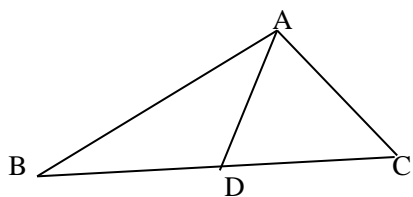


1. 已知: $AB=4$, $AC=2$, D 是 BC 中点, AD 是整数, 求 AD



解: 延长 AD 到 E , 使 $AD=DE$

$\because D$ 是 BC 中点

$\therefore BD=DC$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BDE$ 中

$AD=DE$

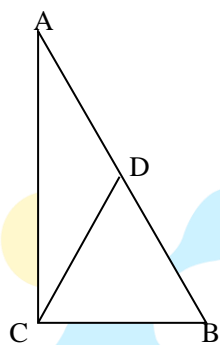
$\angle BDE = \angle ADC$ $BD=DC$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BDE$ $\therefore AC=BE=2$

\because 在 $\triangle ABE$ 中 $AB-BE < AE < AB+BE$

$\because AB=4$ 即 $4-2 < 2AD < 4+2$ $1 < AD < 3$ $\therefore AD=2$

2. 已知: D 是 AB 中点, $\angle ACB=90^\circ$, 求证: $CD = \frac{1}{2} AB$



延长 CD 与 P , 使 D 为 CP 中点。连接 AP, BP

$\because DP=DC, DA=DB$

$\therefore ACBP$ 为平行四边形

又 $\angle ACB=90$

\therefore 平行四边形 $ACBP$ 为矩形

$\therefore AB=CP=1/2 AB$

3. 已知: $BC=DE$, $\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle D$, F 是 CD 中点, 求证: $\angle 1=\angle 2$

证明: 连接 BF 和 EF

$\because BC=ED, CF=DF, \angle BCF=\angle EDF$

\therefore 三角形 BCF 全等于三角形 EDF (边角边)

$\therefore BF=EF, \angle CBF=\angle DEF$

连接 BE

在三角形 BEF 中, $BF=EF$

$\therefore \angle EBF=\angle BEF$ 。

$\because \angle ABC=\angle AED$ 。

$\therefore \angle ABE=\angle AEB$ 。

$\therefore AB=AE$ 。

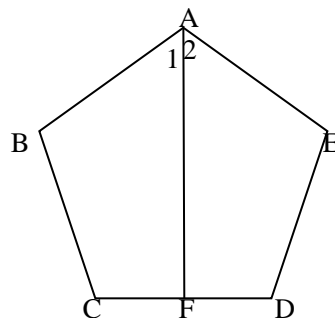
在三角形 ABF 和三角形 AEF 中

$AB=AE, BF=EF,$

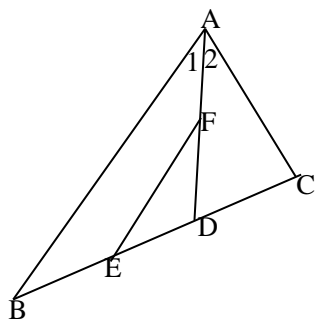
$\angle ABF=\angle ABE+\angle EBF=\angle AEB+\angle BEF=\angle AEF$

\therefore 三角形 ABF 和三角形 AEF 全等。

$\therefore \angle BAF=\angle EAF$ ($\angle 1=\angle 2$)。



4. 已知: $\angle 1=\angle 2$, $CD=DE$, $EF \parallel AB$, 求证: $EF=AC$



过 C 作 $CG \parallel EF$ 交 AD 的延长线于点 G

$CG \parallel EF$, 可得, $\angle EFD = \angle CGD$

$DE = DC$

$\angle FDE = \angle GDC$ (对顶角)

$\therefore \triangle EFD \cong \triangle CGD$

$EF = CG$

$\angle CGD = \angle EFD$

又, $EF \parallel AB$

$\therefore \angle EFD = \angle 1$

$\angle 1 = \angle 2$

$\therefore \angle CGD = \angle 2$

$\therefore \triangle AGC$ 为等腰三角形,

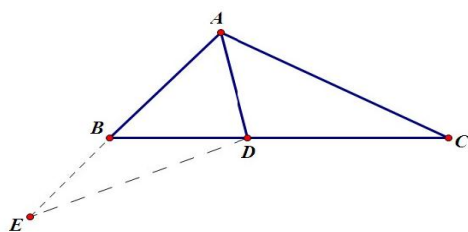
$AC = CG$

又 $EF = CG$

$\therefore EF = AC$

家长训练营

5. 已知: AD 平分 $\angle BAC$, $AC = AB + BD$, 求证: $\angle B = 2\angle C$



证明: 延长 AB 取点 E, 使 $AE = AC$, 连接 DE

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$

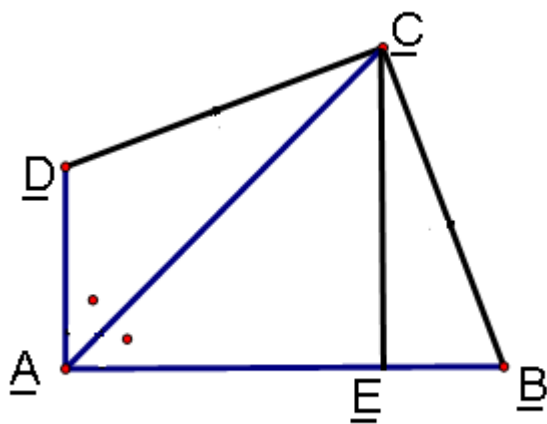
$\therefore \angle EAD = \angle CAD$

$\because AE = AC, AD = AD$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle ACD$ (SAS)

$\therefore \angle E = \angle C$
 $\because AC = AB + BD$
 $\therefore AE = AB + BD$
 $\because AE = AB + BE$
 $\therefore BD = BE$
 $\therefore \angle BDE = \angle E$
 $\because \angle ABC = \angle E + \angle BDE$
 $\therefore \angle ABC = 2\angle E$
 $\therefore \angle ABC = 2\angle C$

6. 已知：AC 平分 $\angle BAD$ ， $CE \perp AB$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ，求证： $AE = AD + BE$

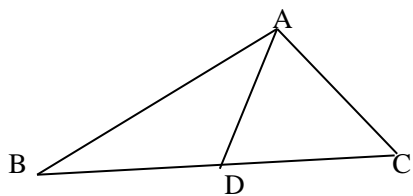


证明：

在 AE 上取 F，使 $EF = EB$ ，连接 CF

$\because CE \perp AB$
 $\therefore \angle CEB = \angle CEF = 90^\circ$
 $\because EB = EF, CE = CE,$
 $\therefore \triangle CEB \cong \triangle CEF$
 $\therefore \angle B = \angle CFE$
 $\because \angle B + \angle D = 180^\circ, \angle CFE + \angle CFA = 180^\circ$
 $\therefore \angle D = \angle CFA$
 $\because AC \text{ 平分 } \angle BAD$
 $\therefore \angle DAC = \angle FAC$
 $\because AC = AC$
 $\therefore \triangle ADC \cong \triangle AFC \text{ (SAS)}$
 $\therefore AD = AF$
 $\therefore AE = AF + FE = AD + BE$

7. 已知： $AB=4, AC=2$ ，D 是 BC 中点，AD 是整数，求 AD



解：延长 AD 到 E,使 $AD=DE$

$\because D$ 是 BC 中点

$\therefore BD=DC$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BDE$ 中

$AD=DE$

$\angle BDE = \angle ADC$

$BD=DC$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BDE$

$\therefore AC=BE=2$

\because 在 $\triangle ABE$ 中

$AB-BE < AE < AB+BE$

$\because AB=4$

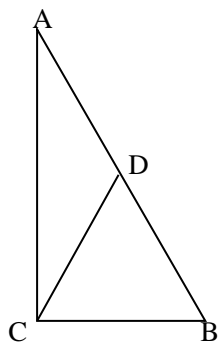
即 $4-2 < 2AD < 4+2$

$1 < AD < 3$

$\therefore AD=2$



8. 已知：D 是 AB 中点， $\angle ACB=90^\circ$ ，求证： $CD = \frac{1}{2} AB$



解：延长 AD 到 E,使 $AD=DE$

$\because D$ 是 BC 中点

$\therefore BD=DC$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BDE$ 中

$AD=DE$

$$\angle BDE = \angle ADC$$

$$BD = DC$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BDE$$

$$\therefore AC = BE = 2$$

\therefore 在 $\triangle ABE$ 中

$$AB - BE < AE < AB + BE$$

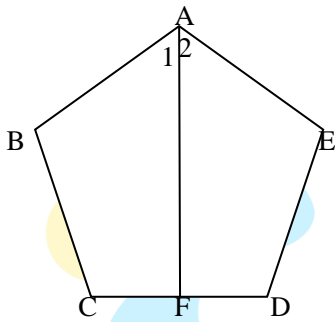
$$\therefore AB = 4$$

$$\text{即 } 4 - 2 < 2AD < 4 + 2$$

$$1 < AD < 3$$

$$\therefore AD = 2$$

9. 已知: $BC = DE$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle D$, F 是 CD 中点, 求证: $\angle 1 = \angle 2$



证明: 连接 BF 和 EF 。

$$\therefore BC = ED, CF = DF, \angle BCF = \angle EDF.$$

\therefore 三角形 BCF 全等于三角形 EDF (边角边)。

$$\therefore BF = EF, \angle CBF = \angle DEF.$$

连接 BE 。

在三角形 BEF 中, $BF = EF$ 。

$$\therefore \angle EBF = \angle BEF.$$

$$\text{又 } \therefore \angle ABC = \angle AED.$$

$$\therefore \angle ABE = \angle AEB.$$

$$\therefore AB = AE.$$

在三角形 ABF 和三角形 AEF 中,

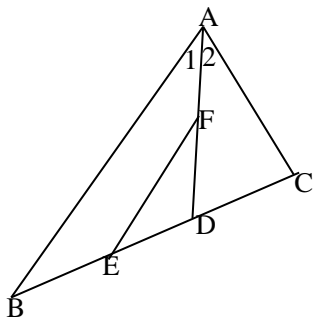
$$AB = AE, BF = EF,$$

$$\angle ABF = \angle ABE + \angle EBF = \angle AEB + \angle BEF = \angle AEF.$$

\therefore 三角形 ABF 和三角形 AEF 全等。

$$\therefore \angle BAF = \angle EAF (\angle 1 = \angle 2).$$

10. 已知: $\angle 1 = \angle 2$, $CD = DE$, $EF \parallel AB$, 求证: $EF = AC$



过 C 作 $CG \parallel EF$ 交 AD 的延长线于点 G

$CG \parallel EF$, 可得, $\angle EFD = \angle CGD$

$DE = DC$

$\angle FDE = \angle GDC$ (对顶角)

$\therefore \triangle EFD \cong \triangle CGD$

$EF = CG$

$\angle CGD = \angle EFD$

又 $EF \parallel AB$

$\therefore \angle EFD = \angle 1$

$\angle 1 = \angle 2$

$\therefore \angle CGD = \angle 2$

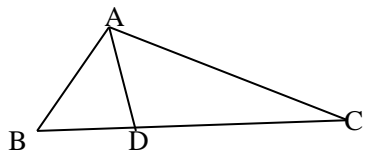
$\therefore \triangle AGC$ 为等腰三角形,

$AC = CG$

又 $EF = CG$

$\therefore EF = AC$

11. 已知: AD 平分 $\angle BAC$, $AC = AB + BD$, 求证: $\angle B = 2\angle C$



证明: 延长 AB 取点 E, 使 $AE = AC$, 连接 DE

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$

$\therefore \angle EAD = \angle CAD$

$\because AE = AC, AD = AD$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle ACD$ (SAS)

$\therefore \angle E = \angle C$

$\because AC = AB + BD$

$\therefore AE = AB + BD$

$\because AE = AB + BE$

$\therefore BD = BE$

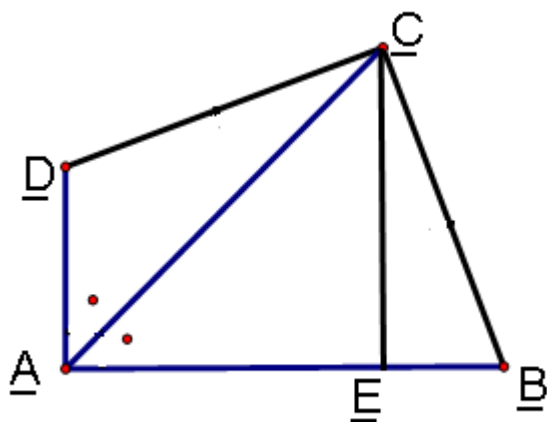
$\therefore \angle BDE = \angle E$

$$\because \angle ABC = \angle E + \angle BDE$$

$$\therefore \angle ABC = 2\angle E$$

$$\therefore \angle ABC = 2\angle C$$

12. 已知：AC 平分 $\angle BAD$ ， $CE \perp AB$ ， $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ，求证： $AE = AD + BE$



在 AE 上取 F，使 $EF = EB$ ，连接 CF

$$\because CE \perp AB$$

$$\therefore \angle CEB = \angle CEF = 90^\circ$$

$$\because EB = EF, CE = CE,$$

$$\therefore \triangle CEB \cong \triangle CEF$$

$$\therefore \angle B = \angle CFE$$

$$\because \angle B + \angle D = 180^\circ, \angle CFE + \angle CFA = 180^\circ$$

$$\therefore \angle D = \angle CFA$$

$$\because AC \text{ 平分 } \angle BAD$$

$$\therefore \angle DAC = \angle FAC$$

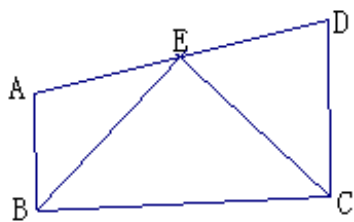
$$\text{又 } \because AC = AC$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle AFC \text{ (SAS)}$$

$$\therefore AD = AF$$

$$\therefore AE = AF + FE = AD + BE$$

12. 如图，四边形 ABCD 中， $AB \parallel DC$ ，BE、CE 分别平分 $\angle ABC$ 、 $\angle BCD$ ，且点 E 在 AD 上。求证： $BC = AB + DC$ 。

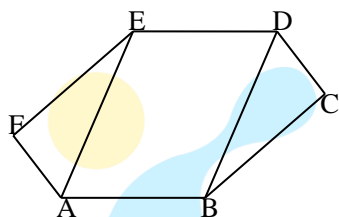


在 BC 上截取 $BF = AB$ ，连接 EF

$$\because BE \text{ 平分 } \angle ABC$$

$\therefore \angle ABE = \angle FBE$
 又 $\because BE = BE$
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle FBE$ (SAS)
 $\therefore \angle A = \angle BFE$
 $\because AB \parallel CD$
 $\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ$
 $\because \angle BFE + \angle CFE = 180^\circ$
 $\therefore \angle D = \angle CFE$
 又 $\because \angle DCE = \angle FCE$
 CE 平分 $\angle BCD$
 $CE = CE$
 $\therefore \triangle DCE \cong \triangle FCE$ (AAS)
 $\therefore CD = CF$
 $\therefore BC = BF + CF = AB + CD$

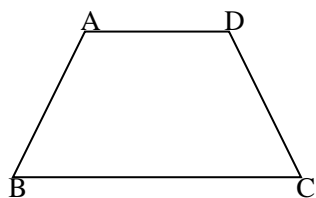
13. 已知: $AB \parallel ED$, $\angle EAB = \angle BDE$, $AF = CD$, $EF = BC$, 求证: $\angle F = \angle C$



$AB \parallel ED$, 得: $\angle EAB + \angle AED = \angle BDE + \angle ABD = 180^\circ$,

$\because \angle EAB = \angle BDE$,
 $\therefore \angle AED = \angle ABD$,
 \therefore 四边形 $ABDE$ 是平行四边形。
 \therefore 得: $AE = BD$,
 $\because AF = CD, EF = BC$,
 \therefore 三角形 AEF 全等于三角形 DBC ,
 $\therefore \angle F = \angle C$ 。

14. 已知: $AB = CD$, $\angle A = \angle D$, 求证: $\angle B = \angle C$



证明: 设线段 AB, CD 所在的直线交于 E , (当 $AD < BC$ 时, E 点是射线 BA, CD 的交点, 当 $AD > BC$ 时, E 点是射线 AB, DC 的交点)。则:

$\triangle AED$ 是等腰三角形。

$\therefore AE = DE$

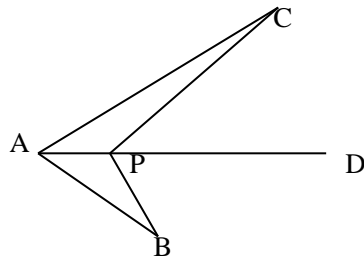
而 $AB=CD$

$\therefore BE=CE$ (等量加等量, 或等量减等量)

$\therefore \triangle BEC$ 是等腰三角形

$\therefore \angle B=\angle C$.

15. P 是 $\angle BAC$ 平分线 AD 上一点, $AC>AB$, 求证: $PC-PB<AC-AB$



在 AC 上取点 E ,

使 $AE=AB$ 。

$\because AE=AB$

$AP=AP$

$\angle EAP=\angle BAP$,

$\therefore \triangle EAP \cong \triangle BAP$

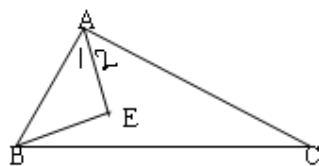
$\therefore PE=PB$ 。

$PC < EC + PE$

$\therefore PC < (AC - AE) + PB$

$\therefore PC - PB < AC - AB$ 。

16. 已知 $\angle ABC=3\angle C$, $\angle 1=\angle 2$, $BE \perp AE$, 求证: $AC-AB=2BE$



证明:

在 AC 上取一点 D , 使得角 $DBC=$ 角 C

$\because \angle ABC=3\angle C$

$\therefore \angle ABD=\angle ABC-\angle DBC=3\angle C-\angle C=2\angle C$;

$\because \angle ADB=\angle C+\angle DBC=2\angle C$;

$\therefore AB=AD$

$\therefore AC - AB = AC - AD = CD = BD$

在等腰三角形 ABD 中，AE 是角 BAD 的角平分线，

$\therefore AE \perp BD$

$\because BE \perp AE$

\therefore 点 E 一定在直线 BD 上，

在等腰三角形 ABD 中， $AB=AD$ ， $AE \perp BD$

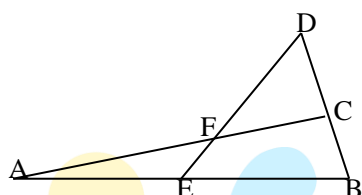
\therefore 点 E 也是 BD 的中点

$\therefore BD=2BE$

$\because BD=CD=AC-AB$

$\therefore AC-AB=2BE$

17. 已知，E 是 AB 中点， $AF=BD$ ， $BD=5$ ， $AC=7$ ，求 DC



\therefore 作 $AG \parallel BD$ 交 DE 延长线于 G

$\therefore AGE$ 全等 BDE

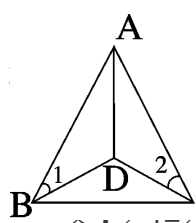
$\therefore AG=BD=5$

$\therefore AGF \sim CDF$

$AF=AG=5$

$\therefore DC=CF=2$

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BD=DC$ ， $\angle 1=\angle 2$ ，求证： $AD \perp BC$ 。



C 于点 E,

$\therefore \triangle BDC$ 是等腰三角形

DCB

$\therefore \angle DBC + \angle 1 = \angle DCB + \angle 2$

即 $\angle ABC = \angle ACB$

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形

$\therefore AB=AC$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中

$\begin{cases} AB=AC \\ \angle 1=\angle 2 \\ BD=DC \end{cases}$

$\angle 1=\angle 2$

$BD=DC$

$\therefore \triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 是全等三角形（边角边）

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD$$

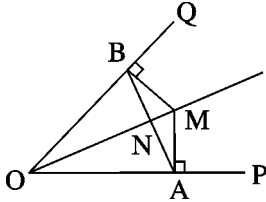
$\therefore AE$ 是 $\triangle ABC$ 的中垂线

$$\therefore AE \perp BC$$

$$\therefore AD \perp BC$$

19. 如图, OM 平分 $\angle POQ$, $MA \perp OP$, $MB \perp OQ$, A 、 B 为垂足, AB 交 OM 于点 N .

求证: $\angle OAB = \angle OBA$



证明:

$\because OM$ 平分 $\angle POQ$

$$\therefore \angle POM = \angle QOM$$

$\because MA \perp OP$, $MB \perp OQ$

$$\therefore \angle MAO = \angle MBO = 90^\circ$$

$\because OM = OM$

$$\therefore \triangle AOM \cong \triangle BOM \quad (\text{AAS})$$

$$\therefore OA = OB$$

$$\because ON = ON$$

$$\therefore \triangle AON \cong \triangle BON \quad (\text{SAS})$$

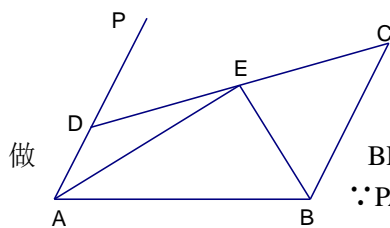
$$\therefore \angle OAB = \angle OBA, \angle ONA = \angle ONB$$

$$\because \angle ONA + \angle ONB = 180^\circ$$

$$\therefore \angle ONA = \angle ONB = 90^\circ$$

$$\therefore OM \perp AB$$

20. (5分) 如图, 已知 $AD \parallel BC$, $\angle PAB$ 的平分线与 $\angle CBA$ 的平分线相交于 E , CE 的连线交 AP 于 D . 求证: $AD + BC = AB$.



做

BE 的延长线, 与 AP 相交于 F 点,

$$\because PA \parallel BC$$

$$\therefore \angle PAB + \angle CBA = 180^\circ, \text{ 又 } \because AE, BE \text{ 均为 } \angle PAB \text{ 和 } \angle CBA$$

的角平分线

$$\therefore \angle EAB + \angle EBA = 90^\circ \therefore \angle AEB = 90^\circ, \text{ EAB 为直角三角形}$$

在三角形 ABF 中, $AE \perp BF$, 且 AE 为 $\angle FAB$ 的角平分线

$$\therefore \text{三角形 FAB 为等腰三角形, } AB = AF, BE = EF$$

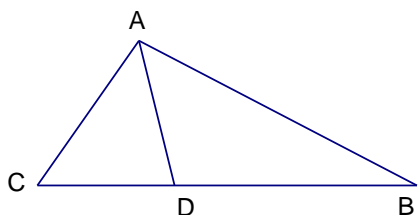
在三角形 DEF 与三角形 BEC 中,

$$\angle EBC = \angle DFE, \text{ 且 } BE = EF, \angle DEF = \angle CEB,$$

$$\therefore \text{三角形 DEF 与三角形 BEC 为全等三角形, } \therefore DF = BC$$

$$\therefore AB = AF = AD + DF = AD + BC$$

21. 如图, $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle CAB$ 的平分线, 且 $AB=AC+CD$, 求证: $\angle C=2\angle B$



延长 AC 到 E

使 $AE=AC$ 连接 ED

$$\because AB=AC+CD$$

$$\therefore CD=CE$$

可得 $\angle B=\angle E$

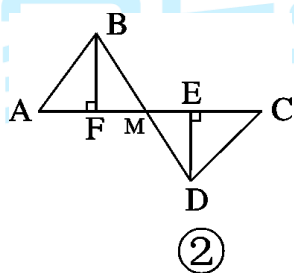
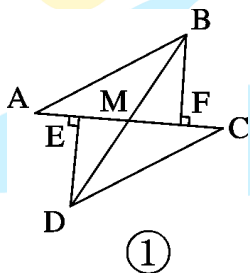
$\triangle CDE$ 为等腰

$$\angle ACB=2\angle B$$

22. (6分) 如图①, E 、 F 分别为线段 AC 上的两个动点, 且 $DE \perp AC$ 于 E , $BF \perp AC$ 于 F , 若 $AB=CD$, $AF=CE$, BD 交 AC 于点 M .

(1) 求证: $MB=MD$, $ME=MF$

(2) 当 E 、 F 两点移动到如图②的位置时, 其余条件不变, 上述结论能否成立? 若成立请给予证明; 若不成立请说明理由.



(1) 连接 BE , DF .

$$\because DE \perp AC \text{ 于 } E, BF \perp AC \text{ 于 } F,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle BFA = 90^\circ, DE \parallel BF,$$

在 $\text{Rt}\triangle DEC$ 和 $\text{Rt}\triangle BFA$ 中,

$$\because AF=CE, AB=CD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DEC \cong \text{Rt}\triangle BFA \text{ (HL)},$$

$$\therefore DE=BF.$$

\therefore 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

$$\therefore MB=MD, ME=MF;$$

(2) 连接 BE , DF .

$$\because DE \perp AC \text{ 于 } E, BF \perp AC \text{ 于 } F,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle BFA = 90^\circ, DE \parallel BF,$$

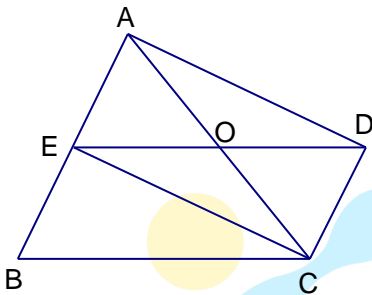
在 $\text{Rt}\triangle DEC$ 和 $\text{Rt}\triangle BFA$ 中,

$\because AF=CE, AB=CD,$
 $\therefore \text{Rt}\triangle DEC \cong \text{Rt}\triangle BFA \text{ (HL)},$
 $\therefore DE=BF.$
 \therefore 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.
 $\therefore MB=MD, ME=MF.$

23. 已知：如图， $DC \parallel AB$ ，且 $DC=AE$ ， E 为 AB 的中点，

(1) 求证： $\triangle AED \cong \triangle EBC$ 。

(2) 观看图前，在不添辅助线的情况下，除 $\triangle EBC$ 外，请再写出两个与 $\triangle AED$ 的面积相等的三角形。（直接写出结果，不要求证明）：

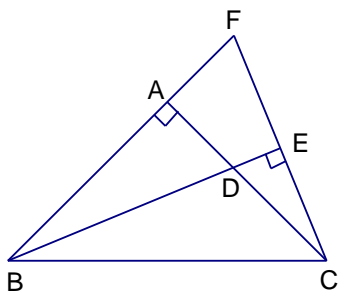


证明：

$\because DC \parallel AB$
 $\therefore \angle CDE = \angle AED$
 $\because DE=DE, DC=AE$
 $\therefore \triangle AED \cong \triangle EDC$
 $\because E$ 为 AB 中点
 $\therefore AE=BE$
 $\therefore BE=DC$
 $\because DC \parallel AB$
 $\therefore \angle DCE = \angle BEC$
 $\because CE=CE$
 $\therefore \triangle EBC \cong \triangle EDC$
 $\therefore \triangle AED \cong \triangle EBC$

24. (7分) 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $AB=AC$ ， BD 是 $\angle ABC$ 的平分线， BD 的延长线垂直于过 C 点的直线于 E ，直线 CE 交 BA 的延长线于 F 。

求证： $BD=2CE$ 。



证明：

$$\because \angle CEB = \angle CAB = 90^\circ$$

\therefore ABCE 四点共圆

$$\because \angle ABE = \angle CBE$$

$$\therefore AE = CE$$

$$\therefore \angle ECA = \angle EAC$$

取线段 BD 的中点 G，连接 AG，则：AG=BG=DG

$$\therefore \angle GAB = \angle ABG$$

而： $\angle ECA = \angle GBA$ （同弧上的圆周角相等）

$$\therefore \angle ECA = \angle EAC = \angle GBA = \angle GAB$$

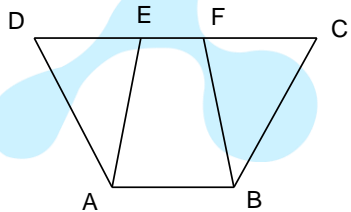
而：AC=AB

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle AGB$$

$$\therefore EC = BG = DG$$

$$\therefore BE = 2CE$$

25、如图：DF=CE，AD=BC， $\angle D = \angle C$ 。求证： $\triangle AED \cong \triangle BFC$ 。



证明： $\because DF = CE$ ，

$$\therefore DF - EF = CE - EF$$

即 $DE = CF$ ，

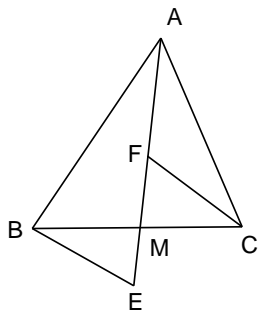
在 $\triangle AED$ 和 $\triangle BFC$ 中，

$$\because AD = BC, \quad \angle D = \angle C, \quad DE = CF$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle BFC \text{ (SAS)}$$

26、（10 分）如图：AE、BC 交于点 M，F 点在 AM 上，BE//CF，BE=CF。

求证：AM 是 $\triangle ABC$ 的中线。



证明：

$\because BE \parallel CF$

$\therefore \angle E = \angle CFM, \angle EBM = \angle FCM$

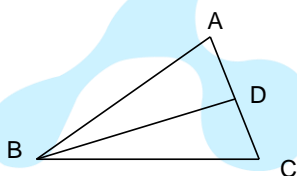
$\because BE = CF$

$\therefore \triangle BEM \cong \triangle CFM$

$\therefore BM = CM$

$\therefore AM$ 是 $\triangle ABC$ 的中线.

27、(10 分) 如图：在 $\triangle ABC$ 中， $BA = BC$ ， D 是 AC 的中点。求证： $BD \perp AC$ 。



$\because \triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的三条边都相等

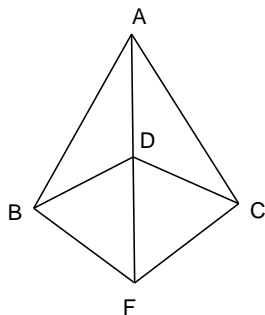
$\therefore \triangle ABD = \triangle BCD$

$\therefore \angle ADB = \angle CDB$

$\therefore \angle ADB = \angle CDB = 90^\circ$

$\therefore BD \perp AC$

28、(10 分) $AB = AC$ ， $DB = DC$ ， F 是 AD 的延长线上的一点。求证： $BF = CF$



在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 中

$$AB=AC$$

$$BD=DC$$

$$AD=AD$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ADC$$

$$\therefore \angle BDF = \angle FDC$$

在 $\triangle BDF$ 与 $\triangle FDC$ 中

$$BD=DC$$

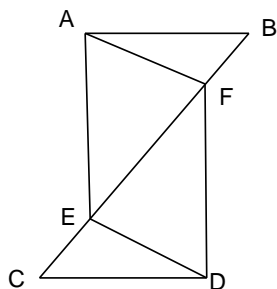
$$\angle BDF = \angle FDC$$

$$DF=DF$$

$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle FDC$$

$$\therefore BF=FC$$

29、（12 分）如图：AB=CD，AE=DF，CE=FB。求证：AF=DE。



$$\because AB=DC$$

$$AE=DF,$$

$$CE=FB$$

$$CE+EF=EF+FB$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF$$

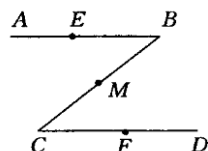
$$\therefore \angle DCB = \angle ABF$$

$$AB=DC \quad BF=CE$$

$$\triangle ABF = \triangle CDE$$

$$\therefore AF=DE$$

30. 公园里有一条“Z”字形道路 $ABCD$ ，如图所示，其中 $AB \parallel CD$ ，在 AB ， CD ， BC 三段路旁各有一只小石凳 E ， F ， M ，且 $BE=CF$ ， M 在 BC 的中点，试说明三只石凳 E ， F ， M 恰好在一条直线上。



证明：连接 EF

$$\because AB \parallel CD$$

$$\therefore \angle B = \angle C$$

$$\because M \text{ 是 } BC \text{ 中点}$$

$$\therefore BM=CM$$

在 $\triangle BEM$ 和 $\triangle CFM$ 中

$$BE=CF$$

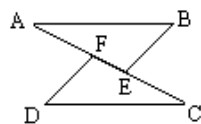
$$\angle B = \angle C$$

$$BM=CM$$

$$\therefore \triangle BEM \cong \triangle CFM \text{ (SAS)}$$

$$\therefore CF=BE$$

31. 已知：点 A 、 F 、 E 、 C 在同一条直线上， $AF=CE$ ， $BE \parallel DF$ ， $BE=DF$ ，求证： $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ 。



(第2题)

$$\because AF=CE, FE=EF.$$

$$\therefore AE=CF.$$

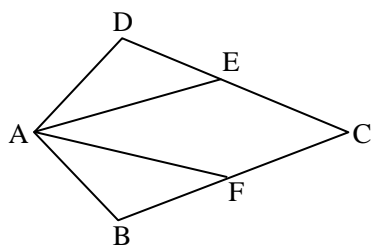
$$\because DF \parallel BE,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle CFD \text{ (两直线平行, 内错角相等)}$$

$$\because BE=DF$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF \text{ (SAS)}$$

32. 已知：如图所示， $AB=AD$ ， $BC=DC$ ， E 、 F 分别是 DC 、 BC 的中点，求证： $AE=AF$ 。



连接 BD;

$\because AB=AD \quad BC=DC$

$\therefore \angle ADB=\angle ABD \quad \angle CDB=\angle CBD$; 两角相加, $\angle ADC=\angle ABC$;

$\because BC=DC \quad E$ 是 AC 中点

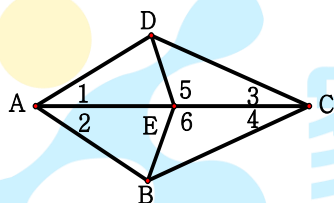
$\therefore DE=BE$;

$\because AB=AD \quad DE=BE$

$\angle ADC=\angle ABC$

$\therefore AE=BE$ 。

33. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, E 是 AC 上的一点, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 3=\angle 4$, 求证: $\angle 5=\angle 6$.



证明:

在 $\triangle ADC$, $\triangle ABC$ 中

$\because AC=AC, \angle BAC=\angle DAC, \angle BCA=\angle DCA$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle ABC$ (两角夹一边)

$\because AB=AD, BC=CD$

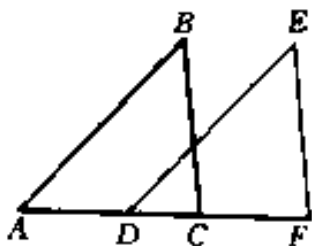
在 $\triangle DEC$ 与 $\triangle BEC$ 中

$\angle BCA=\angle DCA, CE=CE, BC=CD$

$\therefore \triangle DEC \cong \triangle BEC$ (两边夹一角)

$\therefore \angle DEC=\angle BEC$

34. 已知 $AB \parallel DE, BC \parallel EF, D, C$ 在 AF 上, 且 $AD=CF$, 求证: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



$$\because AD=DF$$

$$\therefore AC=DF$$

$$\because AB \parallel DE$$

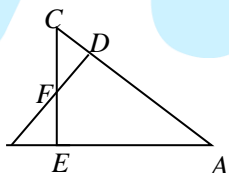
$$\therefore \angle A = \angle EDF$$

$$\text{又} \because BC \parallel EF$$

$$\therefore \angle F = \angle BCA$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ (ASA)}$$

35. 已知：如图， $AB=AC$ ， $BD \perp AC$ ， $CE \perp AB$ ，垂足分别为 D 、 E ， BD 、 CE 相交于点 F ，求证： $BE=CD$ 。



证明：

$$\because BD \perp AC$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ$$

$$\because CE \perp AB$$

$$\therefore \angle BEC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BEC = 90^\circ$$

$$\because AB=AC$$

$$\therefore \angle DCB = \angle ECB$$

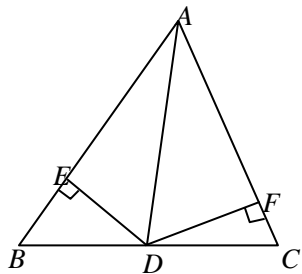
$$\therefore BC=BC$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BDC \cong \text{Rt}\triangle BEC \text{ (AAS)}$$

$$\therefore BE=CD$$

36、如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 为 $\angle BAC$ 的平分线， $DE \perp AB$ 于 E ， $DF \perp AC$ 于 F 。

求证： $DE=DF$ 。



证明：

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线

$\therefore \angle EAD = \angle FAD$

$\because DE \perp AB, DF \perp AC$

$\therefore \angle BED = \angle CFD = 90^\circ$

$\therefore \angle AED$ 与 $\angle AFD = 90^\circ$

在 $\triangle AED$ 与 $\triangle AFD$ 中

$\angle EAD = \angle FAD$

$AD = AD$

$\angle AED = \angle AFD$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle AFD$ (AAS)

$\therefore AE = AF$

在 $\triangle AEO$ 与 $\triangle AFO$ 中

$\angle EAO = \angle FAO$

$AO = AO$

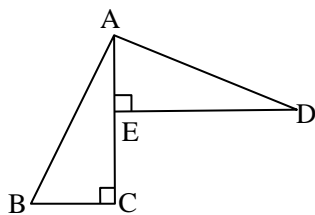
$AE = AF$

$\therefore \triangle AEO \cong \triangle AFO$ (SAS)

$\therefore \angle AOE = \angle AOF = 90^\circ$

$\therefore AD \perp EF$

37. 已知：如图， $AC \perp BC$ 于 C ， $DE \perp AC$ 于 E ， $AD \perp AB$ 于 A ， $BC = AE$ 。若 $AB = 5$ ，求 AD 的长？



$\because AD \perp AB$

$\therefore \angle BAC = \angle ADE$

又 $\because AC \perp BC$ 于 C ， $DE \perp AC$ 于 E

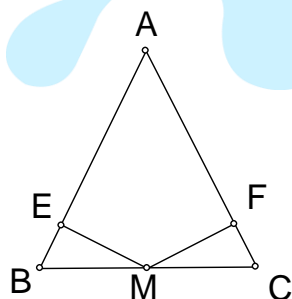
根据三角形内角之和等于180度

$\therefore \angle ABC = \angle DAE$

$\because BC = AE$ ， $\triangle ABC \cong \triangle DAE$ (ASA)

$\therefore AD = AB = 5$

38. 如图： $AB = AC$ ， $ME \perp AB$ ， $MF \perp AC$ ，垂足分别为 E 、 F ， $ME = MF$ 。求证： $MB = MC$



证明：

$\because AB = AC$

$\therefore \angle B = \angle C$

$\because ME \perp AB$ ， $MF \perp AC$

$\therefore \angle BEM = \angle CFM = 90^\circ$

在 $\triangle BME$ 和 $\triangle CMF$ 中

$\because \angle B = \angle C$ $\angle BEM = \angle CFM = 90^\circ$ $ME = MF$

$\therefore \triangle BME \cong \triangle CMF$ (AAS)

$\therefore MB = MC$.

39. 如图，给出五个等量关系：① $AD = BC$ ② $AC = BD$ ③ $CE = DE$ ④ $\angle D = \angle C$ ⑤ $\angle DAB = \angle CBA$ 。请你以其中两个为条件，另三个中的一个为结论，推出一个正确的结论（只需写出一种情况），并加以证明。

已知：① $AD = BC$ ，⑤ $\angle DAB = \angle CBA$

求证: $\triangle DAB \cong \triangle CBA$

证明: $\because AD=BC, \angle DAB=\angle CBA$

又 $\because AB=AB$

$\therefore \triangle DAB \cong \triangle CBA$

40. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 直线 MN 经过点 C , 且 $AD \perp MN$ 于 D , $BE \perp MN$ 于 E . (1) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图 1 的位置时, 求证: ① $\triangle ADC \cong \triangle CEB$;

② $DE = AD + BE$;

(2) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图 2 的位置时, (1) 中的结论还成立吗? 若成立, 请给出证明; 若不成立, 说明理由.

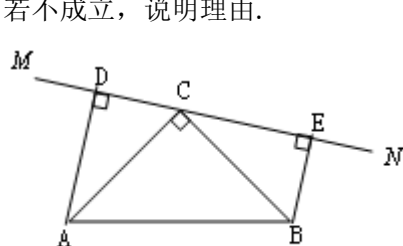


图 1

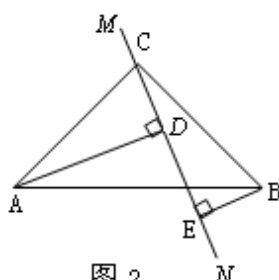


图 2

(1)

① $\because \angle ADC = \angle ACB = \angle BEC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle CAD + \angle ACD = 90^\circ$, $\angle BCE + \angle CBE = 90^\circ$, $\angle ACD + \angle BCE = 90^\circ$.
 $\therefore \angle CAD = \angle BCE$.

$\because AC = BC$,

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEB$.

② $\because \triangle ADC \cong \triangle CEB$,

$\therefore CE = AD, CD = BE$.

$\therefore DE = CE + CD = AD + BE$.

(2) $\because \angle ADC = \angle CEB = \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACD = \angle CBE$.

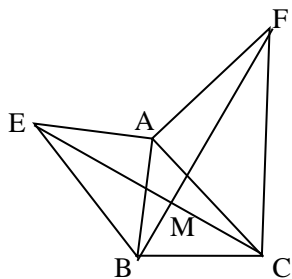
又 $\because AC = BC$,

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE$.

$\therefore CE = AD, CD = BE$.

$\therefore DE = CE - CD = AD - BE$

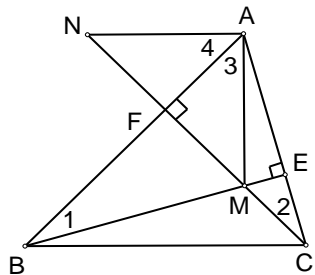
41. 如图所示, 已知 $AE \perp AB$, $AF \perp AC$, $AE = AB$, $AF = AC$. 求证: (1) $EC = BF$; (2) $EC \perp BF$



(1) $\because AE \perp AB, AF \perp AC,$
 $\therefore \angle BAE = \angle CAF = 90^\circ,$
 $\therefore \angle BAE + \angle BAC = \angle CAF + \angle BAC,$
 即 $\angle EAC = \angle BAF,$
 在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle AEC$ 中,
 $\because AE = AB, \angle EAC = \angle BAF, AF = AC,$
 $\therefore \triangle ABF \cong \triangle AEC \text{ (SAS)},$
 $\therefore EC = BF;$

(2) 如图, 根据 (1), $\triangle ABF \cong \triangle AEC,$
 $\therefore \angle AEC = \angle ABF,$
 $\because AE \perp AB,$
 $\therefore \angle BAE = 90^\circ,$
 $\therefore \angle AEC + \angle ADE = 90^\circ,$
 $\because \angle ADE = \angle BDM \text{ (对顶角相等)},$
 $\therefore \angle ABF + \angle BDM = 90^\circ,$
 在 $\triangle BDM$ 中, $\angle BMD = 180^\circ - \angle ABF - \angle BDM = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$
 $\therefore EC \perp BF.$

42. 如图: $BE \perp AC, CF \perp AB, BM = AC, CN = AB$. 求证: (1) $AM = AN$; (2) $AM \perp AN$.



证明:

(1)

$\because BE \perp AC, CF \perp AB$

$$\therefore \angle ABM + \angle BAC = 90^\circ, \quad \angle ACN + \angle BAC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABM = \angle ACN$$

$$\because BM = AC, \quad CN = AB$$

$$\therefore \triangle ABM \cong \triangle NAC$$

$$\therefore AM = AN$$

(2)

$$\because \triangle ABM \cong \triangle NAC$$

$$\therefore \angle BAM = \angle N$$

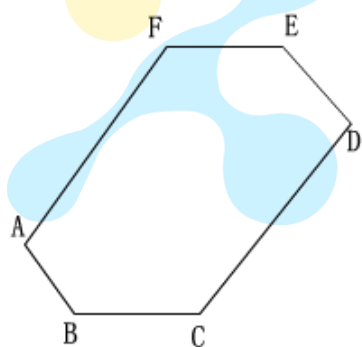
$$\because \angle N + \angle BAN = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAM + \angle BAN = 90^\circ$$

$$\text{即 } \angle MAN = 90^\circ$$

$$\therefore AM \perp AN$$

43. 如图,已知 $\angle A = \angle D$, $AB = DE$, $AF = CD$, $BC = EF$. 求证: $BC \parallel EF$



在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CDE$ 中

$$AB = DE$$

$$\angle A = \angle D$$

$$AF = CD$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE \text{ (边角边)}$$

$$\therefore FB = CE$$

在四边形 $BCEF$ 中

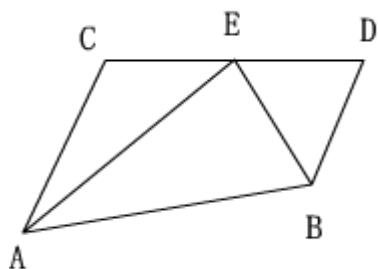
$$FB = CE$$

$$BC = EF$$

$$\therefore \text{四边形 } BCEF \text{ 是平行四边形}$$

$$\therefore BC \parallel EF$$

44. 如图,已知 $AC \parallel BD$, EA 、 EB 分别平分 $\angle CAB$ 和 $\angle DBA$, CD 过点 E , 则 AB 与 $AC + BD$ 相等吗? 请说明理由



在 AB 上取点 N, 使得 $AN=AC$

$\therefore \angle CAE = \angle EAN$

$\therefore AE$ 为公共,

$\therefore \triangle CAE \cong \triangle EAN$

$\therefore \angle ANE = \angle ACE$

又 $\because AC$ 平行 BD

$\therefore \angle ACE + \angle BDE = 180$

而 $\angle ANE + \angle ENB = 180$

$\therefore \angle ENB = \angle BDE$

$\angle NBE = \angle EBN$

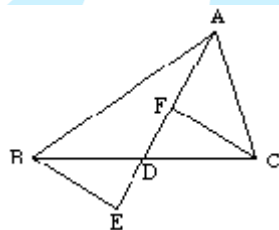
$\therefore BE$ 为公共边

$\therefore \triangle EBN \cong \triangle EBD$

$\therefore BD = BN$

$\therefore AB = AN + BN = AC + BD$

45、(10 分) 如图, 已知: AD 是 BC 上的中线, 且 $DF = DE$. 求证: $BE \parallel CF$.



证明:

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线

$BD = CD$

$\because DF = DE$ (已知)

$\angle BDE = \angle FDC$

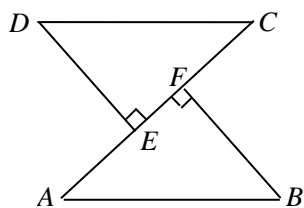
$\therefore \triangle BDE \cong \triangle FDC$

则 $\angle EBD = \angle FCD$

$\therefore BE \parallel CF$ (内错角相等, 两直线平行)。

46、(10 分) 已知: 如图, $AB = CD$, $DE \perp AC$, $BF \perp AC$, E, F 是垂足, $DE = BF$.

求证: $AB \parallel CD$.



证明：

$\because DE \perp AC, BF \perp AC$

$\therefore \angle CED = \angle AFB = 90^\circ$

又 $\because AB = CD, BF = DE$

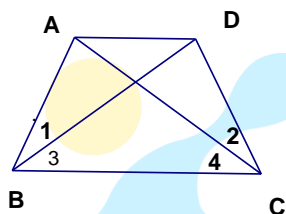
$\therefore \text{Rt} \triangle ABF \cong \text{Rt} \triangle CDE \text{ (HL)}$

$\therefore AF = CE$

$\angle BAF = \angle DCE$

$\therefore AB \parallel CD$

47、(10 分)如图，已知 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，求证： $AB = CD$



$\because \angle 3 = \angle 4$

$\therefore OB = OC$

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle DOC$ 中

$\angle 1 = \angle 2$

$OB = OC$

$\angle AOB = \angle DOC$

$\triangle AOB \cong \triangle DOC$

$\therefore AO = DO$

$AO + OC = DO + OB$

$AC = DB$

在 $\triangle ACB$ 和 $\triangle DBC$ 中

$AC = DB$

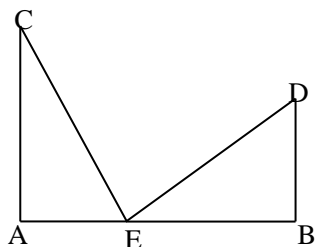
$\angle 3 = \angle 4$

$BC = CB$

$\triangle ACB \cong \triangle DBC$

$\therefore AB = CD$

48、(10 分)如图，已知 $AC \perp AB$ ， $DB \perp AB$ ， $AC = BE$ ， $AE = BD$ ，试猜想线段 CE 与 DE 的大小与位置关系，并证明你的结论.



$CE > DE$ 。当 $\angle AEB$ 越小，则 DE 越小。

证明：

过 D 作 AE 平行线与 AC 交于 F ，连接 FB

由已知条件知 $AFDE$ 为平行四边形， $ABEC$ 为矩形，且 $\triangle DFB$ 为等腰三角形。

在 $\triangle BAE$ 中， $\angle AEB$ 为锐角，即 $\angle AEB < 90^\circ$

$\because DF \parallel AE \therefore \angle FDB = \angle AEB < 90^\circ$

$\triangle DFB$ 中 $\angle DFB = \angle DBF = (180^\circ - \angle FDB) / 2 > 45^\circ$

在 $\triangle AFB$ 中， $\angle FBA = 90^\circ - \angle DBF < 45^\circ$

$\angle AFB = 90^\circ - \angle FBA > 45^\circ$

$\therefore AB > AF$

$\because AB = CE \quad AF = DE$

$\therefore CE > DE$

49、(10分)如图，已知 $AB = DC$ ， $AC = DB$ ， $BE = CE$ ，求证： $AE = DE$ 。



$\because AB = DC, AC = DB, BC = BC$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$

$\therefore \angle ABC = \angle DCB$

又 $\because BE = CE, AB = DC$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCE$

$\therefore AE = DE$

50. 如图 9 所示， $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle ACB = 90^\circ$ ， AD 是 BC 边上的中线，过 C 作 AD 的垂线，交 AB 于点 E ，交 AD 于点 F ，求证： $\angle ADC = \angle BDE$ 。

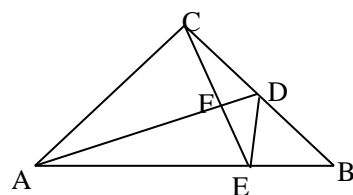


图 9

作 $CG \perp AB$, 交 AD 于 H ,

则 $\angle ACH = 45^\circ$; $\angle BCH = 45^\circ$

$\because \angle CAH = 90^\circ - \angle CDA$, $\angle BCE = 90^\circ - \angle CDA \therefore \angle CAH = \angle BCE$

又 $\because AC = CB$, $\angle ACH = \angle B = 45^\circ$

$\therefore \triangle ACH \cong \triangle CBE$, $\therefore CH = BE$

又 $\because \angle DCH = \angle B = 45^\circ$; $CD = DB$

$\therefore \triangle CFD \cong \triangle BED$

$\therefore \angle ADC = \angle BDE$



家长训练营

