　D. $[-2,2]$

6.正三棱柱的侧面展开图是边长分别为 2 和 4 的矩形，则它的体积为_____。

A. $\frac{8}{9}\sqrt{3}$　　B. $\frac{4}{9}\sqrt{3}$　　C. $\frac{2}{9}\sqrt{3}$　　D. $\frac{4}{9}\sqrt{3}$ 或 $\frac{8}{9}\sqrt{3}$

7.过点 P(2,3)，且在坐标轴上的截距相等的直线方程是_____。

A. 3x－2y＝0　　B. x＋y－5＝0　　C. 3x－2y＝0 或 x＋y－5＝0　　D.不能确定

【简解】1 小题：对参数 a 分 a>0、a＝0、a<0 三种情况讨论，选 B；

2 小题：对底数 a 分 a>1、0<a<1 两种情况讨论，选 C；

3 小题：分 x 在第一、二、三、四象限等四种情况，答案{4,-2,0}；

4 小题：分 θ＝$\frac{\pi}{4}$、0<θ<$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{4}$<θ<$\frac{\pi}{2}$ 三种情况，选 D；

5 小题：分 x>0、x<0 两种情况，选 B；

6 小题：分侧面矩形长、宽分别为 2 和 4、或 4 和 2 两种情况，选 D；

7 小题：分截距等于零、不等于零两种情况，选 C。

Ⅱ、示范性题组：

例 1. 设 0<x<1，a>0 且 a≠1，比较 $|\log_a(1-x)|$ 与 $|\log_a(1+x)|$ 的大小。

【分析】 比较对数大小，运用对数函数的单调性，而单调性与底数 a 有关，所以对底数 a 分两类情况进行讨论。

【解】 ∵ 0<x<1　　∴ 0<1－x<1，　1＋x>1

① 当 0<a<1 时，$\log_a(1-x)>0$，$\log_a(1+x)<0$，所以

$$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\log_a(1-x)-[-\log_a(1+x)]=\log_a(1-x^2)>0;$$

② 当 $a>1$ 时，$\log_a(1-x)<0$，$\log_a(1+x)>0$，所以

$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)=-\log_a(1-x^2)>0$；

由①、②可知，$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$。

【注】本题要求对对数函数 $y=\log_a x$ 的单调性的两种情况十分熟悉，即当 $a>1$ 时其是增函数，当 $0<a<1$ 时其是减函数。去绝对值时要判别符号，用到了函数的单调性；最后差值的符号判断，也用到函数的单调性。

例 2. 已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素，$A\cap B$ 含有 4 个元素，试求同时满足下面两个条件的集合 C 的个数： ①. $C\subset A\cup B$ 且 C 中含有 3 个元素； ②. $C\cap A\neq\Phi$ 。

【分析】 由已知并结合集合的概念，C 中的元素分两类：①属于 A 元素；②不属于 A 而属于 B 的元素。并由含 A 中元素的个数 1、2、3，而将取法分三种。

【解】 $C_{12}^1\cdot C_8^2+C_{12}^2\cdot C_8^1+C_{12}^3\cdot C_8^0=1084$

【注】本题是排列组合中“包含与排除”的基本问题，正确地解题的前提是合理科学的分类，达到分类完整及每类互斥的要求，还有一个关键是要确定 C 中元素如何取法。另一种解题思路是直接使用“排除法”，即 $C_{20}^3-C_8^3=1084$。

例 3. 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列，S_n 是前 n 项和。 ①. 证明：$\dfrac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$； ②. 是否存在常数 $c>0$，使得 $\dfrac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$ 成立？并证明结论。(95 年全国理)

【分析】 要证的不等式和讨论的等式可以进行等价变形；再应用比较法而求解。其中在应用等比数列前 n 项和的公式时，由于公式的要求，分 $q=1$ 和 $q\neq1$ 两种情况。

【解】 设 $\{a_n\}$ 的公比 q，则 $a_1>0$，$q>0$

①. 当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$，从而 $S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=na_1(n+2)a_1-(n+1)^2a_1^2=-a_1^2<0$；

当 $q\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，从而

$$S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2=\frac{a_1^2(1-q^n)(1-q^{n+2})}{(1-q)^2}-\frac{a_1^2(1-q^{n+1})^2}{(1-q)^2}=-a_1^2q^n<0;$$

由上可得 $S_nS_{n+2}<S_{n+1}^{\ 2}$，所以 $\lg(S_nS_{n+2})<\lg(S_{n+1}^{\ 2})$，即 $\dfrac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$。

②. 要使 $\dfrac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$ 成立，则必有 $(S_n-c)(S_{n+2}-c)=(S_{n+1}-c)^2$，

分两种情况讨论如下：

当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$，则

$(S_n-c)(S_{n+2}-c)-(S_{n+1}-c)^2=(na_1-c)[(n+2)a_1-c]-[(n+1)a_1-c]^2=-a_1^{\ 2}<0$

当 $q\neq1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，则 $(S_n-c)(S_{n+2}-c)-(S_{n+1}-c)^2=[\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}-c][\dfrac{a_1(1-q^{n+2})}{1-q}-c]-[\dfrac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}-c]^2=-a_1q^n[a_1-c(1-q)]$

$\because\ a_1q^n\neq0\qquad\therefore\ a_1-c(1-q)=0$ 即 $c=\dfrac{a_1}{1-q}$

而 $S_n-c=S_n-\dfrac{a_1}{1-q}=-\dfrac{a_1q^n}{1-q}<0\qquad\therefore$对数式无意义

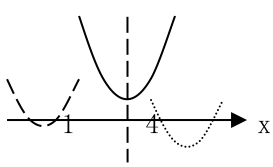
由上综述，不存在常数 $c>0$，使得 $\dfrac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$ 成立。

【注】 本例由所用公式的适用范围而导致分类讨论。该题文科考生改问题为：证明 $\dfrac{\log_{0.5}S_n+\log_{0.5}S_{n+2}}{2}>\log_{0.5}S_{n+1}$，和理科第一问类似，只是所利用的是底数是 0.5 时，对数函数为单调递减。

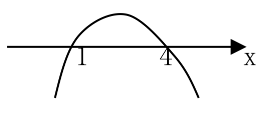
例 1、例 2、例 3 属于涉及到数学概念、定理、公式、运算性质、法则等是分类讨论的问题或者分类给出的，我们解决时按要求进行分类，即题型为概念、性质型。

例 4. 设函数 $f(x)=ax^2-2x+2$，对于满足 $1<x<4$ 的一切 x 值都有 $f(x)>0$，求实数 a 的取值范围。

【分析】 含参数的一元二次函数在有界区间上的最大值、最小值等值域问题，需要先对开口方向讨论，再对其抛物线对称轴的位置与闭区间的关系进行分类讨论，最后综合得解。



【解】当 $a>0$ 时，$f(x)=a(x-\dfrac{1}{a})^2+2-\dfrac{1}{a}$



∴ $\begin{cases}\dfrac{1}{a}\leqslant 1\\ f(1)=a-2+2\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1<\dfrac{1}{a}<4\\ f(\dfrac{1}{a})=2-\dfrac{1}{a}>0\end{cases}$

或 $\begin{cases}\dfrac{1}{a}\geqslant 4\\ f(4)=16a-8+2\geqslant 0\end{cases}$

∴ a≥1 或 $\frac{1}{2}$<a<1 或 φ　　　　即 a>$\frac{1}{2}$；

当 a<0 时，$\begin{cases}f(1)=a-2+2\geqslant 0\\ f(4)=16a-8+2\geqslant 0\end{cases}$，解得 φ；

当 a＝0 时，f(x)＝－2x＋2，f(1)＝0，f(4)＝－6，　∴不合题意

由上而得，实数 a 的取值范围是 a>$\frac{1}{2}$　。

【注】本题分两级讨论，先对决定开口方向的二次项系数 a 分 a>0、a<0、a＝0 三种情况，再每种情况结合二次函数的图像，在 a>0 时将对称轴与闭区间的关系分三种，即在闭区间左边、右边、中间。本题的解答，关键是分析符合条件的二次函数的图像，也可以看成是“数形结合法”的运用。

例 5. 解不等式$\dfrac{(x+4a)(x-6a)}{2a+1}$>0　(a 为常数，a≠－$\frac{1}{2}$)

【分析】 含参数的不等式，参数 a 决定了 2a＋1 的符号和两根－4a、6a 的大小，故对参数 a 分四种情况 a>0、a＝0、－$\frac{1}{2}$<a<0、a<－$\frac{1}{2}$ 分别加以讨论。

【解】 2a＋1>0 时，a>－$\frac{1}{2}$；　　－4a<6a 时，a>0 。　所以分以下四种情况讨论：

当 a>0 时，(x＋4a)(x－6a)>0，解得：x<－4a 或 x>6a；

当 a＝0 时，x^2>0，解得：x≠0；

当－$\frac{1}{2}$<a<0 时，(x＋4a)(x－6a)>0，解得：x<6a 或 x>－4a；

当 a>－$\frac{1}{2}$时，(x＋4a)(x－6a)<0，解得： 6a<x<－4a 。

综上所述，当 a>0 时，x<－4a 或 x>6a；当 a＝0 时，x≠0；当－$\frac{1}{2}$<a<0 时，x<6a 或 x>－4a；当 a>－$\frac{1}{2}$时，6a<x<－4a 。

【注】 本题的关键是确定对参数 a 分四种情况进行讨论，做到不重不漏。一般地，遇到题目中含有参数的问题，常常结合参数的意义及对结果的影响而进行分类讨论，此种题型为含参型。

例 6. 设 a≥0, 在复数集 C 中，解方程：$z^2+2|z|=a$ 。　(90 年全国高考)

【分析】由已知$z^2+2|z|=a$和$|z|\in R$可以得到$z^2\in R$，即对z分实数、纯虚数两种情况进行讨论求解。

【解】 ∵ $|z|\in R$，由$z^2+2|z|=a$得：$z^2\in R$；　　∴ z为实数或纯虚数

当$z\in R$时，$|z|^2+2|z|=a$，解得：$|z|=-1+\sqrt{1+a}$　　∴ $z=\pm(-1+\sqrt{1+a})$；

当z为纯虚数时，设$z=\pm y\,i$　$(y>0)$，　∴ $-y^2+2y=a$　解得：$y=1\pm\sqrt{1-a}$　$(0\leqslant a\leqslant 1)$

由上可得，$z=\pm(-1+\sqrt{1+a})$或$\pm(1\pm\sqrt{1-a})\,i$

【注】本题用标准解法（设$z=x+y\,i$再代入原式得到一个方程组，再解方程组）过程十分繁难，而挖掘隐含，对z分两类讨论则简化了数学问题。

【另解】 设$z=x+y\,i$，代入得 $x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}+2xy\,i=a$；

$$\therefore \begin{cases} x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}=a \\ 2xy=0 \end{cases}$$

当$y=0$时，$x^2+2|x|=a$，解得$x=\pm(-1+\sqrt{1+a})$，所以$z=\pm(-1+\sqrt{1+a})$；

当$x=0$时，$-y^2+2|y|=a$，解得$y=\pm(1\pm\sqrt{1-a})$，所以$\pm(1\pm\sqrt{1-a})\,i$。

由上可得，$z=\pm(-1+\sqrt{1+a})$或$\pm(1\pm\sqrt{1-a})\,i$

【注】此题属于复数问题的标准解法，即设代数形式求解。其中抓住$2xy=0$而分$x=0$和$y=0$两种情况进行讨论求解。实际上，每种情况中绝对值方程的求解，也渗透了分类讨论思想。

例7. 在xoy平面上给定曲线$y^2=2x$，设点$A(a,0)$，$a\in R$，曲线上的点到点A的距离的最小值为$f(a)$，求$f(a)$的函数表达式。　　（本题难度0.40）

【分析】 求两点间距离的最小值问题，先用公式建立目标函数，转化为二次函数在约束条件$x\geqslant 0$下的最小值问题，而引起对参数a的取值讨论。

【解】 设$M(x,y)$为曲线$y^2=2x$上任意一点，则

$|MA|^2=(x-a)^2+y^2=(x-a)^2+2x=x^2-2(a-1)x+a^2=[x-(a-1)]^2+(2a-1)$

由于$y^2=2x$限定$x\geqslant 0$，所以分以下情况讨论：

当$a-1\geqslant 0$时，$x=a-1$取最小值，即$|MA\}^2_{min}=2a-1$；

当$a-1<0$时，$x=0$取最小值，即$|MA\}^2_{min}=a^2$；

综上所述，有 f(a)＝$\begin{cases}\sqrt{2a-1} & (a\geqslant 1\text{时})\\ |a| & (a<1\text{时})\end{cases}$ 。

【注】本题解题的基本思路是先建立目标函数。求二次函数的最大值和最小值问题我们十分熟悉，但含参数 a，以及还有隐含条件 x≥0 的限制，所以要从中找出正确的分类标准，从而得到 d＝f(a)的函数表达式。

Ⅲ、巩固性题组：

1. 若 $\log_a \frac{2}{3}<1$，则 a 的取值范围是_____。

A. (0, $\frac{2}{3}$)　　B. ($\frac{2}{3}$, 1)　　C. (0, $\frac{2}{3}$)∪(1, +∞)　　D. ($\frac{2}{3}$, +∞)

2. 非零实数 a、b、c，则 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 的值组成的集合是_____。

A. {-4, 4}　　B. {0, 4}　　C. {-4, 0}　　D. {-4, 0, 4}

3. f(x)＝(a－x)|3a－x|，a 是正常数，下列结论正确的是_____。

A. 当 x＝2a 时有最小值 0　　B. 当 x＝3a 时有最大值 0

C. 无最大值，且无最小值　　D. 有最小值但无最大值

4. 设 $f_1(x,y)=0$ 是椭圆方程，$f_2(x,y)=0$ 是直线方程，则方程 $f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0$ （λ∈R）表示的曲线是_____。

A. 只能是椭圆　　B. 椭圆或直线　　C. 椭圆或一点　　D. 还有上述外的其它情况

5. 函数 $f(x)=ax^2-2ax+2+b$ (a≠0)在闭区间[2, 3]上有最大值 5，最小值 2，则 a、b 的值为_____。

A. a＝1, b＝0　　B. a＝1，b＝0 或 a＝－1, b＝3

C. a＝－1，b＝3　　D. 以上答案均不正确

6. 方程 $(x^2-x-1)^{x+2}=1$ 的整数解的个数是_____。

A. 1　　B. 3　　C. 4　　D. 5

7. 到空间不共面的 4 个点距离相等的平面的个数是_____。

A. 7　　B. 6　　C. 5　　D. 4

8. z∈C，方程 $z^2-3|z|+2=0$ 的解的个数是_____。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

9. 复数 z＝a＋a i (a≠0)的辐角主值是______________。

10. 解关于 x 的不等式：　$2\log_{a^2}(2x-1)>\log_a(x^2-a)$　　(a>0 且 a≠1)

11. 设首项为 1，公比为 q (q>0)的等比数列的前 n 项和为 S_n，又设 $T_n=\frac{S_n}{S_{n+1}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ 。

12. 若复数 z、z^2、z^3 在复平面上所对应三点 A、B、C 组成直角三角形，且|z|＝2，求 z 。

13. 有卡片 9 张，将 0、1、2、…、8 这 9 个数字分别写在每张卡片上。现从中任取 3 张排成三位数，若 6 可以当作 9 用，问可组成多少个不同的三位数。

14. 函数 $f(x)=(|m|-1)x^2-2(m+1)x-1$ 的图像与 x 轴只有一个公共点，求参数 m 的值及交点坐标。

三、函数与方程的思想方法

函数思想，是指用函数的概念和性质去分析问题、转化问题和解决问题。方程思想，是从问题的数量关系入手，运用数学语言将问题中的条件转化为数学模型（方程、不等式、或方程与不等式的混合组），然后通过解方程（组）或不等式（组）来使问题获解。有时，还实现函数与方程的互相转化、接轨，达到解决问题的目的。

笛卡尔的方程思想是：实际问题→数学问题→代数问题→方程问题。宇宙世界，充斥着等式和不等式。我们知道，哪里有等式，哪里就有方程；哪里有公式，哪里就有方程；求值问题是通过解方程来实现的……等等；不等式问题也与方程是近亲，密切相关。而函数和多元方程没有什么本质的区别，如函数 $y=f(x)$，就可以看作关于 x、y 的二元方程 $f(x)-y=0$。可以说，函数的研究离不开方程。列方程、解方程和研究方程的特性，都是应用方程思想时需要重点考虑的。

函数描述了自然界中数量之间的关系，函数思想通过提出问题的数学特征，建立函数关系型的数学模型，从而进行研究。它体现了“联系和变化”的辩证唯物主义观点。一般地，函数思想是构造函数从而利用函数的性质解题，经常利用的性质是：$f(x)$、$f^{-1}(x)$的单调性、奇偶性、周期性、最大值和最小值、图像变换等，要求我们熟练掌握的是一次函数、二次函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数的具体特性。在解题中，善于挖掘题目中的隐含条件，构造出函数解析式和妙用函数的性质，是应用函数思想的关键。对所给的问题观察、分析、判断比较深入、充分、全面时，才能产生由此及彼的联系，构造出函数原型。另外，

方程问题、不等式问题和某些代数问题也可以转化为与其相关的函数问题，即用函数思想解答非函数问题。

函数知识涉及的知识点多、面广，在概念性、应用性、理解性都有一定的要求，所以是高考中考查的重点。我们应用函数思想的几种常见题型是：遇到变量，构造函数关系解题；有关的不等式、方程、最小值和最大值之类的问题，利用函数观点加以分析；含有多个变量的数学问题中，选定合适的主变量，从而揭示其中的函数关系；实际应用问题，翻译成数学语言，建立数学模型和函数关系式，应用函数性质或不等式等知识解答；等差、等比数列中，通项公式、前 n 项和的公式，都可以看成 n 的函数，数列问题也可以用函数方法解决。

Ⅰ、再现性题组：

1. 方程 lgx＋x＝3 的解所在的区间为_____。

A. (0,1)　　B. (1,2)　　C. (2,3)　　D. (3,+∞)

2. 如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对于任意实数 t，都有 f(2+t)＝f(2－t)，那么_____。

A. f(2)<f(1)<f(4)　　B. f(1)<f(2)<f(4)　　C. f(2)<f(4)<f(1)　　D. f(4)<f(2)<f(1)

3. 已知函数 y＝f(x)有反函数，则方程 f(x)＝a　(a 是常数)　______。

A. 有且仅有一个实根　B. 至多一个实根　C. 至少一个实根　D. 不同于以上结论

4. 已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，$\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则 tgθ 的值是_____。

A. $-\frac{4}{3}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

5. 已知等差数列的前 n 项和为 S_n，且 $S^b=S_q$　(p≠q，p、q∈N)，则 S_{p+q}＝_________。

6. 关于 x 的方程 $\sin^2x+\cos x+a=0$ 有实根，则实数 a 的取值范围是__________。

7. 正六棱锥的体积为 48，侧面与底面所成的角为 45°，则此棱锥的侧面积为___________。

8. 建造一个容积为 $8m^3$，深为 2m 的长方体无盖水池，如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元，则水池的最低造价为___________。

【简解】1 小题：图像法解方程，也可代入各区间的一个数（特值法或代入法），选 C；

2 小题：函数 f(x)的对称轴为 2，结合其单调性，选 A；

3 小题：从反面考虑，注意应用特例，选 B；

4 小题：设 $tg\frac{\theta}{2}=x$ (x>0)，则 $\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{1}{5}$，解出 x＝2，再用万能公式，选 A；

5 小题：利用 $\frac{S_n}{n}$ 是关于 n 的一次函数，设 $S_p=S_q=m$，$\frac{S_{p+q}}{p+q}=x$，则 $(\frac{m}{p},p)$、$(\frac{m}{q},q)$、(x，p+q)在同一直线上，由两点斜率相等解得 x＝0，则答案：0；

6 小题：设 cosx＝t，t∈[-1,1]，则 $a=t^2-t-1\in[-\frac{5}{4},1]$，所以答案：$[-\frac{5}{4},1]$；

7 小题：设高 h，由体积解出 h＝$2\sqrt{3}$，答案：$24\sqrt{6}$；

8 小题：设长 x，则宽$\frac{4}{x}$，造价 y＝4×120＋4x×80＋$\frac{16}{x}$×80≥1760，答案：1760。

Ⅱ、示范性题组：

例 1. 设 a>0，a≠1，试求方程 $\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$有实数解的 k 的范围。(89 年全国高考)

【分析】由换底公式进行换底后出现同底，再进行等价转化为方程组，分离参数后分析式子特点，从而选用三角换元法，用三角函数的值域求解。

【解】将原方程化为：$\log_a(x-ak)=\log_a\sqrt{x^2-a^2}$， 等价于 $\begin{cases} x-ak>0 \\ x-ak=\sqrt{x^2-a^2} \end{cases}$

（a>0, a≠1）

∴ $k=\frac{x}{a}-\sqrt{(\frac{x}{a})^2-1}$ （ $|\frac{x}{a}|>1$ ），

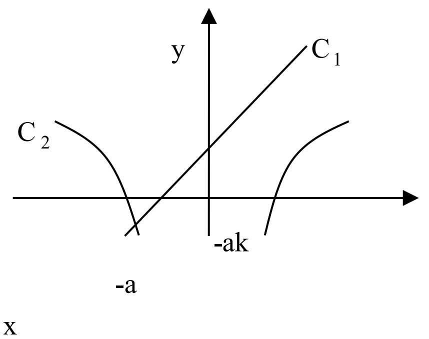
设$\frac{x}{a}=\csc\theta$， $\theta\in(-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2})$，则 $k=f(\theta)=\csc\theta-|\mathrm{ctg}\,\theta|$

当 $\theta\in(-\frac{\pi}{2},0)$时，$f(\theta)=\csc\theta+\mathrm{ctg}\,\theta=\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}<-1$，故 k<－1；

当 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$时，$f(\theta)=\csc\theta-\mathrm{ctg}\,\theta=\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\in(0,1)$，故 0<k<1；

综上所述，k 的取值范围是：k<－1 或 0<k<1。

【注】 求参数的范围，分离参数后变成函数值域的问题，观察所求函数式，引入新的变量，转化为三角函数的值域问题，在进行三角换元时，要注意新的变量的范围。一般地，此种思路可以解决有关不等式、方程、最大值和最小值、参数范围之类的问题。本题还用到了分离参数法、三角换元法、等价转化思想等数学思想方法。



另一种解题思路是采取“数形结合法”： 将原方程化为：$\log_a(x-ak)=\log_a\sqrt{x^2-a^2}$，

等价于 $x-ak=\sqrt{x^2-a^2}$ (x－ak>0)，设曲线 C_1：y＝x－ak，曲线 C_2：y＝$\sqrt{x^2-a^2}$ (y>0)，如图所示。

由图可知，当－ak>a 或－a<－ak<0 时曲线 C_1与 C_2有交点，即方程有实解。所以 k 的取值范围是：k<－1 或 0<k<1。

还有一种思路是直接解出方程的根，然后对方程的根进行讨论，具体过程是：原方程等价变形为$\begin{cases} x-ak>0 \\ x-ak=\sqrt{x^2-a^2} \end{cases}$后，解得：$\begin{cases} x>ak \\ x=\dfrac{(k^2+1)a}{2k} \end{cases}$，所以$\dfrac{(k^2+1)a}{2k}$>ak，即$\dfrac{k^2+1}{2k}-$k>0，通分得$\dfrac{k^2-1}{2k}$<0，解得 k<－1 或 0<k<1。所以 k 的取值范围是：k<－1 或 0<k<1。

例 2. 设不等式 2x－1>m(x^2－1)对满足|m|≤2 的一切实数 m 的取值都成立。求 x 的取值范围。

【分析】 此问题由于常见的思维定势，易把它看成关于 x 的不等式讨论。然而，若变换一个角度以 m 为变量，即关于 m 的一次不等式(x^2－1)m－(2x－1)<0 在[-2,2]上恒成立的问题。对此的研究，设 f(m)＝(x^2－1)m－(2x－1)，则问题转化为求一次函数（或常数函数）f(m)的值在[-2,2]内恒为负值时参数 x 应该满足的条件$\begin{cases} f(2)<0 \\ f(-2)<0 \end{cases}$。

【解】问题可变成关于 m 的一次不等式：(x^2－1)m－(2x－1)<0 在[-2,2] 恒成立，设 f(m)＝(x^2－1)m－(2x－1)，

则 $\begin{cases} f(2)=2(x^2-1)-(2x-1)<0 \\ f(-2)=-2(x^2-1)-(2x-1)<0 \end{cases}$

解得 x∈（$\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$）

【注】 本题的关键是变换角度，以参数 m 作为自变量而构造函数式，不等式问题变成函数在闭区间上的值域问题。本题有别于关于 x 的不等式 2x－1>m(x^2－1)的解集是[-2,2]时求 m 的值、关于 x 的不等式 2x－1>m(x^2－1)在[-2,2]上恒成立时求 m 的范围。

一般地，在一个含有多个变量的数学问题中，确定合适的变量和参数，从而揭示函数关系，使问题更明朗化。或者含有参数的函数中，将函数自变量作为参数，而参数作为函数，更具有灵活性，从而巧妙地解决有关问题。

例 3. 设等差数列{a_n}的前 n 项的和为 S_n，已知 a_3＝12，S_{12}>0，S_{13}<0 。

①.求公差 d 的取值范围； ②.指出 S_1、S_2、…、S_{12} 中哪一个值最大，并说明理由。(92 年全国高考)

【分析】①问利用公式 a_n 与 S_n 建立不等式，容易求解 d 的范围；②问利用 S_n 是 n 的二次函数，将 S_n 中哪一个值最大，变成求二次函数中 n 为何值时 S_n 取最大值的函数最值问题。

【解】① 由 $a_3=a_1+2d=12$，得到 $a_1=12-2d$，所以

$S_{12}=12a_1+66d=12(12-2d)+66d=144+42d>0$，

$S_{13}=13a_1+78d=13(12-2d)+78d=156+52d<0$。

解得：$-\dfrac{24}{7}<d<-3$。

② $S_n=na_1+\dfrac{1}{2}n(n1-1)d=n(12-2d)+\dfrac{1}{2}n(n-1)d$

$=\dfrac{d}{2}[n-\dfrac{1}{2}(5-\dfrac{24}{d})]^2-\dfrac{d}{2}[\dfrac{1}{2}(5-\dfrac{24}{d})]^2$

因为 $d<0$，故 $[n-\dfrac{1}{2}(5-\dfrac{24}{d})]^2$ 最小时，S_n 最大。由 $-\dfrac{24}{7}<d<-3$ 得 $6<\dfrac{1}{2}(5-\dfrac{24}{d})<6.5$，故正整数 $n=6$ 时 $[n-\dfrac{1}{2}(5-\dfrac{24}{d})]^2$ 最小，所以 S_6 最大。

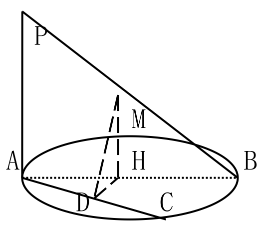
【注】数列的通项公式及前 n 项和公式实质上是定义在自然数集上的函数，因此可利用函数思想来分析或用函数方法来解决数列问题。也可以利用方程的思想，设出未知的量，建立等式关系即方程，将问题进行算式化，从而简洁明快。由次可见，利用函数与方程的思想来解决问题，要求灵活地运用、巧妙的结合，发展了学生思维品质的深刻性、独创性。

本题的另一种思路是寻求 $a_n>0$、$a_{n+1}<0$，即：由 $d<0$ 知道 $a_1>a_2>\cdots>a_{13}$，由 $S_{13}=13a_7<0$ 得 $a_7<0$，由 $S_{12}=6(a_6+a_7)>0$ 得 $a_6>0$。所以，在 S_1、S_2、…、S_{12} 中，S_6 的值最大。

例 4. 如图，AB 是圆 O 的直径，PA 垂直于圆 O 所在平面，C 是圆周上任一点，设∠BAC $=\theta$，PA=AB=2r，求异面直线 PB 和 AC 的距离。

【分析】异面直线 PB 和 AC 的距离可看成求直线 PB 上任意一点到 AC 的距离的最小值，从而设定变量，建立目标函数而求函数最小值。

【解】在 PB 上任取一点 M，作 MD⊥AC 于 D，MH⊥AB 于 H，设 MH=x，则 MH⊥平面 ABC，AC⊥HD 。



$\therefore MD^2=x^2+[(2r-x)\sin\theta]^2=(\sin^2+1)x^2-4r\sin^2\theta x+4r^2\sin^2\theta$

$=(\sin^2\theta+1)[x-\dfrac{2r\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta}]^2+\dfrac{4r^2\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta}$

即当 x=$\dfrac{2r\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta}$ 时，MD 取最小值 $\dfrac{2r\sin\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}$ 为两异面直线的距离。

【注】 本题巧在将立体几何中“异面直线的距离”变成“求异面直线上两点之间距离的最小值”，并设立合适的变量将问题变成代数中的“函数问题”。一般地，对于求最大值、最小值的实际问题，先将文字说明转化成数学语言后，再建立数学模型和函数关系式，然后利用函数性质、重要不等式和有关知识进行解答。比如再现性题组第 8 题就是典型的例子。

例 5. 已知△ABC 三内角 A、B、C 的大小成等差数列，且 tgA·tgC=2+$\sqrt{3}$，又知顶点 C 的对边 c 上的高等于 4$\sqrt{3}$,求△ABC 的三边 a、b、c 及三内角。

【分析】已知了一个积式，考虑能否由其它已知得到一个和式，再用方程思想求解。

【解】 由 A、B、C 成等差数列，可得 B=60°；

由△ABC 中 tgA+tgB+tgC=tgA·tgB·tgC，得

tgA+tgC=tgB(tgA·tgC−1)=$\sqrt{3}$ (1+$\sqrt{3}$)

设 tgA、tgC 是方程 $x^2-(\sqrt{3}+3)x+2+\sqrt{3}=0$ 的两根，解得 $x_1=1$，$x_2=2+\sqrt{3}$

设 A<C，则 tgA=1，tgC=2+$\sqrt{3}$，　∴A=$\dfrac{\pi}{4}$，C=$\dfrac{5\pi}{12}$

由此容易得到 a=8，b=4$\sqrt{6}$，c=4$\sqrt{3}$+4。

【注】本题的解答关键是利用“△ABC 中 tgA+tgB+tgC=tgA·tgB·tgC”这一条性质得到 tgA+tgC，从而设立方程求出 tgA 和 tgC 的值，使问题得到解决。

例 6. 若 $(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$,求证：x、y、z 成等差数列。

【分析】 观察题设，发现正好是判别式 $b^2-4ac=0$ 的形式，因此联想到构造一个一元二次方程进行求解。

【证明】 当 x=y 时，可得 x=z，　∴x、y、z 成等差数列；

当 x≠y 时，设方程 $(x-y)t^2-(z-x)t+(y-z)=0$，由△=0 得 $t_1=t_2$，并易知 t=1 是方程的根。

∴$t_1\cdot t_2=\dfrac{y-z}{x-y}=1$　，　即 2y=x+z ，　∴x、y、z 成等差数列

【注】一般地，题设条件中如果已经具备或经过变形整理后具备了“$x_1+x_2=a$、$x_1\cdot x_2=b$”的形式，则可以利用根与系数的关系构造方程；如果具备 $b^2-4ac\geq0$ 或 $b^2-4ac\leq0$ 的形式，可以利用根的判别式构造一元二次方程。这种方法使得非方程问题用方程思想来解决，体现了一定的技巧性，也是解题基本方法中的一种“构造法”。

例 7. △ABC 中，求证：cosA·cosB·cosC≤$\dfrac{1}{8}$ 。

【分析】考虑首先使用三角公式进行变形，结合三角形中有关的性质和定理，主要是运用“三角形的内角和为 180°”。变形后再通过观察式子的特点而选择和发现最合适的方法解决。

【证明】 设 $k=\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]\cdot\cos C=\frac{1}{2}[-\cos C+\cos(A-B)]\cos C$

整理得：$\cos^2 C-\cos(A-B)\cdot\cos C+2k=0$，即看作关于 cosC 的一元二次方程。

$\therefore\ \triangle=\cos^2(A-B)-8k\geq 0$ 即 $8k\leq\cos^2(A-B)\leq 1$

$\therefore\ k\leq\frac{1}{8}$ 即 $\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C\leq\frac{1}{8}$

【注】本题原本是三角问题，引入参数后，通过三角变形，发现了其等式具有“二次”特点，于是联想了一元二次方程，将问题变成代数中的方程有实解的问题，这既是“方程思想”，也体现了“判别式法”、“参数法”。

此题的另外一种思路是使用“放缩法”，在放缩过程中也体现了“配方法”，具体解答过程是：$\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]\cdot\cos C=-\frac{1}{2}\cos^2 C+\frac{1}{2}\cos(A-B)\cdot\cos C=-\frac{1}{2}[\cos C-\frac{\cos(A-B)}{2}]^2+\frac{1}{8}\cos^2(A-B)\leq\frac{1}{8}\cos^2(A-B)\leq\frac{1}{8}$。

例 8. 设 $f(x)=\lg\frac{1+2^x+4^x a}{3}$，如果当 $x\in(-\infty,1]$ 时 $f(x)$ 有意义，求实数 a 的取值范围。

【分析】当 $x\in(-\infty,1]$ 时 $f(x)=\lg\frac{1+2^x+4^x a}{3}$ 有意义的函数问题，转化为 $1+2^x+4^x a>0$ 在 $x\in(-\infty,1]$ 上恒成立的不等式问题。

【解】 由题设可知，不等式 $1+2^x+4^x a>0$ 在 $x\in(-\infty,1]$ 上恒成立，

即：$(\frac{1}{2})^{2x}+(\frac{1}{2})^x+a>0$ 在 $x\in(-\infty,1]$ 上恒成立。

设 $t=(\frac{1}{2})^x$， 则 $t\geq\frac{1}{2}$， 又设 $g(t)=t^2+t+a$，其对称轴为 $t=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ t^2+t+a=0$ 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 上无实根， 即 $g(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}+a>0$，得 $a>-\frac{3}{4}$

所以 a 的取值范围是 $a>-\frac{3}{4}$。

【注】对于不等式恒成立，引入新的参数化简了不等式后，构造二次函数利用函数的图像和单调性进行解决问题，其中也联系到了方程无解，体现了方程思想和函数思想。一般地，我们在解题中要抓住二次函数及图像、二次不等式、二次方程三者之间的紧密联系，将问题进行相互转化。

在解决不等式$(\frac{1}{2})^{2x}+(\frac{1}{2})^{x}+a>0$在$x\in(-\infty,1]$上恒成立的问题时，也可使用“分离参数法”： 设$t=(\frac{1}{2})^{x}$， $t\geq\frac{1}{2}$，则有$a=-t^2-t\in(-\infty,-\frac{3}{4}]$，所以a的取值范围是$a>-\frac{3}{4}$。其中最后得到a的范围，是利用了二次函数在某区间上值域的研究，也可属应用“函数思想”。

Ⅲ、巩固性题组：

1. 方程$\sin 2x=\sin x$在区间$(0,2\pi)$内解的个数是_____。
   A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

2. 已知函数$f(x)=|2^x-1|$，$a<b<c$，且$f(a)>f(c)>f(b)$，则_____。
   A. $a<0,b<0,c>0$　B. $a<0,b>0,c>0$　C. $2^{-a}<2^c$　D. $2^a+2^c<2$

3. 已知函数$f(x)=\log_a(x^2-4x+8)$， $x\in[0,2]$的最大值为-2，则$a=$_____。
   A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{4}$　C. 2　D. 4

4. 已知$\{a_n\}$是等比数列，且$a_1+a_2+a_3=18$，$a_2+a_3+a_4=-9$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$等于_____。
   A. 8　B. 16　C. 32　D. 48

5. 等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=84$，前n项和为S_n，已知$S_9>0$，$S_{10}<0$，则当$n=$______时，S_n最大。

6. 对于满足$0\leq p\leq 4$的所有实数p，使不等式$x^2+px>4x+p-3$成立的x的取值范围是________。

7. 若关于x的方程$|x^2-6x+8|=a$恰有两个不等实根，则实数a的取值范围是____________。

8. 已知点A(0,1)、B(2,3)及抛物线$y=x^2+mx+2$，若抛物线与线段AB相交于两点，求实数m的取值范围。

9. 已知实数x、y、z满足等式$x+y+z=5$和$xy+yz+zx=3$,试求z的取值范围。

10. 已知$\lg^2\frac{a}{c}-4\cdot\lg\frac{a}{b}\cdot\lg\frac{b}{c}=0$，求证：b是a、c的等比中项。

11. 设α、β、γ均为锐角，且$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma=1$，求证：$\alpha+\beta+\gamma=\pi$。

12. 当 p 为何值时，曲线 $y^2=2px$ (p>0) 与椭圆 $\frac{1}{4}(x-2-\frac{p}{2})^2+y^2=1$ 有四个交点。(88 年全国高考)

13. 已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实数根 α、β。证明：

①. 如果 $|\alpha|<2$，$|\beta|<2$，那么 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$；
②. 如果 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$，那么 $|\alpha|<2$，$|\beta|<2$。 （93 年全国理）

14. 设 f(x) 是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2 为周期的函数，对 $k\in Z$，用 I_k 表示区间 $(2k-1,2k+1]$，已知当 $x\in I_0$ 时，$f(x)=x^2$。 ①. 求 f(x) 在 I_k 上的解析表达式； ②. 对自然数 k，求集合 $M_k=\{a|$使方程 $f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实根$\}$。 （89 年全国理）

四、等价转化思想方法

等价转化是把未知解的问题转化到在已有知识范围内可解的问题的一种重

要的思想方法。通过不断的转化，把不熟悉、不规范、复杂的问题转化为熟悉、规范甚至模式法、简单的问题。历年高考，等价转化思想无处不见，我们要不断培养和训练自觉的转化意识，将有利于强化解决数学问题中的应变能力，提高思维能力和技能、技巧。

转化有等价转化与非等价转化。等价转化要求转化过程中前因后果是充分必要的，才保证转化后的结果仍为原问题的结果。非等价转化其过程是充分或必要的，要对结论进行必要的修正（如无理方程化有理方程要求验根），它能给人带来思维的闪光点，找到解决问题的突破口。我们在应用时一定要注意转化的等价性与非等价性的不同要求，实施等价转化时确保其等价性，保证逻辑上的正确。

著名的数学家，莫斯科大学教授C.A.雅洁卡娅曾在一次向数学奥林匹克参赛者发表《什么叫解题》的演讲时提出：“解题就是把要解题转化为已经解过的题”。数学的解题过程，就是从未知向已知、从复杂到简单的化归转换过程。

等价转化思想方法的特点是具有灵活性和多样性。在应用等价转化的思想方法去解决数学问题时，没有一个统一的模式去进行。它可以在数与数、形与形、数与形之间进行转换；它可以在宏观上进行等价转化，如在分析和解决实际问题的过程中，普通语言向数学语言的翻译；它可以在符号系统内部实施转换，即所说的恒等变形。消去法、换元法、数形结合法、求值求范围问题等等，都体现了等价转化思想，我们更是经常在函数、方程、不等式之间进行等价转化。可以说，等价转化是将恒等变形在代数式方面的形变上升到保持命题的真假不变。由于其多样性和灵活性，我们要合理地设计好转化的途径和方法，避免死搬硬套题型。

在数学操作中实施等价转化时，我们要遵循熟悉化、简单化、直观化、标准化的原则，即把我们遇到的问题，通过转化变成我们比较熟悉的问题来处理；或者将较为繁琐、复杂的问题，变成比较简单的问题，比如从超越式到代数式、从无理式到有理式、从分式到整式…等；或者比较难以解决、比较抽象的问题，转化为比较直观的问题，以便准确把握问题的求解过程，比如数形结合法；或者从非标准型向标准型进行转化。按照这些原则进行数学操作，转化过程省时省力，有如顺水推舟，经常渗透等价转化思想，可以提高解题的水平和能力。

Ⅰ、再现性题组：

1. $f(x)$是R上的奇函数，$f(x+2)=f(x)$，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=x$，则$f(7.5)$等于_____。

   A. 0.5　　B. －0.5　　C. 1.5　　D. －1.5

2. 设$f(x)=3x-2$，则$f^{-1}[f(x)]$等于______。

   A. $\dfrac{x+8}{9}$　　B. $9x-8$　　C. x　　D. $\dfrac{1}{3x-2}$

3. 若m、n、p、q∈R且$m^2+n^2=a$，$p^2+q^2=b$，$ab\neq 0$，则$mp+nq$的最大值是______。

   A. $\dfrac{a+b}{2}$　　B. $\sqrt{ab}$　　C. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$　　D. $\dfrac{ab}{a+b}$

4. 如果复数z满足$|z+i|+|z-i|=2$，那么$|z+i+1|$的最小值为______。

   A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

5. 设椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ （a>b>0）的半焦距为 c，直线 l 过(0, a)和(b, 0)，已知原点到 l 的距离等于 $\frac{2\sqrt{21}}{7}$ c，则椭圆的离心率为_____。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. 已知三棱锥 S-ABC 的三条侧棱两两垂直，SA＝5，SB＝4，SC＝3，D 为 AB 的中点，E 为 AC 的中点，则四棱锥 S-BCED 的体积为_____。

A. $\frac{15}{2}$　　B. 10　　C. $\frac{25}{2}$　　D. $\frac{35}{2}$

【简解】1 小题：由已知转化为周期为 2, 所以 f(7.5)＝f(-0.5)＝－f(0.5)，选 B；

2 小题：设 f(x)＝y，由互为反函数的值域与定义域的关系，选 C；

3 小题：由 mp＋nq≤$\frac{m^2+p^2}{2}+\frac{n^2+q^2}{2}$ 容易求解，选 A；

4 小题：由复数模几何意义利用数形结合法求解，选 A；

5 小题：ab＝$\frac{2\sqrt{21}c}{7}\times\sqrt{a^2+b^2}$，变形为 $12e^4-31e^2+7=0$，再解出 e，选 B；

6 小题：由 $S_{\Delta ADE}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$ 和三棱椎的等体积转化容易求，选 A。

Ⅱ、示范性题组：

例 1. 若 x、y、z∈R^+ 且 x＋y＋z＝1，求 $(\frac{1}{x}-1)(\frac{1}{y}-1)(\frac{1}{z}-1)$ 的最小值。

【分析】由已知 x＋y＋z＝1 而联想到，只有将所求式变形为含代数式 x＋y＋z，或者运用均值不等式后含 xyz 的形式。所以，关键是将所求式进行合理的变形，即等价转化。

【解】$(\frac{1}{x}-1)(\frac{1}{y}-1)(\frac{1}{z}-1)=\frac{1}{xyz}(1-x)(1-y)(1-z)$

$=\frac{1}{xyz}(1-x-y-z+xy+yz+zx-xyz)=\frac{1}{xyz}(xy+yz+zx-xyz)$

$=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}-1=\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}-1\geqslant\frac{3}{\frac{x+y+z}{3}}-1=9$

【注】对所求式进行等价变换：先通分，再整理分子，最后拆分。将问题转化为求$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$的最小值，则不难由平均值不等式而进行解决。此题属于代数恒等变形题型，即代数式在形变中保持值不变。

例 2. 设 x、y∈R 且 $3x^2+2y^2=6x$，求 x^2+y^2的范围。

【分析】 设 $k=x^2+y^2$，再代入消去 y，转化为关于 x 的方程有实数解时求参数 k 范围的问题。其中要注意隐含条件，即 x 的范围。

【解】由 $6x-3x^2=2y^2\geqslant 0$ 得 $0\leqslant x\leqslant 2$。

设 $k=x^2+y^2$，则 $y^2=k-x^2$，代入已知等式得：$x^2-6x+2k=0$ ，

即 $k=-\frac{1}{2}x^2+3x$，其对称轴为 $x=3$。

由 $0\leqslant x\leqslant 2$ 得 $k\in[0,4]$。

所以 x^2+y^2的范围是：$0\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$。

【另解】 数形结合法（转化为解析几何问题）：

由 $3x^2+2y^2=6x$ 得 $(x-1)^2+\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$，即表示如图所示椭圆，其一个顶点在坐标原点。

x^2+y^2的范围就是椭圆上的点到坐标原点的距离的平方。由图可知最小值是 0,距离最大的点是以原点为圆心的圆与椭圆相切的切点。设圆方程为 $x^2+y^2=k$,代入椭圆中消 y 得 $x^2-6x+2k=0$。由判别式$\triangle=36-8k=0$ 得 $k=4$,所以 x^2+y^2的范围是：$0\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$。

【再解】 三角换元法，对已知式和待求式都可以进行三角换元（转化为三角问题）：

由 $3x^2+2y^2=6x$ 得 $(x-1)^2+\frac{y^2}{\frac{3}{2}}=1$，设$\begin{cases}x-1=\cos\alpha\\ y=\frac{\sqrt{6}}{2}\sin\alpha\end{cases}$，则

$x^2+y^2=1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\frac{3}{2}\sin^2\alpha=1+\frac{3}{2}+2\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos^2\alpha$

$=-\frac{1}{2}\cos^2\alpha+2\cos\alpha+\frac{5}{2}\in[0,4]$

所以 x^2+y^2的范围是：$0\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$。

【注】本题运用多种方法进行解答，实现了多种角度的转化，联系了多个知识点，有助于提高发散思维能力。此题还可以利用均值换元法进行解答。各种方法的运用，分别将代数问题转化为了其它问题，属于问题转换题型。

例 3. 求值：ctg10°－4cos10°

【分析】分析所求值的式子，估计两条途径：一是将函数名化为相同，二是将非特殊角化为特殊角。

【解一】ctg10°－4cos10° $=\dfrac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}-4\cos 10^\circ=\dfrac{\cos 10^\circ-4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}$

$$=\frac{\sin 80^\circ-2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\sin 80^\circ-\sin 20^\circ-\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}$$

$$=\frac{2\cos 50^\circ\sin 30^\circ-\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\sin 40^\circ-\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{2\cos 30^\circ\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}=$$

$\sqrt{3}$

（基本过程：切化弦→通分→化同名→拆项→差化积→化同名→差化积）

【解二】ctg10°－4cos10° $=\dfrac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}-4\cos 10^\circ=\dfrac{\cos 10^\circ-4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}$

$$=\frac{\sin 80^\circ-2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}\sin 80^\circ-2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}$$

$$=\frac{2\cos 60^\circ\sin 80^\circ-2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\sin 140^\circ-\sin(-20^\circ)-2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}$$

$$=\frac{\sin 140^\circ-\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{2\cos 80^\circ\sin 60^\circ}{\sin 10^\circ}=\sqrt{3}$$

（基本过程：切化弦→通分→化同名→特值代入→积化和→差化积）

【解三】ctg10°－4cos10° $=\dfrac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}-4\cos 10^\circ=\dfrac{\cos 10^\circ-4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}$

$$=\frac{\sin 80^\circ-2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\sin(60^\circ+20^\circ)-2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\sin 20^\circ-2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=\frac{\sqrt{3}(\frac{1}{2}\cos 20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ)}{\sin 10^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cos(60^\circ+20^\circ)}{\sin 10^\circ}=\sqrt{3}$$

（基本过程：切化弦→通分→化同名→拆角 80°→和差角公式）

【注】无条件三角求值问题，是高考中常见题型，其变换过程是等价转化思想的体现。此种题型属于三角变换型。一般对，对于三角恒等变换，需要灵活运用的是同角三角函数的关系式、诱导公式、和差角公式、倍半角公式、和积互化公式以及万能公式，常用的手段是：切割化弦、拆角、将次与升次、和积互化、异名化同名、异角化同角、化特殊角等等。对此，我们要掌握变换的通法，活用 2 公式，攻克三角恒等变形的每一道难关。

例 4. 已知 $f(x)=tgx$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，若 x_1、$x_2\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 且 $x_1\neq x_2$，

求证：$\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$　　（94 年全国高考）

【分析】从问题着手进行思考，运用分析法，一步步探求问题成立的充分条件。

【证明】$\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f(\dfrac{x_1+x_2}{2})\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}[tgx_1+tgx_2]>tg\dfrac{x_1+x_2}{2}$

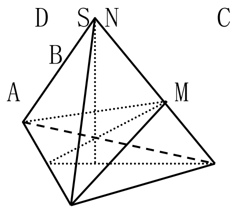
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\frac{\sin x_1}{\cos x_1}+\frac{\sin x_2}{\cos x_2})>\frac{\sin(x_1+x_2)}{1+\cos(x_1+x_2)}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\frac{\sin(x_1+x_2)}{\cos x_1\cos x_2}>\frac{\sin(x_1+x_2)}{1+\cos(x_1+x_2)}$$

$$\Leftrightarrow 1+\cos(x_1+x_2)>2\cos x_1\cos x_2\Leftrightarrow 1+\cos x_1\cos x_2+\sin x_1\sin x_2>2\cos x_1\cos x_2$$

$$\Leftrightarrow \cos x_1\cos x_2+\sin x_1\sin x_2<1\Leftrightarrow\cos(x_1-x_2)<1$$

由已知显然 $\cos(x_1-x_2)<1$ 成立，所以 $\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$

【注】 本题在用分析法证明数学问题的过程中，每一步实施的都是等价转化。此种题型属于分析证明型。



例 5. 如图，在三棱锥 S-ABC 中，S 在底面上的射影 N 位于底面的高 CD 上，M 是侧棱 SC 上的一点，使截面 MAB 与底面所成角等于∠NSC。求证：SC 垂直于截面 MAB。（83 年全国高考）

【分析】 由三垂线定理容易证明 SC⊥AB，再在平面 SDNC 中利用平面几何知识证明 SC⊥DM。

【证明】由已知可得：SN⊥底面 ABC，AB⊥CD，CD 是斜线 SC 在底面 AB 的射影，

∴ AB⊥SC。

∵ AB⊥SC、AB⊥CD

∴ AB⊥平面 SDNC

∴ ∠MDC 就是截面 MAB 与底面所成的二面角

由已知得∠MDC＝∠NSC

又∵ ∠DCM＝∠SCN

∴ △DCM≌△SCM

∴ ∠DMC＝∠SNC＝Rt∠

即 SC⊥DM

所以 SC⊥截面 MAB。

【注】立体几何中有些问题的证明，可以转化为平面几何证明来解决，即考虑在一个平面上的证明时运用平面几何知识。

Ⅲ、巩固性题组：

1. 正方形 ABCD 与正方形 ABEF 成 90° 的二面角，则 AC 与 BF 所成的角为_____。

   A. 45°　　B. 60°　　C. 30°　　D. 90°

2. 函数 $f(x)=|\lg x|$，若 $0<a<b$ 时有 $f(a)>f(b)$，则下列各式中成立的是_____。

   A. $ab\leqslant 1$　　B. $ab<1$　　C. $ab>1$　　D. $a>1$ 且 $b>1$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]$　$(n\in N)$的值为______。

   A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 0　　D. 1

4. $(a+b+c)^{10}$展开式的项数是_____。

   A. 11　　B. 66　　C. 132　　D. 3^{10}

5. 已知长方体 ABCD-A'B'C'D'中，AA'＝AD＝1，AB＝$\sqrt{3}$，则顶点 A 到截面 A'BD 的距离是_______。

6. 已知点 $M(3\cos x，3\sin x)$、$N(4\cos y，4\sin y)$，则$|MN|$的最大值为_________。

7. 函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ 的值域是____________。

8. 不等式 $\log_8(x^3+x+3)>\log_2(x+2)$的解是____________。

9. 设 $x>0$，$y>0$，求证：$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}>(x^3+y^3)^{\frac{1}{3}}$　(86 年上海高考)

10. 当 $x\in[0,\ \dfrac{\pi}{2}]$时，求使 $\cos^2x-m\cos x+2m-2>0$ 恒成立的实数 m 的取值范围。

11. 设△ABC 的三内角 A、B、C 的对边分别是 a、b、c，若三边 a、b、c 顺次成等差数列，求复数 $z=[\cos(\pi+\dfrac{A}{2})+i\sin(\pi+\dfrac{A}{2})]\cdot[\sin(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{C}{2})+i\cos(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{C}{2})]$的辐角主值 $\arg z$ 的最大值。

12. 已知抛物线 C：$y=(t^2+t-1)x^2-2(a+t)^2x+(t^2+3at+b)$对任何实数 t 都与 x 轴交于 P(1,0)点，又设抛物线 C 与 x 轴的另一交点为 Q(m,0)，求 m 的取值范围。

第三章　高考热点问题和解题策略

数学高考坚持以“两个有利”（有利高校选拔新生、有利中学教学）为指导思想，严格遵循“考试说明”的规定，内容上不超纲，能力上不超规定层次（了解、理解和掌握、灵活和综合运用），在考查三基（基础知识、基本技能、基本技巧）和四种能力（逻辑思维能力、运算能力、空间想象能力、分析和解决问题

的能力）的同时，侧重考查教材中的主要内容、数学思想方法和应用意识，特别是突出考查数学学科的思维能力。

函数平均每年占高考总分的 13.8%，考查的知识背景为幂、指、对及一般函数的概念、定义域、值域、反函数；函数的性质、函数的单调性、奇偶性、周期性；函数的图像等。

三角函数平均每年占高考总分的 12.6%，考查的知识背景是三角函数的概念、性质、以及有关公式的应用，以常规题居多。

解（证）不等式平均每年占高考总分的 11.2%，考查的知识背景为不等式的性质、定理；立几、数列中的最值问题以及解几中的范围问题。

数列、极限和数学归纳法平均每年占高考总分的 13.8%，考查的知识背景为等差（比）数列的概念与计算公式；数列、极限的概念与求法。

线面间的位置关系平均每年占高考总分的 11.8%，考查的知识背景为线面间的平行、垂直性质与判定及有关概念。每年均为阅读理解型试题。

圆锥曲线平均每年占高考总分的 11.7%，考查的知识背景为圆锥曲线的定义、性质及解几中的基本数学思想方法。

1993 年—1999 年高考试题中，常用的数学方法几乎每年考到，常用的数学思想方法考查的频率明显提高，探索性能力题年年考，对应用性问题的考查力度不断加大，阅读理解能力多题渗透。

今年高考命题，选择题继续保持 14 个题题量，仍分为 1-5 题，每题 4 分，6-14 题每题 5 分，但适当降低最后 2-3 题的难度，控制语言的抽象水平。填空题保持 1997-1999 年水平，共 4 个题左右，每题 4 分，难度仍将为中等题，以计算题为主，且计算量仍不会加大。相比 99 年高考，2000 高考将适当降低试卷的难度，**进一步加强对思维能力考查**。

进一步注重通性通法的考查，继续**突出主体内容（函数、方程、不等式、数列和圆锥曲线等）**，淡化某些不宜升温的知识（递推数列、复数和立体几何等），做好向新高中教材过渡的准备。

应用题将适当控制对建模能力难度的考查，减少普通语言转译为数学语言的难度，既注意贴近生活，又注意靠近课本。探索性综合题和信息迁移题不可能增加难度，如数列综合题仍以归纳猜想为主要形式。

一、应用问题

应用问题的“考试要求”是考查考生的应用意识和运用数学知识与方法来分析问题解决问题的能力，这个要求分解为三个要点：

1、要求考生关心国家大事，了解信息社会，讲究联系实际，重视数学在生产、生活及科学中的应用，明确“数学有用，要用数学”，并积累处理实际问题的经验。

2、考查理解语言的能力，要求考生能够从普通语言中捕捉信息，将普通语言转化为数学语言，以数学语言为工具进行数学思维与交流。

3、考查建立数学模型的初步能力，并能运用“考试说明”所规定的数学知识和方法来求解。

对应用题，考生的弱点主要表现在将实际问题转化成数学问题的能力上。实际问题转化为数学问题，关键是提高阅读能力即数学审题能力，审出函数、方程、不等式、等式，要求我们读懂材料，辨析文字叙述所反应的实际背景，领悟从背景中概括出来的数学实质，抽象其中的数量关系，将文字语言叙述转译成数学式符号语言，建立对应的数学模型解答。可以说，解答一个应用题重点要过三关：一是事理关，即读懂题意，需要一定的阅读理解能力；二是文理关，即把文字语言转化为数学的符号语言；三是数理关，即构建相应的数学模型，构建之后还需要扎实的基础知识和较强的数理能力。

求解应用题的一般步骤是（四步法）：

1、读题：读懂和深刻理解，译为数学语言，找出主要关系；

2、建模：把主要关系近似化、形式化，抽象成数学问题；

3、求解：化归为常规问题，选择合适的数学方法求解；

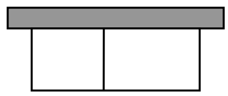
4、评价：对结果进行验证或评估，对错误加以调节，最后将结果应用于现实，作出解释或验证。

在近几年高考中，经常涉及的数学模型，有以下一些类型：数列模型、函数模型、不等式模型、三角模型、排列组合模型等等。

Ⅰ、再性性题组：

1. 某种细菌在培养过程中，每 20 分钟分裂一次（一个分裂为两个），经过 3 小时，这种细菌由 1 个可繁殖成______。(94 年全国高考)

A. 511 个　B. 512 个　C. 1023 个　D. 1024 个



2. 如图，以墙为一边，用篱笆围成长方形的场地，并用平行于一边的篱笆隔开，已知篱笆的总长为定值 L，这块场地的长为_______时，场地面积最大，最大面积是_________。(82 年全国高考)

3. 圆柱轴截面的周长 L 为定值，那么圆柱体积的最大值是_______。(93 年全国高考)

A. $(\frac{L}{6})^3\pi$　B. $\frac{1}{9}(\frac{L}{2})^3\pi$　C. $(\frac{L}{4})^3\pi$　D. $2(\frac{L}{4})^3\pi$

4. 在半径为 30m 的圆形广场中央上空，置一个照明光源，射向地面的光呈圆锥形，且其轴截面顶角为 120°，若要光源恰好照亮整个广场，则其高度应为_______。(精确到 0.1m) (93 年全国高考)

5. 甲、乙、丙、丁四个公司承包 8 项工程，甲公司承包 3 项，乙公司承包 1 项，丙、丁公司各承包 2 项，共有_______种承包方式。(86 年全国高考)

【简解】1 小题：答案 B；

2 小题：设长 x，面积 $S=x\times\frac{l-x}{3}\leqslant\frac{1}{3}(\frac{l}{2})^2$，答案：长为$\frac{l}{2}$，最大面积$\frac{l^2}{12}$；

3 小题：$V=\pi r^2\frac{l-4r}{2}=\pi r^2(\frac{l}{2}-2r)\leqslant\pi(\frac{r+r+\frac{l}{2}-2r}{3})^3$，选 A；

4 小题：由$\frac{30}{h}=\mathrm{tg}60°$ 得 $h=10\sqrt{3}\approx17.3$；

5 小题：$C_8^3C_5^1C_4^2=1680$。

Ⅱ、示范性题组：

例 1. 某地现有耕地 10000 公顷，规划 10 年后粮食单产比现有增加 22%，人均粮食产量比现在提高 10%，如果人口年增长率为 1%，那么耕地每年至多只能减少多少公顷（精确到 1 公顷）？ （96 年全国高考）

（粮食单产$=\frac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}}$　；　人均粮食产量$=\frac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}$）

【分析】此题以关系国计民生的耕地、人口、粮食为背景，给出两组数据，要求考生从两条线索抽象数列模型，然后进行比较与决策。

【解】1. 读题：问题涉及耕地面积、粮食单产、人均粮食占有量、总人口数及三个百分率，其中人均粮食占有量 $P=\dfrac{粮食单产\times耕地面积}{总人口数}$，　主要关系是：$P_{实际}\geq P_{规划}$ 。

2. 建模：设耕地面积平均每年至多减少 x 公顷，现在粮食单产为 a 吨／公顷，现在人口数为 m，则现在占有量为 $\dfrac{a\times10^4}{m}$，10 年后粮食单产为 $a(1+0.22)$，人口数为 $m(1+0.01)^{10}$，耕地面积为 (10^4-10x)。

$$\therefore\ \frac{a(1+0.22)(10^4-10x)}{m(1+0.01)^{10}}\geqslant\frac{a\times10^4}{m}(1+0.1)$$

即 $1.22(10^4-10x)\geq1.1\times10^4\times(1+0.01)^{10}$

3. 求解：　$x\leq10^3-\dfrac{1.1}{1.22}\times10^3\times(1+0.01)^{10}$

$\because\ (1+0.01)^{10}=1+C_{10}^1\times0.01+C_{10}^2\times0.01^2+C_{10}^3\times0.01^3+\cdots\approx1.1046$

$\therefore\ x\leq10^3-995.9\approx4$（公顷）

4. 评价：答案 $x\leq4$ 公顷符合控制耕地减少的国情，又验算无破，故可作答。（答略）

【另解】1. 读题：粮食总产量＝单产×耕地面积；　粮食总占有量＝人均占有量×总人口数；

而主要关系是：　粮食总产量≥粮食总占有量

2. 建模：设耕地面积平均每年至多减少 x 公顷，现在粮食单产为 a 吨／公顷，现在人口数为 m，则现在占有量为 $\dfrac{a\times10^4}{m}$，10 年后粮食单产为 $a(1+0.22)$，人口数为 $m(1+0.01)^{10}$，耕地面积为 (10^4-10x)。

$$\therefore\ a(1+0.22)\times(10^4-10x)\geqslant\frac{a\times10^4}{m}\times(1+0.1)\times m(1+0.01)^{10}$$

3. 求解：　$x\leq10^3-\dfrac{1.1}{1.22}\times10^3\times(1+0.01)^{10}$

$\because\ (1+0.01)^{10}=1+C_{10}^1\times0.01+C_{10}^2\times0.01^2+C_{10}^3\times0.01^3+\cdots\approx1.1046$

$\therefore\ x\leq10^3-995.9\approx4$（公顷）

4. 评价：答案 $x\leq4$ 公顷符合控制耕地减少的国情，又验算无破，故可作答。（答略）

【注】本题主要是抓住各量之间的关系，注重 3 个百分率。其中耕地面积为等差数列，总人口数为等比数列模型，问题用不等式模型求解。本题两种解法，虽都是建立不等式模型，但建立时所用的意义不同，这要求灵活掌握，还要求对指数函数、不等式、增长率、二项式

定理应用于近似计算等知识熟练。此种解法可以解决有关统筹安排、最佳决策、最优化等问题。此种题型属于不等式模型，也可以把它作为数列模型，相比之下，主要求解过程是建立不等式模型后解出不等式。

在解答应用问题时，我们强调“评价”这一步不可少！它是解题者的自我调节，比如本题求解过程中若令 $1.01^{10}\approx1$，算得结果为 $x\leqslant98$ 公顷，自然会问：耕地减少这么多，符合国家保持耕地的政策吗？于是进行调控，检查发现是错在 1.01^{10} 的近似计算上。

例 2．已知某市 1990 年底人口为 100 万，人均住房面积为 $5m^2$，如果该市每年人口平均增长率为 2%，每年平均新建住房面积为 10 万 m^2，试求到 2000 年底该市人均住房面积（精确到 0.01）？（91 年上海高考）

【分析】城市每年人口数成等比数列，每年住房总面积成等比数列，分别写出 2000 年后的人口数、住房总面积，从而计算人均住房面积。

【解】1.读题：主要关系：人均住房面积＝$\dfrac{总住房面积}{总人口数}$

2.建模：2000 年底人均住房面积为 $\dfrac{100\times10^4\times5+10\times10^4\times10}{100\times10^4\times(1+2\%)^{10}}$

3.求解：化简上式＝$\dfrac{6}{1.02^{10}}$，

∵ $1.02^{10}=1+C_{10}^1\times0.02+C_{10}^2\times0.02^2+C_{10}^3\times0.02^3+\cdots\approx1.219$

∴ 人均住房面积为 $\dfrac{6}{1.02^{10}}\approx4.92$

4.评价：答案 4.92 符合城市实际情况，验算正确，所以到 2000 年底该市人均住房面积为 $4.92m^2$。

【注】一般地，涉及到利率、产量、降价、繁殖等与增长率有关的实际问题，可通过观察、分析、归纳出数据成等差数列还是等比数列，然后用两个基础数列的知识进行解答。此种题型属于应用问题中的数列模型。

例 3．甲、乙两地相距 S 千米，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不得超过 c 千米／时，已知汽车每小时的运输成本（以元为单位）由可变部分和固定部分组成：可变部分与速度 v（千米／时）的平方成正比，比例系数为 b；固定部分为 a 元。

① 把全程运输成本 y（元）表示为速度 v（千米／时）的函数，并指出函数的定义域；

② 为了使全程运输成本最小，汽车应以多大速度行驶？　　（97 年全国高考）

【分析】几个变量（运输成本、速度、固定部分）有相互的关联，抽象出其中的函数关系，并求函数的最小值。

【解】（读题）由主要关系：运输总成本＝每小时运输成本×时间，

（建模）有 $y=(a+bv^2)\dfrac{S}{v}$

（解题）所以全程运输成本 y（元）表示为速度 v（千米／时）的函数关系式是：y＝S($\frac{a}{v}$＋bv)，其中函数的定义域是 v∈(0,c]。

整理函数有 y＝S($\frac{a}{v}$＋bv)＝S(v＋$\frac{\frac{a}{b}}{v}$)，

由函数 y＝x＋$\frac{k}{x}$ (k>0)的单调性而得：

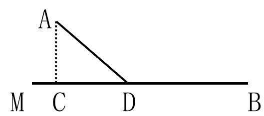
当 $\sqrt{\frac{a}{b}}$<c 时，则 v＝$\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时，y 取最小值；

当 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ≥c 时，则 v＝c 时，y 取最小值。

综上所述，为使全程成本 y 最小，当 $\sqrt{\frac{a}{b}}$<c 时，行驶速度应为 v＝$\sqrt{\frac{a}{b}}$；当 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ≥c 时，行驶速度应为 v＝c。

【注】对于实际应用问题，可以通过建立目标函数，然后运用解（证）不等式的方法求出函数的最大值或最小值，其中要特别注意蕴涵的制约关系，如本题中速度 v 的范围，一旦忽视，将出现解答不完整。此种应用问题既属于函数模型，也可属于不等式模型。

例 4．如图，假设河的一条岸边为直线 MN，AC⊥MN 于 C，点 B、D 在 MN 上，现将货物从 A 地经陆地 AD 于水陆 BD 运往 B 地，已知 AC＝10km，BC＝30km，又陆地单位距离的运价是水陆单位距离运价的 2 倍，为使运费最少，D 点应选在距 C 点多远处？



【分析】设∠ADC＝α 后，将 AD、BC 用 α 表示，进而将运费表示成 α 的函数是，再求运费最小值等。

【解】设∠ADC＝α，则 AD＝$\frac{10}{\sin\alpha}$，BD＝30－10ctgα，

设水路每 km 的运费为 1，则运费 y＝(30－10ctgα)＋2×$\frac{10}{\sin\alpha}$

＝10(3－$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$＋$\frac{2}{\sin\alpha}$)＝10(3＋$\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}$)

设 t＝$\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}$，即 t×sinα＋cosα＝2,有 $\sqrt{t^2+1}$ sin(α＋θ)＝2,

∴ $\sqrt{t^2+1}$ ≥2 即 t≥ $\sqrt{3}$。

当 t＝$\sqrt{3}$ 时，2－cosα＝$\sqrt{3}$ sinα 即 $\frac{\sqrt{3}}{2}$sinα＋$\frac{1}{2}$cosα＝1,

∴ sin(α＋30°)＝1,即 α＝60°。

∴ CD＝10ctgα＝$\frac{10\sqrt{3}}{3}$km

综上所述，D 点应选在距 C 点 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ km 时运费最少。

【注】作为工具学科的三角，跨学科的应用是它的特点，不少物理学、工程测量、航海航空等应用题都可以转化为三角函数来解决，或者运用解三角形中的基本知识和手段进行解答，此种题型属于应用问题中的三角模型。

在解答应用问题中，最常见的是以上的几种模型，即：函数模型、不等式模型、数列模型、三角模型。此外，其它的几种应用问题模型有：与排列组合有关的应用问题，特征比较明显，属于排列组合模型，解答时一定要分清楚是分类还是分步，是排列还是组合，是否有重复和遗漏；与光学、力学、轨迹等有关方面的应用问题，可通过建立适当的坐标系，运用曲线的知识来建立数学模型来解答，且曲线研究主要是二次曲线，所以可称之为二次曲线模型。

Ⅲ、巩固性题组：

1.某商品降价 10%后，欲恢复原价，则应提价为______。

A. 10%　　B. 9%　　C. 11%　　D. $11\frac{1}{9}$%

2.某工厂去年 12 月的月厂值为 a，已知月平均增长率为 P，则今年 12 月厂值比去年同期增加的倍数是______。

A. $(1+P)^{12}-1$　　B. $(1+P)^{12}$　　C. $(1+P)^{11}$　　D. 12P

3.将一半径为 R 的木球加工成一正方形木块，则木块的最大体积为______。

A. $\frac{8}{27}\sqrt{3}R^3$　　B. $\frac{8}{9}\sqrt{3}R^3$　　C. $\frac{8}{9}R^3$　　D. $\frac{3}{8}\sqrt{3}R^3$

4.在北纬 45° 圈上有甲、乙两地，它们分别在东经 50° 与 140° 的圈上，设地球半径为 R，则甲、乙两地的球面距离为______。

A. $\frac{1}{2}\pi R$　　B. $\frac{1}{3}\pi R$　　C. $\frac{\pi}{4}R$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi R$

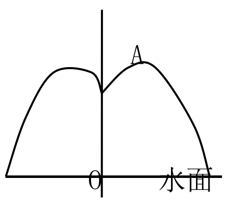
5.某种商品分两次提价，有三种提价方案，方案甲是：第一次提价 p%，第二次提价 q%；方案乙是：第一次提价 q%，第二次提价 p%；方案丙是：第一次提价 $\frac{p+q}{2}$%，第二次提价 $\frac{p+q}{2}$%，已知 p>q>0，则上述三个方案中______。

A.方案甲提价最多　　B.方案乙提价最多　　C.方案丙提价最多　　D.以上都不对

6.假设国家收购某种农产品的价格是 120 元/担，其中征税标准为每 100 元征 8 元（叫税率 8 个百分点，即 8%），计划可收购 m 万担。为了减轻农民负担，决定把税率降低 x 个百分点，预计收购量可增加 2x 个百分点。 ① 写出税收 y（万元）与 x 的函数关系式； ② 要使此项税收在税率调节后不低于原计划的 78%，试确定 x 的范围。

7.某单位用分期付款的方式为职工购买 40 套住房，共需 1150 万元。购买当天先付 150 万元，以后每月的这一天都交付 50 万元，并加付欠款利息，月利率为 1%。若交付 150 万元后的第一个月开始算分期付款的第一个月，问分期付款的第 10 个月应该付多少钱？全部货款付清后，买这 40 套住房实际花了多少钱？

8.公园要建造一个圆形的喷水池，在水池中央垂直于水面安装一个花形柱子 OA，O 恰在水面中心，OA＝1.25 米，安置



在柱子顶端A处的喷头向外喷水，水流在各个方向上沿形状相同的抛物线路径落下，且在过OA的任一平面上抛物线路径如图所示，为使水流形状较为漂亮，设计成水流在到OA的距离为1米处达到距水面最大高度2.25米，如果不计其他因素，那么水池的半径至少要多少米，才能使喷出的水流不致落到池外？（97年上海高考）

9.电灯挂在圆桌的正中央上空，光学定律指出：桌边A处的照度I与射到点A的光线与桌面的夹角θ的正弦成正比，与点A到光源的距离的平方成反比。已知桌面半径r＝0.5米，当电灯离桌面1米时，桌边A处的照度为I_0。 ① 试把照度I表示为角θ的函数； ② 怎样选择电灯悬挂的高度h，才能使桌边处最亮？

10.国际足联规定法国世界杯决赛阶段，比赛场地长105米、宽68米，足球门宽7.32米、高2.44米，试确定边锋最佳射门位置（边锋在足球场地长边上移动，最佳射门位置应使边锋看足球门的水平视角θ最大）。 （精确到1米）

二、探索性问题

近年来，随着社会主义经济建设的迅速发展，要求学校由“应试教育”向“素质教育”转化，培养全面发展的开拓型、创造型人才。在这种要求下，数学教学中开放型问题随之产生。于是，探索性问题成了近几年来高考命题中的热点问题，它既是高等学校选拔高素质人材的需要，也是中学数学教学培养学生具有创造能力、开拓能力的任务所要求的。实际上，学生在学习数学知识时，知识的形成过程也是观察、分析、归纳、类比、猜想、概括、推证的探索过程，其探索方法是学生应该学习和掌握的，是今后数学教育的重要方向。

一般地，对于虽给出了明确条件，但没有明确的结论，或者结论不稳定，需要探索者通过观察、分析、归纳出结论或判断结论的问题（探索结论）；或者虽给出了问题的明确结论，但条件不足或未知，需要解题者寻找充分条件并加以证明的问题（探索条件），称为探索性问题。此外，有些探索性问题也可以改变条件，探讨结论相应发生的变化；或者改变结论，探讨条件相应发生的变化；或者给出一些实际中的数据，通过分析、探讨解决问题。

探索性问题一般有以下几种类型：猜想归纳型、存在型问题、分类讨论型。

猜想归纳型问题是指在问题没有给出结论时，需要从特殊情况入手，进行猜想后证明其猜想的一般性结论。它的思路是：从所给的条件出发，通过观察、试验、不完全归纳、猜想，探讨出结论，然后再利用完全归纳理论和要求对结论进行证明。其主要体现是解答数列中等与n有关数学问题。

存在型问题是指结论不确定的问题，即在数学命题中，结论常以“是否存在”的形式出现，其结果可能存在，需要找出来，可能不存在，则需要说明理由。解答这一类问题时，我们可以先假设结论不存在，若推论无矛盾，则结论确定存在；若推证出矛盾，则结论不存在。代数、三角、几何中，都可以出现此种探讨“是否存在”类型的问题。

分类讨论型问题是指条件或者结论不确定时，把所有的情况进行分类讨论后，找出满足条件的条件或结论。此种题型常见于含有参数的问题，或者情况多种的问题。

探索性问题，是从高层次上考查学生创造性思维能力的新题型，正确运用数学思想方法是解决这类问题的桥梁和向导，通常需要综合运用归纳与猜想、函数与方程、数形结合、分类讨论、等价转化与非等价转化等数学思想方法才能得到解决，我们在学习中要重视对这一问题的训练，以提高我们的思维能力和开拓能力。

Ⅰ、再现性题组：

1. 是否存在常数 a、b、c，使得等式 $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)}{12}(an^2+bn+c)$ 对一切自然数 n 都成立？并证明你的结论。（89 年全国理）

2. 已知数列 $\frac{8\cdot 1}{1^2\cdot 3^2}$，$\frac{8\cdot 2}{3^2\cdot 5^2}$…，$\frac{8\cdot n}{(2n-1)^2\cdot (2n+1)^2}$，…。$S_n$ 为其前 n 项和，求 S_1、S_2、S_3、S_4，推测 S_n 公式，并用数学归纳法证明。（93 年全国理）

【简解】1 题：令 n＝1、2、3 代入已知等式列出方程组，解得 a＝3、b＝11、c＝10，猜测 a、b、c 的值对所有的 n∈N 都成立，再运用数学归纳法进行证明。（属于是否存在型问题，也可属于猜想归纳型问题）

2 题：计算得到 $S_1=\frac{8}{9}$、$S_2=\frac{24}{25}$、$S_3=\frac{48}{49}$、$S_4=\frac{80}{81}$，观察后猜测 $S_n=\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}$，再运用数学归纳法进行证明。

Ⅱ、示范性题组：

【例 1】已知方程 $kx^2+y^2=4$，其中 k 为实数，对于不同范围的 k 值，分别指出方程所代表图形的类型，并画出曲线简图。（78 年全国高考题）

【分析】由圆、椭圆、双曲线等方程的具体形式，结合方程 $kx^2+y^2=4$ 的特点，对参数 k 分 k>1、k＝1、0<k<1、k＝0、k<0 五种情况进行讨论。

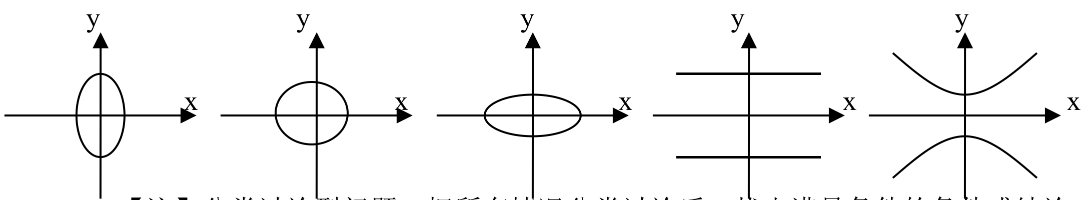
【解】由方程 $kx^2+y^2=4$，分 k>1、k＝1、0<k<1、k＝0、k<0 五种情况讨论如下：

① 当 k>1 时，表示椭圆，其中心在原点，焦点在 y 轴上，a＝2，$b=\frac{2}{\sqrt{k}}$；

② 当 k＝1 时，表示圆，圆心在原点，r＝2；

③ 当 0<k<1 时，表示椭圆，其中心在原点，焦点在 x 轴上，$a=\frac{2}{\sqrt{k}}$，b＝2；

④ 当 k＝0 时，表示两条平行直线 y＝±2；
⑤ 当 k<0 时，表示双曲线，中心在原点，焦点在 y 轴上。
所有五种情况的简图依次如下所示：



【注】分类讨论型问题，把所有情况分类讨论后，找出满足条件的条件或结论。

【例 2】给定双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$，① 过点 A(2,0) 的直线 L 与所给双曲线交于 P_1 及 P_2，求线段 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程；② 过点 B(1,1) 能否作直线 m，使 m 与所给双曲曲

线交于两点 Q_1、Q_2，且点 B 是线段 Q_1、Q_2 的中点？这样的直线 m 如果存在，求出它的方程；如果不存在，说明理由。（81 年全国高考题）

【分析】两问都可以设直线 L 的点斜式方程，与双曲线方程联立成方程组，其解就是直线与双曲线的交点坐标，再用韦达定理求解中点坐标等。

【解】① 设直线 L：$y=k(x-2)$

$\therefore \begin{cases} y=k(x-2) \\ x^2-\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 消 y 得 $(2-k^2)x^2+4k^2x-(2+4k^2)=0$

$\therefore\ x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-2}$ $\quad\therefore x_p=\dfrac{2k^2}{k^2-2}$ 代入直线 L 得：$y_p=\dfrac{4k}{k^2-2}$

$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{2k^2}{k^2-2} \\ y=\dfrac{4k}{k^2-2} \end{cases}$ 消 k 得 $2x^2-4x-y^2=0$ 即 $\dfrac{(x-1)^2}{\frac{1}{2}}-\dfrac{y^2}{2}=1$

线段 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程是：$\dfrac{(x-1)^2}{\frac{1}{2}}-\dfrac{y^2}{2}=1$

② 设所求直线 m 的方程为：$y=k(x-1)+1$

$\therefore \begin{cases} y=k(x-1)+1 \\ x^2-\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 消 y 得 $(2-k^2)x^2+(2k^2-2k)x+2k-k^2-3=0$

$\therefore\ x_1+x_2=\dfrac{2k^2-2k}{k^2-2}=2\times2$ $\quad\therefore k=2$

代入消 y 后的方程计算得到：$\triangle<0$， ∴满足题中条件的直线 m 不存在。

【注】本题综合性比较强，将解析几何知识进行了横向综合。对于直线与曲线的交点问题和有关交点弦长及其中点的问题，一般可以利用韦达定理和根的判别式求解。本题属于存在型问题，其一般解法是：假设结论不存在，若推论无矛盾，则结论确定存在；若推证出矛盾，则结论不存在。在解题思路中，分析法与反证法起了关键作用。这类问题一般是先列出条件组，通过等价转化解组。

【例 3】设 $\{a_n\}$ 是正数组成的数列，其前 n 项的和为 S_n，并且对于所有的自然数 n，a_n 与 2 的等差中项等于 S_n 与 2 的等比中项。 ① 写出数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项； ② 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式（写出推证过程）； ③ 令 $b_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ （n∈N），求 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n-n)$。(94 年全国高考题)

【分析】由题意容易得到$\frac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n}$，由此而求得$a_1$、$a_2$、$a_3$，通过观察猜想$a_n$，再用数学归纳法证明。求出$a_n$后，代入不难求出$b_n$，再按照要求求极限。

【解】① $\because \frac{a_1+2}{2}=\sqrt{2S_1}=\sqrt{2a_1}$　$\therefore a_1=2$

$\because \frac{a_2+2}{2}=\sqrt{2S_2}=\sqrt{2(a_1+a_2)}=\sqrt{2(2+a_2)}$　$\therefore a_2=6$

$\because \frac{a_3+2}{2}=\sqrt{2S_3}=\sqrt{2(a_1+a_2+a_3)}=\sqrt{2(8+a_3)}$　$\therefore a_3=10$

所以数列$\{a_n\}$的前 3 项依次为 2、6、10。

② 由数列$\{a_n\}$的前 3 项依次为 2、6、10 猜想$a_n=4n-2$，

下面用数学归纳法证明$a_n=4n-2$：

当 n＝1 时，通项公式是成立的；

假设当 n＝k 时结论成立，即有$a_k=4k-2$，

由题意有$\frac{a_k+2}{2}=\sqrt{2S_k}$，将$a_k=4k-2$代入得到：$S_k=2k^2$；

当 n＝k＋1 时，由题意有$\frac{a_{k+1}+2}{2}=\sqrt{2S_{k+1}}=\sqrt{2(S_k+a_{k+1})}$

$\therefore$　$\left(\frac{a_{k+1}+2}{2}\right)^2=2(a_{k+1}+2k^2)$　即$a_{k+1}^2-4a_{k+1}+4-16k^2=0$

由$a_{k+1}>0$，解得$a_{k+1}=2+4k=4(k+1)-2$，

所以 n＝k＋1 时，结论也成立。

综上所述，上述结论对所有的自然数 n 都成立。

③ 设$c_n=b_n-1=\frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)-1=\frac{1}{2}\left(\frac{4n+2}{4n-2}+\frac{4n-2}{4n+2}-2\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)+\left(\frac{2n-1}{2n+1}-1\right)\right]=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$

$b_1+b_2+\cdots+b_n-n=c_1+c_2+\cdots+c_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{2n+1}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$

【注】本题求数列的通项公式，属于猜想归纳型问题，其一般思路是：从最简单、最特殊的情况出发，推测出结论，再进行严格证明。第③问对极限的求解，使用了“裂项相消法”，设立新的数列c_n具有一定的技巧性。

此外，本题第②问数列通项公式的求解，属于给出数列中 S_n 与 a_n 的函数关系式求 a_n，对此类问题我们还可以直接求解，解答思路是由 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 的关系转化为数列通项之间的递推关系，再发现数列的特征或者通过构造新的数列求解。具体的解答过程是：

由题意有 $\frac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n}$，整理得到 $S_n=\frac{1}{8}(a_n+2)^2$，所以 $S_{n+1}=\frac{1}{8}(a_{n+1}+2)^2$，

$\therefore\ a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{1}{8}[(a_{n+1}+2)^2-(a_n+2)^2]$

整理得到 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-4)=0$

由题意 $a_n>0$ 可以得到：$a_{n+1}-a_n-4=0$，即 $a_{n+1}-a_n=4$

∴数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，其中 $a_1=2$，公差 $d=4$，即通项公式为 $a_n=4n-2$。

【例 4】已知 $x_1>0$，$x_1\neq1$，且 $x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}$ $(n\in N)$，比较 x_n 与 x_{n+1} 的大小。(86 年全国理)

【分析】比较 x_n 与 x_{n+1} 的大小，采用“作差法”，判别差式的符号式，分情况讨论。

【解】$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}-x_n=\frac{2x_n(1-x_n^2)}{3x_n^2+1}$

由 $x_1>0$ 及数列 $\{x_n\}$ 的定义可知，$x_n>0$，所以 $x_{n+1}-x_n$ 与 $1-x_n^2$ 的符号相同。

假定 $x_1<1$，当 $n=1$ 时，$1-x_1^2>0$；假设 $n=k$ 时 $1-x_k^2>0$，那么当 $n=k+1$ 时，

$1-x_{k+1}^2=1-[\frac{x_k(x_k^2+3)}{3x_k^2+1}]^2=\frac{(1-x_k^2)^3}{(3x_k^2+1)^2}>0$，因此对一切自然数 n 都有 $1-x_n^2>0$，即 $x_n<x_{n+1}$。

假定 $x_1>1$，当 $n=1$ 时，$1-x_1^2<0$；假设 $n=k$ 时 $1-x_k^2<0$，那么当 $n=k+1$ 时，

$1-x_{k+1}^2=1-[\frac{x_k(x_k^2+3)}{3x_k^2+1}]^2=\frac{(1-x_k^2)^3}{(3x_k^2+1)^2}<0$，因此对一切自然数 n 都有 $1-x_n^2<0$，即 $x_n<x_{n+1}$。

所以，对一切自然数 n 都有 $x_n<x_{n+1}$。

【注】本题对 $1-x_n^2$ 的符号的探讨，由于其与自然数 n 有关，考虑使用数学归纳法解决。一般地，探索性问题与自然数 n 有关时，我们可以用归纳→猜想→证明的方法解出。

Ⅲ、巩固性题组：

1. 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列，S_n 是前 n 项和。 ①. 证明：$\frac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$；　②. 是否存在常数 c>0，使得 $\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}<\lg(S_{n+1}-c)$ 成立？并证明你的结论。(95 年全国理)

2. 已知数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，$b_1=1$，$b_1+b_2+\cdots+b_{10}=100$。

①. 求数列 $\{b_n\}$ 的通项；　②. 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\lg(1+\frac{1}{b_n})$，记 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，试比较 S_n 与 $\frac{1}{2}\lg b_{n+1}$ 的大小，并证明你的结论。（98 年全国高考题）

3. 是否存在 a、b、c，使得 $a_n=an^2+bn+c$，且满足 $a_1=1$，$3S_n=(n+2)a_n$，对一切自然数 n 都成立（其中 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$）？试证明你的结论。

4. 已知 $P_n=(1+x)^n$，$Q_n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$，$n\in N$，$x\in(-1,+\infty)$，比较 P_n 和 Q_n 的大小。

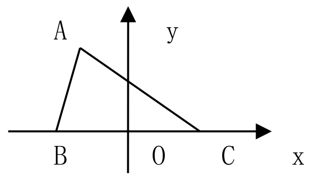
5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_1=a$　(a>0)，$a_n=\frac{2a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$　($n\geq2$，$n\in N$)。

① 用 a 表示 a_2、a_3、a_4；　② 猜想 a_n 的表达式，并证明你的结论。

6. 在△ABC 中，∠A、∠B、∠C 的对边分别是 a、b、c，且 b、a、c 成等差数列，b≥c。已知 B(-1,0)、C(1,0)。

① 求顶点 A 的轨迹 L；

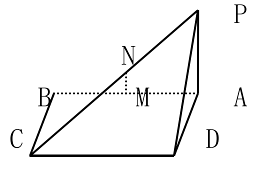
② 是否存在直线 m，使 m 过点 B 并与曲线 L 交于不同的两点 P、Q 且|PQ|恰好等于原点 O 到直线 m 距离的倒数？若存在，求出 m 的方程；若不存在，说明理由。



7. 如图，已知矩形 ABCD，PA⊥平面 ABCD，M、N 分别是 AB、PC 的中点。

① 求证：MN⊥AB；

② 若平面 PDC 与平面 ABCD 所成的二面角为 θ，能否确定 θ，使得直线 MN 是异面直线 AB 与 PC 的公垂线？若能确定，求出 θ 的值；若不能确定，说明理由。



三、选择题解答策略

近几年来高考数学试题中选择题稳定在 14～15 道题，分值 65 分，占总分的 43.3%。高考选择题注重多个知识点的小型综合，渗透各种数学思想和方法，体现基础知识求深度的考基础考能力的导向;使作为中低档题的选择题成为具备较佳区分度的基本题型。因此能否在选择题上获取高分，对高考数学成绩影响重大。解答选择题的基本策略是准确、迅速。

准确是解答选择题的先决条件。选择题不设中间分，一步失误，造成错选，全题无分。所以应仔细审题、深入分析、正确推演、谨防疏漏；初选后认真检验，确保准确。

迅速是赢得时间获取高分的必要条件。高考中考生不适应能力型的考试，致使“超时失分”是造成低分的一大因素。对于选择题的答题时间，应该控制在不超过 50 分钟左右，速度越快越好，高考要求每道选择题在 1～3 分钟内解完。

选择题主要考查基础知识的理解、基本技能的熟练、基本计算的准确、基本方法的运用、考虑问题的严谨、解题速度的快捷等方面，是否达到《考试说明》中的“了解、理解、掌握”三个层次的要求。历年高考的选择题都采用的是“四选一”型，即选择项中只有一个是正确的。它包括两个部分：题干，由一个不完整的陈述句或疑问句构成；备选答案，通常由四个选项 A、B、C、D 组成。

选择题的特殊结构决定了它具有相应的特殊作用与特点：由于选择题不需写出运算、推理等解答过程，在试卷上配有选择题时，可以增加试卷容量，扩大考查知识的覆盖面；阅卷简捷，评分客观，在一定程度上提高了试卷的效度与信度；侧重于考查学生是否能迅速选出正确答案，解题手段不拘常规，有利于考查学生的选择、判断能力；选择支中往往包括学生常犯的概念错误或运算、推理错误，所有具有较大的“迷惑性”。

一般地，解答选择题的策略是：① 熟练掌握各种基本题型的一般解法。② 结合高考单项选择题的结构（由“四选一”的指令、题干和选择项所构成）和不要求书写解题过程的特点，灵活运用特例法、筛选法、图解法等选择题的常用解法与技巧。③ 挖掘题目“个性”，寻求简便解法，充分利用选择支的暗示作用，迅速地作出正确的选择。

Ⅰ、示范性题组：

一、 直接法：

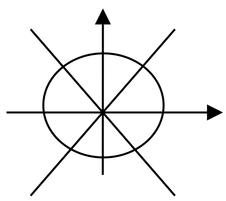
直接从题设条件出发，运用有关概念、性质、定理、法则等知识，通过推理运算，得出结论，再对照选择项，从中选正确答案的方法叫直接法。

【例 1】（96 年高考题）若 $\sin^2 x>\cos^2 x$，则 x 的取值范围是______。

A. $\{x|2k\pi-\frac{3\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{\pi}{4}, k\in Z\}$　　B. $\{x|2k\pi+\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{5\pi}{4}, k\in Z\}$

C. $\{x|k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4}, k\in Z\}$　　D. $\{x|k\pi+\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{3\pi}{4}, k\in Z\}$

【解】直接解三角不等式：由 $\sin^2 x>\cos^2 x$ 得 $\cos^2 x-\sin^2 x<0$，即 $\cos 2x<0$，所以：$\frac{\pi}{2}+2k\pi<2x<\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，选 D；



【另解】数形结合法：由已知得 $|\sin x|>|\cos x|$，画出单位圆：

利用三角函数线，可知选 D。

【例 2】（96 年高考题）设 f(x)是(－∞，∞)是的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)=x$，则 f(7.5)等于______。

A. 0.5　　B. －0.5　　C. 1.5　　D. －1.5

【解】由 $f(x+2)=-f(x)$ 得 $f(7.5)=-f(5.5)=f(3.5)=-f(1.5)=f(-0.5)$，由 f(x)是奇函数得 $f(-0.5)=-f(0.5)=-0.5$，所以选 B。

也可由 $f(x+2)=-f(x)$，得到周期 T＝4，所以 $f(7.5)=f(-0.5)=-f(0.5)=-0.5$。

【例 3】（87 年高考题）七人并排站成一行，如果甲、乙两人必需不相邻，那么不同的排法的种数是_____。

A. 1440　　B. 3600　　C. 4320　　D. 4800

【解一】用排除法：七人并排站成一行，总的排法有 P_7^7 种，其中甲、乙两人相邻的排法有 $2\times P_6^6$ 种。因此，甲、乙两人必需不相邻的排法种数有：$P_7^7-2\times P_6^6=3600$，对照后应选 B；

【解二】用插空法：$P_5^5\times P_6^2=3600$。

直接法是解答选择题最常用的基本方法，低档选择题可用此法迅速求解。直接法适用的范围很广，只要运算正确必能得出正确的答案。提高直接法解选择题的能力，准确地把握中档题目的“个性”，用简便方法巧解选择题，是建在扎实掌握“三基”的基础上，否则一味求快则会快中出错。

二、 特例法：

用特殊值(特殊图形、特殊位置)代替题设普遍条件，得出特殊结论，对各个选项进行检验，从而作出正确判断的方法叫特例法。常用的特例有特殊数值、特殊数列、特殊函数、特殊图形、特殊角、特殊位置等。

【例 4】(97 年高考题)定义在区间$(-\infty，\infty)$的奇函数 $f(x)$ 为增函数，偶函数 $g(x)$ 在区间$[0,+\infty)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象重合，设 $a>b>0$，给出下列不等式①$f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$；②$f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$；③$f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$；④$f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$. 其中成立的是（　　）

A. ①与④　　B. ②与③　　C. ①与③　　D. ②与④

【解】令 $f(x)=x$，$g(x)=|x|$，$a=2$，$b=1$，则：$f(b)-f(-a)=1-(-2)=3$，$g(a)-g(-b)=2-1=1$，得到①式正确；$f(a)-f(-b)=2-(-1)=3$，$g(b)-g(-a)=1-2=-1$，得到③式正确。所以选 C。

【另解】直接法：$f(b)-f(-a)=f(b)+f(a)$，$g(a)-g(-b)=g(a)-g(b)=f(a)-f(b)$，从而①式正确；$f(a)-f(-b)=f(a)+f(b)$，$g(b)-g(-a)=g(b)-g(a)=f(b)-f(a)$，从而③式正确。所以选 C。

【例 5】（85 年高考题）如果 n 是正偶数，则 $C_n^0+C_n^2+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^n=$______。

A. 2^n　　B. 2^{n-1}　　C. 2^{n-2}　　D. $(n-1)2^{n-1}$

【解】用特值法：当 $n=2$ 时，代入得 $C_2^0+C_2^2=2$，排除答案 A、C；当 $n=4$ 时，代入得 $C_4^0+C_4^2+C_4^4=8$，排除答案 D。所以选 B。

【另解】直接法：由二项展开式系数的性质有 $C_n^0+C_n^2+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^n=2^{n-1}$，选 B。

当正确的选择对象，在题设普遍条件下都成立的情况下，用特殊值（取得愈简单愈好）进行探求，从而清晰、快捷地得到正确的答案，即通过对特殊情况的研究来判断一般规律，是解答本类选择题的最佳策略。近几年高考选择题中可用或结合特例法解答的约占 30%左右。

三、 筛选法：

从题设条件出发，运用定理、性质、公式推演，根据“四选一”的指令，逐步剔除干扰项，从而得出正确判断的方法叫筛选法或剔除法。

【例 6】（95 年高考题）已知 $y=\log_a(2-ax)$ 在$[0,1]$上是 x 的减函数，则 a 的取值范

围是_____。

A. [0,1]　　B. (1,2]　　C. (0,2)　　D. [2,+∞)

【解】∵ 2－ax 是在[0,1]上是减函数，所以 a>1，排除答案 A、C；若 a＝2，由 2－ax>0 得 x<1，这与[0,1]不符合，排除答案 C。所以选 B。

【例 7】（88 年高考题）过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，作直线与此抛物线相交于两点 P 和 Q，那么线段 PQ 中点的轨迹方程是______。

A. $y^2=2x-1$　　B. $y^2=2x-2$　　C. $y^2=-2x+1$　　D. $y^2=-2x+2$

【解】筛选法：由已知可知轨迹曲线的顶点为(1,0)，开口向右，由此排除答案 A、C、D，所以选 B；

【另解】直接法：设过焦点的直线 y＝k(x－1)，则 $\begin{cases} y=kx-1 \\ y^2=4x \end{cases}$，消 y 得：

$k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0$，中点坐标有 $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{k^2+2}{k^2} \\ y=k(\dfrac{k^2+2}{k^2}-1)=\dfrac{2}{k} \end{cases}$，消 k 得 $y^2=2x-2$，选 B。

筛选法适应于定性型或不易直接求解的选择题。当题目中的条件多于一个时，先根据某些条件在选择支中找出明显与之矛盾的，予以否定，再根据另一些条件在缩小的选择支的范围那找出矛盾，这样逐步筛选，直到得出正确的选择。它与特例法、图解法等结合使用是解选择题的常用方法，近几年高考选择题中约占 40%。

四、 代入法：

将各个选择项逐一代入题设进行检验，从而获得正确判断的方法叫代入法，又称为验证法，即将各选择支分别作为条件，去验证命题，能使命题成立的选择支就是应选的答案。

【例 8】（97 年高考题）函数 $y=\sin(\dfrac{\pi}{3}-2x)+\sin 2x$ 的最小正周期是_____。

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

【解】代入法：$f(x+\dfrac{\pi}{2})=\sin[\dfrac{\pi}{3}-2(x+\dfrac{\pi}{2})]+\sin[2(x+\dfrac{\pi}{2})]=-f(x)$，而

$f(x+\pi)=\sin[\dfrac{\pi}{3}-2(x+\pi)]+\sin[2(x+\pi)]=f(x)$。所以应选 B；

【另解】直接法：$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x+\sin 2x=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$，$T=\pi$，选 B。

【例 9】（96 年高考题）母线长为 1 的圆锥体积最大时，其侧面展开图的圆心角 φ 等于_____。

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　　C. $\sqrt{2}\pi$　　D. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

【解】代入法：四个选项依次代入求得 r 分别为：$\frac{\sqrt{2}}{3}$、$\frac{\sqrt{3}}{3}$、$\frac{\sqrt{2}}{2}$、$\frac{\sqrt{6}}{3}$，再求得 h 分别为：$\frac{\sqrt{7}}{3}$、$\frac{\sqrt{6}}{3}$、$\frac{\sqrt{2}}{2}$、$\frac{\sqrt{3}}{3}$，最后计算体积取最大者，选 D。

【另解】直接法：设底面半径 r，则 $V=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{1-r^2}=\frac{2}{3}\pi\frac{r}{\sqrt{2}}\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{1-r^2}\leqslant\cdots$

其中 $\frac{r}{\sqrt{2}}=\sqrt{1-r^2}$，得到 $r=\sqrt{\frac{2}{3}}$，所以 $\varphi=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}/1=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$，选 D。

代入法适应于题设复杂，结论简单的选择题。若能据题意确定代入顺序，则能较大提高解题速度。

五、 图解法：

据题设条件作出所研究问题的曲线或有关图形，借助几何图形的直观性作出正确判断的方法叫图解法或数形结合法。

【例 10】（97 年高考题）椭图 C 与椭圆 $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ 关于直线 x＋y＝0 对称，椭圆 C 的方程是_____。

A. $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$　　B. $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$

C. $\frac{(x+2)}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$　　D. $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

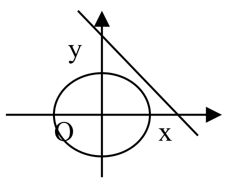
【解】图解法：作出椭圆及对称的椭圆 C，由中心及焦点位置，容易得到选 A。

【另解】直接法：设椭圆 C 上动点(x, y)，则对称点(－y，－x)，代入已知椭圆方程得 $\frac{(-y-3)^2}{9}+\frac{(-x-2)^2}{4}=1$，整理即得所求曲线 C 方程，所以选 A。

【例 11】（87 年高考题）在圆 $x^2+y^2=4$ 上与直线 4x＋3y－12=0 距离最小的点的坐标是_____。

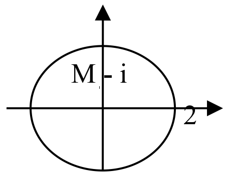
A. $(\frac{8}{5},\frac{6}{5})$　　B. $(\frac{8}{5},-\frac{6}{5})$　　C. $(-\frac{8}{5},\frac{6}{5})$　　D. $(-\frac{8}{5},-\frac{6}{5})$

【解】图解法：在同一直角坐标系中作出圆 $x^2+y^2=4$ 和直线 4x＋3y－12=0 后，由图可知距离最小的点在第一象限内，所以选 A。



【直接法】先求得过原点的垂线，再与已知直线相交而得。

【例 12】已知复数 z 的模为 2，则 $|z-i|$ 的最大值为_______。



A. 1　　　B. 2　　　C. $\sqrt{5}$　　　D. 3

【解】图解法：由复数模的几何意义，画出右图，可知当圆上的点到 M 的距离最大时即为 $|z-i|$ 最大。所以选 D；

【另解】不等式法或代数法或三角法：

$|z-i|\leqslant|z|+|i|=3$，所以选 D。

数形结合，借助几何图形的直观性，迅速作正确的判断是高考考查的重点之一；97 年高考选择题直接与图形有关或可以用数形结合思想求解的题目约占 50%左右。

从考试的角度来看，解选择题只要选对就行，不管是什么方法，甚至可以猜测。但平时做题时要尽量弄清每一个选择支正确理由与错误的原因，这样，才会在高考时充分利用题目自身的提供的信息，化常规为特殊，避免小题作，真正做到熟练、准确、快速、顺利完成三个层次的目标任务。

Ⅱ、巩固性题组：

1.（86 年高考题）函数 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x}+1$ 的反函数是______。

A. $y=\log_5 x+1$　（x>0）　　　B. $y=\log_x 5+1$　（x>0 且 $x\neq1$）

C. $y=\log_5(x-1)$　（x>1）　　　D. $y=\log_5 x-1$　（x>1）

2.（90 年高考题）已知 $f(x)=x^3+ax+bx-8$，且 $f(-2)=10$，那么 $f(2)$ 等于_____。

A. -26　　B. -18　　C. -10　　D. 10

3. 一个凸多边形的最小内角为 $\frac{2\pi}{3}$，各内角成等差数列，公差为 $\frac{\pi}{36}$，则此多边形的边数为_____。

A. 9　　B. 16　　C. 9 或 16　　D. 16 或 25

4. 设 a、b、c 为实数，且 $\cos 2x=a\cos^2 x+b\cos x+c$ 恒成立，则 $a^2+b^2+c^2=$______。

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

5. 若 a、b 是任意实数，且 a>b，则______。

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{b}{a}<1$　　C. $\lg(a-b)>0$　　D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$

6. 如果方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上椭圆，那么实数 k 的取值范围是_____。

A. $(0,+\infty)$　　B. $(0,2)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(0,1)$

7. 中心在原点，准线方程为 $x=\pm4$，离心率为 $\frac{1}{2}$ 的椭圆方程是______。

A. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$　　C. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$　　D. $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

8. 已知正三棱台上、下底面边长分别为 2 和 4，高为 $2\sqrt{3}$，它被中截面截得的较大部分体积是_____。

A. $\frac{37}{2}$　　B. $\frac{111}{4}$　　C. $\frac{19}{4}$　　D. $\frac{37}{4}$

9.若 $\alpha=\arg(2+i)$，$\beta=\arg(-3+i)$，则 $\beta-\alpha$ 等于______。

A. $\frac{5\pi}{4}$　　B. $\frac{3\pi}{4}$　　C. $-\frac{\pi}{4}$　　D. $-\frac{3\pi}{4}$

10. (95 年高考题)等差数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 前 n 项和分别是 S_n 和 T_n，若 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 等于______。

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{4}{9}$

四、填空题解答策略

填空题是一种传统的题型，也是高考试卷中又一常见题型。近几年高考，都有一定数量的填空题，且稳定了 4 个小题左右，每题 4 分，共 16 分，越占全卷总分的 11%。

填空题又叫填充题，是将一个数学真命题，写成其中缺少一些语句的不完整形式，要求学生在指定的空位上，将缺少的语句填写清楚、准确。它是一个不完整的陈述句形式，填写的可以是一个词语、数字、符号、数学语句等。

根据填空时所填写的内容形式，可以将填空题分成两种类型：

一是定量型，要求学生填写数值、数集或数量关系，如：方程的解、不等式的解集、函数的定义域、值域、最大值或最小值、线段长度、角度大小等等。由于填空题和选择题相比，缺少选择支的信息，所以高考题中多数是以定量型问题出现。

二是定性型，要求填写的是具有某种性质的对象或者填写给定的数学对象的某种性质，如：给定二次曲线的准线方程、焦点坐标、离心率等等。

填空题不要求学生书写推理或者演算的过程，只要求直接填写结果，它和选择题一样，能够在短时间内作答，因而可加大高考试卷卷面的知识容量，同时也可以考查学生对数学概念的理解、数量问题的计算解决能力和推理论证能力。在解答填空题时，基本要求就是：正确、迅速、合理、简捷。一般来讲，每道题都应力争在 1～3 分钟内完成。填空题只要求填写结果，每道题填对了得满分，填错了得零分，所以，考生在填空题上失分一般比选择题和解答题严重。我们很有必要探讨填空题的解答策略和方法。

Ⅰ、示范性题组：

一、直接推演法：

直接法就是根据数学概念，或者运用数学的定义、定理、法则、公式等，从已知条件出发，进行推理或者计算得出结果后，将所得结论填入空位处，它是解填空题最基本、最常用的方法。

【例 1】(94 年高考题）已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，$\theta\in(0,\pi)$，则 $\operatorname{ctg}\theta$ 的值是______。

【解】已知等式两边平方得 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$，解方程组得 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\frac{3}{5}$，故答案为：$-\frac{3}{4}$。

【另解】设 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=t$，再利用万能公式求解。

【例 2】（95 年高考题）方程 $\log_2(x+1)^2+\log_4(x+1)=5$ 的解是________。

【解】由换底公式得 $4\log_4(x+1)+\log_4(x+1)=5$，即 $\log_4(x+1)=1$，解得 $x=3$。

二、特值代入法：

当填空题已知条件中含有某些不确定的量，但题目暗示答案可能是一个定值时，可以将变量取一些特殊数值、特殊位置、或者一种特殊情况来求出这个定值，这样，简化了推理、论证的过程。

【例 3】（89 年高考题）已知 $(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$，那么 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$________。

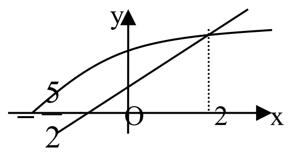
【解】令 $x=1$，则有 $(-1)^7=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7=-1$；令 $x=0$，则有 $a_0=1$。所以 $a_1+a_2+\cdots+a_7=-1-1=-2$。

【例 4】（90 年高考题）在三棱柱 ABC—A'B'C'中，若 E、F 分别为 AB、AC 的中点，平面 EB'C'F 将三棱柱分成体积为 V_1、V_2 的两部分，那么 $V_1:V_2=$________。

【解】由题意分析，结论与三棱柱的具体形状无关，因此，可取一个特殊的直三棱柱，其底面积为 4，高为 1，则体积 $V=4$，而 $V_1=\frac{1}{3}(1+\sqrt{4}+4)=\frac{7}{3}$，$V_2=V-V_1=\frac{5}{3}$，则 $V_1:V_2=7:5$。

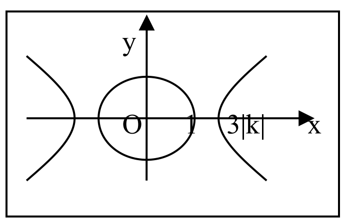
三、图解法：

一些计算过程复杂的代数、三角、解析几何问题，可以作出有关函数的图像或者构造适当的几何图形，利用图示辅助进行直观分析，从而得出结论。这也就是数形结合的解题方法。



【例 5】不等式 $\sqrt{2x+5}>x+1$ 的解集是_______。

【解】如图，在同一坐标系中画出函数 $y=\sqrt{2x+5}$ 与 $y=x+1$ 的图像，由图中可以直观地得到：$-\frac{5}{2}\leqslant x<2$，所以所求解集是 $[-\frac{5}{2},2)$。



【例 6】（93 年高考题）若双曲线 $\frac{x^2}{9k^2}-\frac{y^2}{4k^2}=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 没有公共点，则实数 k 的取值范围是_________。

【解】在同一坐标系中作出双曲线 $\frac{x^2}{9k^2}-\frac{y^2}{4k^2}=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$，由双曲线的顶点位置的坐标，可以得到 $|3k|>1$，故求得实数 k 的取值范围

是 $k>\frac{1}{3}$ 或 $k<-\frac{1}{3}$。